

Queste considerazioni sono state svolte primieramente dal TROLLER [F 7] il quale ha trovato nuovamente come condizione ottima $\eta_i = \text{cost}$, essendo in questo caso

$$\eta_i = \frac{V \cdot dT}{V \cdot dT + dm \cdot \left(\frac{v_1^2}{2} + \frac{u_1^2}{2} \right)}$$

dove dm è la massa d'aria traversamente l'elemento, V la velocità d'avanzamento del complesso elica-fusoliera, v_1 e u_1 gli incrementi a distanza infinita, legati da opportune relazioni a quelli del disco; e posto $dT = dm \cdot v_1$

$$\eta_i = \frac{1}{1 + \frac{v_1}{2V} + \frac{u_1^2}{2Vv_1}}$$

La condizione cercata è dunque:

$$v_1 + \frac{u_1^2}{v_1} = cV.$$

Ammissa la relazione (analoga a quella dell'elica in corrente uniforme) ⁽¹⁾

$$u_1 = v_1 \lambda$$

si giunge, per quanto riguarda gli incrementi all'infinito, alla stessa relazione che per il caso di elica libera.

Il problema è stato ripreso in forma più complessa dall'HELMBOLD [F 11], tenendo conto della corrente di trascinamento (oltrechè della corrente potenziale) nonchè della resistenza di profilo delle pale. Ma non ci intratteniamo su questi risultati, i quali, a nostro giudizio, richiedono una più approfondita elaborazione.

Il secondo problema, limitatamente a velocità variabile linearmente in una determinata direzione ortogonale all'asse, è stato studiato dal PETERSOHN [F 6] e dallo stesso HELMBOLD [F 11] sulla base di procedimenti di approssimazione, nonchè dallo scrivente [F 9] col metodo degli incrementi medi. Interessante l'osservazione di HELMBOLD che l'elica « ottima » dovrebbe avere in questo caso caratteristiche geometriche variabili durante il giro.

⁽¹⁾ Questa relazione non è ammissa dal TROLLER, ma a noi sembra senza dubbio valevole per le stesse ragioni che la dimostrano nel caso dell'elica libera.

Il problema dell'elica in vento laterale è stata pure oggetto di vari studi (v. Bibliografia F). Un progresso notevole nella trattazione di esso fu dato dall'*analogia di GLAUERT* (v. [F 2]), in base alla quale la velocità indotta ortogonale al disco deve calcolarsi come la velocità indotta da un'ala di uguale apertura, avente una portanza uguale alla spinta dell'elica.

La dimostrazione di tale analogia fu data con semplice e convincente procedimento dal FERRARI [F 4] e discussa dallo scrivente [F 3, 5]. Di recente il FERRARI è ritornato sull'argomento con acute considerazioni tratte dalla teoria del potenziale di accelerazione, affinando l'antica dimostrazione e i risultati relativi [F 16]. Dal punto di vista pratico i primitivi risultati restano tuttavia più comodi e si prestano egregiamente all'applicazione del metodo degli incrementi medi.

Per piccole obliquità del vento possono servire metodi di calcolo che si avvalgono delle caratteristiche dell'elica in corrente assiale assimilando la componente tangenziale del vento laterale ad un aumento « locale » della velocità di rotazione, e si può in modo analogo tener conto anche di un moto di virata dell'asse di rotazione [F 14, 15].

24. — *Eliche in tandem e controeliche.*

Il problema delle eliche in tandem è del tutto analogo a quello delle eliche in corrente non uniforme assialsimmetrica, qualora si sostituisca l'elica inducente con un'elica equivalente ad infinite pale; perciò si può ripetere per questo problema quanto si è accennato per il caso suddetto. In particolare sarebbe interessante anche per questo caso una trattazione più soddisfacente del problema della minima perdita indotta.

Molto complicata e credo praticamente inaccessibile sarebbe la trattazione qualora si volesse tener conto che anche l'elica inducente è a numero finito di pale.

Bene si presta, per uno studio sommario e speditivo, il metodo degli incrementi medi, già applicato a questo problema dallo scrivente molti anni or sono [Bibl. I].

Un'osservazione è da farsi, non priva di interesse. Se anche l'elica indotta fosse ad infinite pale, si presenterebbe la possibilità teorica, facendo uso di eliche contro-rotanti, di annullare completamente, mediante la seconda elica, la rotazione impressa nella scia dalla prima, coll'integrale recupero dell'energia cinetica

corrispondente. Il rendimento indotto del complesso si ridurrebbe in questo caso al solo rendimento assiale:

$$\eta_i = \eta_a = \frac{V}{V + v}$$

e la condizione di rendimento ottimo sarebbe $v = \text{cost.}$, alla quale corrisponderebbe distribuzione uniforme della spinta sul disco.

In realtà le cose vanno diversamente, perchè l'elica con numero finito di pale induce una velocità tangenziale, che, su ogni circonferenza coassiale all'elica, può essere mediamente nulla, ma non ovunque nulla. Si avrà perciò sempre un'energia cinetica residuale e quindi un rendimento periferico non unitario.

Si possono in questo caso, con le opportune varianti, applicare i criteri usati dal BETZ nel suo pregevole studio sulle *controeliche*.

Le controeliche sono un caso particolare delle eliche in tandem, quando la velocità di rotazione di una delle eliche si annulla. Il BETZ [G 7] ha studiato il caso della controelica a poppa dell'elica inducente ⁽¹⁾, assimilata, quest'ultima, ad un'elica ad infinite pale, supponendo inoltre la velocità tangenziale inversamente proporzionale al raggio, quale corrisponde alla già indicata condizione ottima (per elica e controelica ad infinite pale) $v = \text{costante}$.

Applicando al sistema vorticoso uscente dalle pale della controelica i concetti già adoperati dallo stesso BETZ per le eliche isolate, egli trova che la distribuzione di vorticità lungo il raggio che realizza la minima perdita di energia (o meglio, nel caso nostro, il massimo ricupero di energia) è quello che conduce ad avere velocità tangenziale nulla all'infinito a valle della controelica in corrispondenza degli elicoidi formati dai vortici liberi. Tali superficie risultano allora all'infinito piane e il problema diviene perciò un problema piano.

Il problema è risolto dapprima nel caso in cui le controeliche hanno pale illimitate (estendentisi fino all'infinito) e si tiene conto della presenza di un mozzo di raggio r_0 col procedimento della riflessione. Si trova che la circolazione lungo le pale continua al di là del raggio esterno del getto, tendendo asintoticamente a zero per $r \rightarrow \infty$.

⁽¹⁾ Egli avverte peraltro che la trattazione è valevole anche se la controelica precede l'elica.

Il rendimento (rapporto fra la spinta sulla controelica e quella che si avrebbe nel caso di infinite pale) risulta 1 se il raggio r_0 del mozzo è zero ⁽¹⁾, ma si abbassa tanto più quanto minore è il numero delle pale per $x_0 = \frac{r_0}{R} > 0$ e si annulla per $x_0 = 1$.

Le cose vanno naturalmente peggio se il raggio delle controeliche è finito. In questo caso il rendimento ovviamente si annulla quando il raggio del mozzo uguaglia quello della controelica, se questo è minore di quello del getto.

Il BETZ osserva che da quanto procede potrebbe credersi che un aumento del raggio del mozzo fosse in ogni caso dannoso; ma così non è, perchè l'aspirazione derivante dalla rotazione della scia che lo investe produce su di esso un'aspirazione, della quale può trovarsi l'equivalente nella diminuzione di energia cinetica della scia che si allarga ⁽²⁾. Ne deriva da ciò un vantaggio a favore della disposizione nella quale il raggio del mozzo cresce dall'elica alla controelica. Quando l'elica è seguita, per es., da una fusoliera, conviene collocare le controeliche nel punto di maggior diametro.

25. — Altri problemi.

Molti altri problemi vi sarebbero da considerare sull'aerodinamica delle eliche; ma poichè la trattazione a fondo dei vari argomenti richiederebbe un volume, ci limiteremo qui ad un cenno sommario.

Eliche intubate. — Il problema dell'elica intubata ha un duplice aspetto, secondochè il tubo che contiene l'elica e ne accompagna la scia è indefinitamente lungo, o può ritenersi tale (caso delle eliche ventilatrici delle gallerie aerodinamiche), ovvero è breve e costituisce un *anello* o *mantello* o *tubo addizionale*.

Il primo caso è semplice se il raggio del tubo uguaglia quello dell'elica, perchè la presenza del tubo indefinito distrugge la contrazione del getto e perciò annulla gli incrementi assiali di velocità. Veramente anche questo caso richiederebbe uno studio più approfondito, potendo essere *mediamente* nullo l'incremento assiale, ma non ovunque nullo.

⁽¹⁾ Il rendimento di ricupero è 1, nonostante che non tutta l'energia cinetica di rotazione sia recuperata, perchè questa, nell'ipotesi $r_0 = 0$, è infinita (infinito logaritmico).

⁽²⁾ Evidentemente si suppone ora che il mozzo cambi di diametro l'elica alla controelica.

In particolare, per l'elica con numero finito di pale, il problema di rendere $v_r = 0$ al contorno del tubo può essere risolto con un procedimento analogo a quello adoperato per l'elica con mozzo cilindrico indefinito (paragrafo 21).

Se infatti si prende $v_r = \frac{\Omega}{V} \cdot \frac{\partial \varphi_s}{\partial \mu}$, risulta, in base alle formule di KAWADA, supposto che il raggio del tubo corrisponda a $\mu_2 \geq \mu_1$:

$$v_r(\mu_2) = - \frac{p^2 \mu_1 \Gamma}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} n I'_{pn}(pn\mu_1) K'_{pn}(pn\mu_2) \operatorname{sen} pn\zeta.$$

Questa velocità deve essere annullata da una corrente aggiuntiva del tipo φ_s , che potremo scrivere:

$$\varphi' = \sum_{n=1}^{\infty} b_n I_{pn}(pn\mu) \operatorname{sen} pn\zeta.$$

La $v'_r(\mu_2)$ che ne deriva sarà:

$$v'_r(\mu_2) = p \sum_{n=1}^{\infty} n b_n I'_{pn}(pn\mu_2) \operatorname{sen} pn\zeta.$$

Uguagliando i coefficienti, si avrà:

$$b_n = \frac{p \mu_1 \Gamma}{\pi} \cdot \frac{I'_{pn}(pn\mu_1) \cdot K'_{pn}(pn\mu_2)}{I'_{pn}(pn\mu_2)}.$$

Questo stesso procedimento vale anche per il caso in cui il raggio del tubo è maggiore di quello dell'elica.

Per l'elica ad infinite pale questo caso può essere trattato con semplici ragionamenti sintetici ⁽¹⁾.

Il secondo caso, cioè quello del tubo corto ad anello, è assai meno semplice, perchè occorre considerare il duplice influsso: dell'elica sull'anello e dell'anello sull'elica. In genere, salvo che si verifichi il distacco della corrente, l'anello determina la sezione terminale della scia e varia perciò il rapporto fra la velocità sul disco e la velocità terminale, che però non obbedisce più alla

(¹) V. PISTOLESI, *Aerodinamica* [Bibl. VI].

legge di Froude. Il teorema della quantità di moto peraltro collega l'incremento terminale di velocità con la spinta che si verifica sull'insieme elica-anello (o almeno quella parte della superficie dell'anello che è lambita dal flusso dell'elica). Oltre a ciò l'anello induce velocità sul disco che ci riportano al problema dell'elica in corrente non uniforme assialsimmetrica.

Inversamente, la corrente prodotta dall'elica agisce su quella specie di ala teorica che è l'anello.

In definitiva l'anello o tubo addizionale può rappresentare, in favorevoli condizioni, un *aumentatore di spinta*, mentre difficilmente si realizza un effettivo miglioramento di rendimento propulsivo, dato anche l'aumento di resistenza passiva rappresentato dall'anello.

Esistono in argomento alcune interessanti trattazioni, alle quali rimandiamo ([H 7] [I 26] ecc.).

Eliche con molte e larghe pale. — Per le eliche con molte e larghe pale, o per essere più precisi, con elevato grado di pieno $pl/(2\pi r)$, si fa sensibile l'influsso della *curvatura della corrente*, dovuta all'induzione, non più soltanto dei vortici liberi, ma anche dei vortici aderenti. Nel caso di elica intubata, se il diametro dell'elica uguaglia quello del tubo e si suppone Γ costante lungo il raggio, i vortici liberi mancano e l'effetto di curvatura si riduce a quello dei vortici aderenti.

È noto che il problema dell'elica intubata in queste condizioni si riporta a quello della *schiera* o *cascata* infinita di ali indefinite, procedimento caro agli Autori tedeschi (V. ad es. HELMBOLD [A 11], WEINIG [Bibl. IX] ecc.). Questo problema è stato trattato da molti Autori, in particolare anche dallo scrivente, il quale ha dato un procedimento pratico di calcolo e ha messo in luce l'influsso dello spessore del profilo [H 4, 5, 6].

Anche nel caso delle eliche libere il calcolo si può condurre col procedimento della schiera infinita, astraendo dalla curvatura indotta nella corrente attorno alle pale dai vortici liberi della scia.

La cosa ha importanza, ad es., per le eliche marine; e se si riflette che in una schiera alare molto fitta la direzione della corrente uscente dipende essenzialmente dall'orientazione delle ali ed è quasi indipendente dall'incidenza, si comprende facilmente come le caratteristiche dell'elica possano, per gradi di pieno molto forti, seguire leggi diverse da quelle delle eliche a pale sottili, nelle quali l'effetto di schiera o di cascata è trascurabile.

Ammesso, ad es., che la velocità terminale al raggio r faccia un angolo β costante (cioè indipendente dal rapporto di funzionamento) con la direzione tangenziale U (fig. 12) si avrebbe:

$$\begin{aligned} V &= W \sin \varphi & U &= W \cos \varphi \\ V + 2v &= W \sin \beta & U - 2u &= W \cos \beta \end{aligned}$$

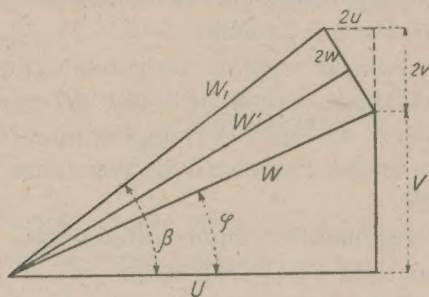


Fig. 12.

e si troverebbe:

$$v = \frac{1}{2} R\Omega \{ \sqrt{\lambda^2 + x^2} \cdot \sin \beta - \lambda \}$$

$$V + v = \frac{1}{2} R\Omega \{ \sqrt{\lambda^2 + x^2} \cdot \sin \beta + \lambda \}$$

e quindi, per la (39):

$$dT = \pi \rho R^4 \Omega^2 \{ (\lambda^2 + x^2) \sin^2 \beta - \lambda^2 \} x dx$$

e infine:

$$T = \pi \rho R^4 \Omega^2 \left\{ \int_0^1 x^3 \sin^2 \beta dx - \lambda^2 \int_0^1 x \cos^2 \beta dx \right\}$$

$$(132) \quad k_T = 2(\lambda^{*2} - \lambda^2) \int_0^1 x \cos^2 \beta \cdot dx$$

dove si è posto:

$$(133) \quad \lambda^* = \frac{\int_0^1 x^3 \sin^2 \beta dx}{\int_0^1 x \cos^2 \beta dx}$$

Si vede cioè che (a parte la resistenza di profilo che qui non è considerata) il k_T varierebbe con legge parabolica, con l'asse della parabola sull'asse delle ordinate, essendo la legge stessa

indipendente da ogni altra caratteristica aerodinamica o geometrica che non sia la variazione di β lungo il raggio ⁽¹⁾.

Ma su questo argomento riferirà, con ben altra profondità di indagine, un altro relatore (v. FERRARI, *L'influenza della larghezza finita delle pale sulle caratteristiche delle eliche*) e però non aggiungiamo altre considerazioni.

Osserviamo solo che la necessità, cui accenneremo nel prossimo paragrafo, di tenere limitato il diametro delle eliche aeree per non eccedere nella velocità periferica, sta orientando anche la pratica aeronautica verso eliche con grado di pieno maggiore che nel passato, ragione per cui le considerazioni qui accennate vengono ad acquistare interesse anche per le eliche aeree.

Mutui influssi. — L'argomento dei mutui influssi riguarda principalmente l'influsso mutuo elica-carena (intendendo indicare con la parola « carena » la fusoliera o la gondola retrostante o antistante all'elica) e l'influsso mutuo elica-ala. Altri influssi pure non trascurabili sono quelli che l'elica esercita sugli impennaggi.

L'influsso è generalmente duplice: della carena (o dell'ala) sull'elica (*effetto di carena*), dell'elica sulla carena o sull'ala (*effetto d'elica*). Il primo conduce alla considerazione del funzionamento dell'elica in corrente non uniforme (anzi, a rigore, in corrente non parallela), argomento cui abbiamo sopra sommariamente accennato.

Il secondo esce dal campo della pura teoria dell'elica per entrare in un ordine di fenomeni assai complessi, che l'aerodinamica ha solo in parte chiarito.

Aumento di resistenza delle parti investite dal vento dell'elica (la cosiddetta « Strahlwiderstand » dei tedeschi), variazione di resistenza dovuta al gioco delle pressioni nel campo aerodinamico prodotto dall'elica (la cosiddetta « Sogwiderstand » dei tedeschi), variazione di portanza sull'ala dovuta al flusso dell'elica, modificazioni ai fenomeni di distacco sulle ali causate dal flusso dell'elica, dissimmetrie aerodinamiche sulle ali e sui piani di coda dovute alla rotazione della scia, nonchè fenomeni di distacco su dette superficie (ombra aerodinamica) in speciali circostanze: tali sono i

⁽¹⁾ Si trova pure:

$$k_Q = 2 \left\{ \int_0^1 x^2 \sqrt{\lambda^2 + x^2} \sin \beta - \lambda \int_0^1 x^2 \sqrt{\lambda^2 + x^2} \cos \beta + \right. \\ \left. + \frac{1}{4} \lambda - \lambda^2 \int_0^1 x^2 (\lambda^2 + x^2) \sin \beta \cos \beta dx \right\}.$$

fenomeni che ricadono in questo ordine di considerazioni. Nell'impossibilità di trattarne anche sommariamente, rimandiamo al cenno bibliografico posto alla fine della presente relazione, additando in particolare le interessanti considerazioni di BETZ e di HELMBOLD [I 2, 8], le quali mettono in luce l'influsso che tali fenomeni esercitano sul concetto stesso di *rendimento propulsivo* dell'elica.

26. — *Influsso delle alte velocità.*

Anche a piccole velocità di avanzamento la velocità periferica delle eliche aeree è generalmente molto elevata e si accosta alla velocità del suono.

Entrano allora in gioco i fenomeni di compressibilità, che si risolvono in un peggioramento delle qualità aerodinamiche dell'elica, perchè essi si manifestano sempre con un aumento della resistenza di profilo rispetto alla portanza.

Il fenomeno si accentua quando la velocità di avanzamento è forte, perchè questa si somma geometricamente con la velocità tangenziale, e può divenire preoccupante, come lo dimostrano gli studi abbastanza numerosi fioriti sull'argomento in questi ultimi anni, alcuni dei quali citati nella Bibliografia e fra i quali ci piace ricordare in modo particolare quelli del Cap. FERRI [L 14] e del Prof. LAZZARINO [L 13].

L'effetto della compressibilità è già sensibile quando la velocità periferica delle pale è $0,8 \div 0,9$ la velocità del suono; diventa grave quando la velocità del suono viene raggiunta o superata. Da ciò la necessità di tenere bassa la velocità periferica, evitando le alte velocità di rotazione, ciò che si ottiene demoltiplicando i motori e restringendo per quanto possibile i diametri. Questo secondo provvedimento di per sè sarebbe nocivo, portando ad un peggioramento del rendimento indotto; ma può diventare utile quando serva ad evitare la crisi della compressibilità e il conseguente abbassarsi dell'efficienza aerodinamica dei profili.

Naturalmente una diminuzione del numero dei giri porta ad un aumento del diametro, ma è facile persuadersi che il prodotto $R\Omega$ viene a diminuire ⁽¹⁾. Naturalmente non si può eccedere per questa via per evitare ingombri e pesi proibitivi e valori eccessivi della coppia di reazione.

(¹) Ciò può vedersi sommariamente osservando che nelle formule di similitudine delle eliche l' R compare ad una potenza superiore all' Ω .

Quanto alla riduzione del diametro, questa si ottiene aumentando il *grado di pieno*, il che, a sua volta, può ottenersi in due modi: aumentando la larghezza delle singole pale, aumentando il numero delle pale. Il secondo provvedimento è preferibile al primo, perchè migliora il rendimento indotto, avvicinandolo a quello dell'elica ad infinite pale ed evita pure le oscillazioni torsionali delle pale, facili a verificarsi quando queste sono larghe e sottili. Naturalmente l'aumento del numero delle pale pone problemi di progetto e costruttivi che non è qui il caso di considerare. Un miglioramento del rendimento indotto e del rendimento complessivo per eliche fortemente caricate può ottenersi, come il Prof. LAZZARINO ha dimostrato (loc. cit.) con l'uso di eliche controrotanti.

Infine un provvedimento che oggi da vari progettisti si prende in seria considerazione è quello di ripartire la potenza motrice di ciascun motore su più eliche, in guisa che ciascuna di queste risulti di diametro minore.

Dal punto di vista del calcolo aerodinamico, non si hanno cambiamenti essenziali finchè non si raggiunge in qualche punto delle pale la velocità del suono; giacchè, ragionando come si fa per l'ala di apertura finita in corrente compressibile ⁽¹⁾, si può osservare che le velocità assolute lasciate dall'elica sul suo passaggio sono generalmente piccole anche se la velocità di avanzamento dell'elica è forte, ragione per cui si possono usare immutate le formule di induzione scritte astraendo dai fenomeni di compressibilità. Bisognerà solo variare le caratteristiche aerodinamiche delle sezioni in base alle nozioni, teoriche e sperimentali, già acquisite per le ali (V. PISTOLESI, l. c.).

Le cose vanno diversamente se in qualche punto si raggiunge o si supera la velocità locale del suono. Si potrebbe in questo caso tentare di estendere all'elica le trattazioni di PRANDTL e di altri sulle ali finite, basate sul potenziale di accelerazione; ma le cose si presentano tremendamente complicate, non solo per la natura in sè molto più complessa del fenomeno, ma anche in quanto solo una parte della pala (la più esterna) sarà in regime supersonico, mentre la parte centrale sarà in regime subsonico ed una parte mediana sarà in regime di transizione. Tale fase, diciamo così, ambigua di funzionamento sarebbe superata se la velocità di avanzamento fosse essa medesima supersonica e forse la tratta-

(1) V. E. PISTOLESI, *La portanza alle alte velocità inferiori a quella del suono*, V° Convegno Volta, Roma 1935, p. 283 e segg.

zione teorica dell'elica totalmente supersonica potrebbe tentare qualche coraggioso ricercatore.

Dal punto di vista pratico si può ritenere che l'elica supersonica sarebbe disastrosa quanto a rendimento, anche ricorrendo a pale a lama di rasoio, disposizioni biplane ecc.; ed è molto probabile che in tali condizioni la propulsione a reazione si dimostrerebbe nettamente superiore.

L'argomento si connette così, traverso i fenomeni di compressibilità, a quello trattato da altri relatori ed il compito dello scrivente può ritenersi esaurito, sia pure con le molte lacune inevitabili in una relazione di questo genere.

SIMBOLI

R	= raggio dell'elica
D	= diametro dell'elica
V	= velocità di avanzamento
Ω	= velocità angolare di rotazione
r	= raggio di una sezione generica
x	= r/R
r_0	= raggio del mozzo
U	= $r\Omega$ = velocità tangenziale al raggio r
λ	= $\frac{V}{R\Omega}$ = rapporto di funzionamento
λ_r	= $\lambda_x = \frac{V}{r\Omega}$
μ	= $r\Omega V$
v	= incremento di velocità assiale al disco
v_i	= id. all'infinito
u	= $r\omega$ = incremento di velocità tangenziale al disco
u_i	= $r_i\omega_i$ = id. all'infinito
w	= incremento al disco risultante di u e v
w_i	= id. all'infinito
Γ	= circuitazione attorno alla pala
p	= numero delle pale
T	= spinta dell'elica
Q	= momento dell'elica
P	= $Q\Omega$ = potenza assortita dall'elica
η	= TV/P = rendimento propulsivo dell'elica
η_a	= rendimento assiale
η_p	= rendimento periferico
η_i	= $\eta_a \eta_p$ = rendimento indotto
W	= velocità relativa apparente di una sezione, risultante di V e di U
W'	= velocità relativa effettiva, risultante di W e di w

α	=	incidenza apparente di una sezione
α'	=	incidenza effettiva di una sezione
α_i	=	$\alpha - \alpha' =$ incidenza indotta
l	=	larghezza di pala
l'	=	larghezza ridotta $= \frac{l}{2\pi} \frac{dc_p}{d\alpha}$
c_p	=	coefficiente di portanza
c_r	=	coefficiente di resistenza
ε	=	$c_r/c_p =$ rapporto di resistenza
β	=	angolo di calettamento di una sezione
k_T	=	$T / \left(\frac{1}{2} \rho \pi R^4 \Omega^2 \right)$ coefficiente di spinta
k_Q	=	$Q / \left(\frac{1}{2} \rho \pi R^4 \Omega^2 \right)$ » » coppia
k_P	=	$P / \left(\frac{1}{2} \rho \pi R^4 \Omega^2 \right) = k_Q$ » » potenza
c_T	=	$T / \left(\frac{1}{2} \rho \pi R^2 V^2 \right)$ grado di spinta
c_Q	=	$Q / \left(\frac{1}{2} \rho \pi R^2 V^2 \right)$ » » coppia
c_P	=	$P / \left(\frac{1}{2} \rho \pi R^2 V^2 \right)$ » » potenza
Δ	=	allungamento.

BIBLIOGRAFIA ⁽¹⁾

L'aerodinamica dell'elica è trattata nelle seguenti opere:

- I. — PISTOLESI E., *Teoria delle eliche*, Torino, Perotti, 1922 (lit.) e *Complementi alla teoria delle eliche*. Torino, Perotti, 1923 (lit.).
- II. — GLAUERT H., *The Elements of Aerofoils and Airscrew Theory*. Cambridge, at the University Press, 1926.
- III. — ROY M., *L'aérodynamique des surfaces portantes et des hélices*. Paris, Gauthier Villars, 1928.
- IV. — JOUKOWSKY N., *Théorie tourbillonnaire de l'hélice propulsive*. Paris, Gauthier-Villars, 1929.
- V. — FLACHSBART O., *Luftschrauben*, in « Handbuch der Experimentalphysik », vol. IV, parte III, 1930.
- VI. — PISTOLESI E., *Aerodinamica* ⁽²⁾. Torino, UTET, 1932-X.
- VII. — GLAUERT H., *Airplane Propellers* in « Aerodynamic Theory », edita da W. F. DURAND, vol. IV, div. L, Berlin, Springer, 1935.
- VIII. — KONING C., *Influence of the Propellers on the other Parts of the Airplane Structure*, in « Aerodynamic Theory », c. s., vol. IV, div. M, 1935.
- IX. — WEINIG F., *Aerodynamik der Luftschraube*. Berlin, Springer, 1940.

⁽¹⁾ Non è questa una bibliografia completa sull'aerodinamica delle eliche aeree, ma l'elenco dei lavori citati o tenuti presenti nella compilazione di questa relazione.

⁽²⁾ Vedasi in quest'opera la bibliografia del capitolo VI (*La teoria aerodinamica dell'elica*).

Si vedano inoltre le seguenti pubblicazioni ⁽¹⁾:

A. *Impostazione generale della teoria* ⁽²⁾:

1. — RANKINE, *On the Mechanical Principles of Action of Propellers*. «Transaction of the Institution of Naval Architects», VI, 1865.
2. — CROCCO, *Sulla teoria analitica delle eliche e alcuni metodi sperimentali*. «Rendimenti dello Stabilimento di Costruzioni Aeronautiche», I, 1912; pubblicato nel volume: *Problemi Aeronautici*, Roma, Stock, 1931.
3. — FÖTTINGER, *Neue Grundlagen für die theoretische und experimentelle Behandlung des Propellerproblems*, «Jahrbuch d. schiffbautechn. Gesell.», XIX, 1918.
4. — BETZ, *Schraubenpropeller mit geringstem Energieverlust*, «Nachrichten d. K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen», 1919, ripubblicata in «Vier Abhandlungen zur Hydrodynamik und Aerodynamik», 1927.
5. — BETZ, *Eine Erweiterung der Schraubenstrahltheorie*, «Zeit. für Flugtechnik und Motorluftschiffahrt» (Z F M), 1920.
6. — PISTOLESI, *La teoria dei vortici in aerodinamica*, «L'Aeronautica», IV, 4, aprile 1921 e «Atti dell'Associazione Italiana di Aerotecnica», 1920-21.
7. — PISTOLESI, *Le equazioni differenziali del moto dei fluidi applicate al campo di velocità prodotto dall'elica*, «Rendic. R. Acc. Nazionale dei Lincei», X, 1-2, 1922.
8. — PISTOLESI, *I propulsori elicoidali e i recenti progressi dell'aerodinamica (Saggio di una teoria delle eliche)*, «Rendiconti dell'Istituto Sperimentale Aeronautico», X, serie 2^a, n. 3, 1922.
9. — GLAUERT, *An Aerodynamic Theory of the Airscrew*, «Aeronautical Research Committee» (A. R. C.), n. 786, 1922.
10. — PISTOLESI, *I più recenti progressi nello studio dei propulsori elicoidali*, «Atti dell'Associazione Italiana di Aerotecnica», III, n. 3, 1923.
11. — HELMBOLD, *Zur Aerodynamik der Treibschraube*, I e II. «Z. F. M.», 1924, fasc. 13, 14, 15, 16 (Aerot., 1925, p. 184).
12. — BIENEN, *Weiterer Beitrag zur Theorie der Luftschrauben*, «Zeit. d. V. D. I.», Bd. 69, n. 25, 1925 (Aerot. 1925, p. 320) corretto in *Die günstigste Schubverteilung für die Luftschraube bei berücksichtigung des Profilwiderstandes*, «Z. F. M.», 1926 (Aerot. 1926, p. 211).
13. — THOMA, *Grundsätzliches zur einfachen Strahltheorie*, «Z. F. M.», 1925 (Aerot. 1926, p. 146).
14. — PISTOLESI, *Un problema fondamentale per la teoria delle eliche*, «L'Aerotecnica», 1927, p. 227.

⁽¹⁾ Di molte delle pubblicazioni citate può trovarsi una recensione abbastanza estesa ne «L'Aerotecnica»; per comodità del lettore scriveremo in tal caso fra parentesi, dopo la sigla Aerot., l'annata e la pagina della rivista in cui trovasi la recensione.

⁽²⁾ La classificazione dei lavori citati, secondo l'argomento trattato, in gruppi, indicati con le lettere A, B, C ecc. è naturalmente approssimativa, giacchè molte delle pubblicazioni citate comprendono gli argomenti di più gruppi.

15. — ALEXANDROFF, *La théorie tourbillonnaire du prof. N. Joukowski et le calcul des hélices propulsives aériennes*, « Atti del IV Congresso di Navig. Aerea », Roma, 1927-V (Aerot. 1929, p. 335).
16. — KAWADA S., *On the Fundamental Principles of the Vortex Theory of Airscrew*, « Atti del IV Congresso Int. di Navig. Aerea », Roma, 1927-V (Aerot. 1929, p. 357).
17. — PISTOLESI, *Problemi di eliche*, « Atti del Congresso Annuale dell'A. I. D. A. », Torino, 1928 e « L'Aerotecnica », 1928, p. 737.
18. — FLACHSBART, *Theorie der Hubschraube*, « Z. F. M. », 1928 (Aerot. 1928, p. 638).
19. — ROY, *Contribution à la théorie de l'hélice propulsive*, « Travaux du Cercle d'Études Aérotechniques », III, 1929 (Aerot. 1930, p. 57).
20. — WEINIG, *Der Schraubenwirkungsgrad nach der Strahltheorie unter Berücksichtigung der axialen und tangentialen Austrittsverluste*, « Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik » (Z. A. M. M.), XI, aprile 1931 (Aerot. 1932, p. 570).
21. — BRARD, *Contribution à l'étude de l'hélice propulsive*, « La Science Aérienne », gennaio-febbraio 1933 (Aerot. 1933, p. 1220).

B. Il problema della minima perdita di energia.

1. — BETZ, *Schraubenpropeller mit geringstem Energieverlust*, con una aggiunta di L. PRANDTL, « Nachrichten d. K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen », 1919; ripubblicata in « Vier abhandlungen zur Hydrodynamik und Aerodynamik », Göttingen, 1927.
2. — GOLDSTEIN, *On the Vortex Theory of Screw Propellers*, « Proc. Royal Soc. », 123, 1929 (Aerot. 1929, p. 1030).
3. — KRAMER, *Induzierter Wirkungsgrad von Best-Luftschrauben endlicher Blattzahl*, « Luftfahrtforschung », Bd. 15, 7, 1938 (Aerot. 1939, p. 87).

C. Calcolo delle velocità indotte dal sistema vorticoso dell'elica.

1. — TROLLER, *Zur Wirbeltheorie der Luftschrauben*, « Z. A. M. M. », VIII, 6, 1928 (Aerot. 1929, p. 229).
2. — MORIYA, *On the Induced Velocity and Characteristics of Propellers*, « The Journal of the Faculty of Engineering, Tokyo Imperial University », vol. XX, n. 7, 1933 (Aerot. 1933, p. 1678).
3. — LOCK, *An Application of Prandtl Theory to an Airscrew*, « A. R. C. », n. 1521 (Aerot. 1935, p. 525).
4. — MORIYA, *Calculation Charts of Induced Velocity and Calculation Method of Aerodynamic Characteristics of Propellers*, « The Journal of the Society of Aeronautical Science of Nippon », vol. 3°, n. 9, gennaio 1936 (Aerot. 1936, p. 548).
5. — KAWADA, *Induced Velocity by Helical Vortices*, « Journal of the Aeron. Sciences », vol. 3°, n. 3, gennaio 1936 (Aerot. 1936, p. 675).
6. — REISSNER, *On the Vortex Theory of the Screw Propellers*, « Journal of the Aeron. Sciences », vol. 5°, n. 1, novembre 1937 (Aerot. 1938, p. 1158).
7. — KAWADA, *Calculation of Induced Velocity by Helical Vortices and Its Application to Propeller Theory*, « Rapporti dell'Istituto di ricerche aeronautiche dell'Università Imperiale di Tokyo », n. 172, gennaio 1939 (Aerot. 1940, p. 60).

D. Metodi di calcolo aerodinamico delle eliche.

1. — PISTOLESI, *Nuovi indirizzi e sviluppi della teoria delle eliche*, « Atti dell'Associazione Italiana di Aerotecnica », II, 3, 1922. Pubblicata anche in tedesco, col titolo: *Neue Ansätze und Ausführungen zur Theory der Luftschrauben* in « Vorträge aus dem Gebiete der Hydro- und Aerodynamik », Innsbruck, 1922, Berlin, Springer, 1924.
2. — PISTOLESI, *Una teoria semplificata per lo studio delle eliche*, « Rendiconti dell'Istituto Sperimentale Aeronautico », XI, serie 2^a, 1, 1923.
3. — PISTOLESI, *Metodi grafici per il calcolo delle eliche*, « Rendiconti Tecnici della Direzione Superiore del Genio e delle Costruzioni Aeronautiche », n. 3, 1923.
4. — BIENEN & KÁRMÁN, *Zur Theorie der Luftschrauben*, « Z. d. V. D. I. », 48, 1924 (Aerot. 1925, p. 69).
5. — GLAUERT, *The Efficiency of an Airscrew*, « A. R. C. », n. 1034, maggio 1926 (Aerot. 1927, p. 42).
6. — GLAUERT, *The Accuracy of the Vortex Theory of Airscrew in the Light of recent Experimental Work and its Application to Airscrew Design*, « A. R. C. », n. 1040, giugno 1926 (Aerot. 1927, p. 44).
7. — BIENEN, *Die rechnerische Ermittlung der Schubverteilung und des Wirkungsgrades für ausgeführte Luftschrauben bei beliebigen Betriebszuständen*, « Z. F. M. », novembre 1926 (Aerot. 1927, p. 112).
8. — GABRIELLI, *Un metodo approssimato per il progetto delle eliche aeree*, « L'Aerotecnica », 1927, p. 769.
9. — COSCI, *Calcolo delle caratteristiche funzionali dell'elica basato sulla considerazione dell'incidenza effettiva*, « Atti del IV Congresso di Navig. Aerea », Roma, 1927-V (Aerot. 1929, p. 354).
10. — MASTROMATTEO, *Sull'applicazione del metodo dell'allungamento virtuale alla determinazione delle caratteristiche del propulsore*, « Atti del IV Congresso Int. di Navig. Aerea », Roma, 1927-V (Aerot. 1929, p. 357).
11. — ZEZI, *Calcolo delle eliche*, « Notiziario Tecnico di Aeronautica » del Ministero dell'Aeronautica, N. 11, nov. 1928.
12. — SILLA & TEOFILATO, *Determinazione di una famiglia di eliche di grande rendimento*, « Notiziario Tecnico di Aeronautica » del Ministero dell'Aeronautica, N. 1, genn. 1929.
13. — TROLLER, *Die Konstruktion der Propellerpolaren*, « Z. F. M. », 1929, (Aerot. 1929, p. 657).
14. — KOUZMIN, *Studio sulle caratteristiche delle eliche*, « Rend. dell'Istituto Centrale Aereo-idrodinamico di Mosca », n. 45, 1930 (Aerot. 1931, p. 218).
15. — DE CARIA, *Un nuovo metodo per il calcolo aerodinamico delle eliche*, « Aeronautica », n. 3, 1930 (Aerot. 1931, p. 356) ⁽¹⁾.
16. — GLAUERT, *Airscrew for High Speed Aeroplanes*, « Rend. del 3° Congresso Int. di Meccanica Applicata », Stockholm, 1930 (Aerot. 1932, p. 253).
17. — PANETTI, *Calcolo dei parametri del diagramma delle coppie resistenti di un'elica e relazione fra le sue velocità progressive e di rotazione per coppia motrice costante*, « Atti R. Acc. delle Scienze di Torino », 1930-31 (Aerot. 1932, p. 1078).

(¹) Vedasi ne « L'Aerotecnica » al luogo citato brevi recensioni di altri articoli di DE CARIA sul calcolo delle eliche.

18. — GLAUERT, *Air screws for High Speed Aeroplanes*, « A. R. C. », 1342, 1931 (Aerot. 1931, p. 1455).
19. — SEIFERTH, *Berechnung von Luftschrauben und Vergleich mit Versuchsergebnissen*, « Z. F. M. », 1931 (Aerot. 1932, p. 65).
20. — TROLLER, *Aerodynamische Theorie und Entwurf von Luftschrauben*, « Abhandlungen aus dem Aerodyn. Inst. an der Technischen Hochschule Aachen », Heft 11, 1932 (Aerot. 1933, p. 228).
21. — LOCK, *The Application of Goldstein's Theory to the Practical Design of Air screws*, « A. R. C. », 1377 (Aerot. 1932, p. 1530).
22. — HELMBOLD, *Ansätze zur Berechnung von Verstellluftschrauben*, « Z. F. M. », 14, 1932 (Aerot. 1933, p. 441).
23. — HELMBOLD, *Systematische Versuche an Verstellschrauben*, « Luftfahrtforschung », 1, 1935 (Aerot. 1936, p. 225).
24. — LOCK & YEATMAN, *Tables for Use in an Improved Method for Airscrew Strip Theory Calculation*, « A. R. C. », n. 1674 (Aerot. 1936, p. 386).
25. — LOCK, *A Graphical Method of Calculating the Performance of an Airscrew*, « A. R. C. », n. 1675 (Aerot. 1937, p. 144).
26. — WALCHNER, *Berechnung von Luftschrauben mit kleinem Schubbeiwert und kleinem Fortschrittgrad (Hubschrauben)*, « Luftfahrtforschung », Bd. 13, n. 4, 1936 (Aerot. 1936, p. 675).
27. — VON DOEPP, *Luftschraubenrechnungen nach dem Verfahren der gleichwertigen Tragflügel-Polare*, « Luftfahrtforschung », Bd. 13, n. 2, 1936 (Aerot. 1936, p. 676).
28. — BRÉGUET & DÉVILLERS, *Les hélice de sustentation sans translation*, « La Science Aérienne », n. 5-6, 1937 (Aerot. 1938, p. 1158).
29. — THOMAS, CALDWELL & RHINES, *Practical Airscrew Performance Calculations*, « The Journal of the Royal Aeronautical Society », gennaio 1938 (Aerot. 1938, p. 1270).
30. — THOMAS, *Aerodynamics of the Airscrew*, « Aircraft Engineering » aprile 1938 (Aerot. 1939, p. 90).
31. — DIRCHENS, *Systematische Windkanalmessungen an einer Modell-Luftschrauben - Serie*, « Abhandlungen aus dem Aerodyn. Inst. an der Techn. Hochschule Aachen », Heft. 16, 1938 (Aerot. 1939, p. 454).
32. — HARTMAN & BIERMANN, *The Aerodynamic Characteristics of Four Full-Scale Propellers Having Different Plan Forms*, « National Advisory Committee for Aeronautics » (N. A. C. A.), Techn. Rep. n. 643 (Aerot. 1939, p. 455).
33. — DRIGGS, *Simplified Propeller Calculations*, « Journ. of Aeron. Sciences », luglio 1938 (Aerot. 1939, p. 704).
34. — MORIYA, *Formulae for Propeller Characteristics Calculation and a Method to Obtain the Best Pitch Distribution*, « Proc. V. Int. Congress for Appl. Mechanics », 1939 (Aerot. 1940, p. 875).

E. L'elica fortemente caricata.

1. — BETZ & HELMBOLD, *Zur Theorie starkbelasteter Schraubenpropeller*, « Ingenieur-Archiv », 1932 (Aerot. 1933, p. 945).
2. — HELMBOLD, *Ueber den Einfluss der Strahlkontraktion auf die Wirkungsweise breitflügeliger Schraubenpropeller (Schiffschrauben)*, « Werft-Reederei-Hafen », 1933 (Aerot. 1934, p. 199).

3. — LÖSCH F., *Ueber die Berechnung des induzierten Wirkungsgrad stark belasteter Luftschrauben unendlicher Blattzahl*. « Luftfahrtforschung », Bd. 15, 7, 1938 (Aerot. 1939, p. 87).

F. L'elica in corrente non uniforme e in corrente obliqua.

1. — PISTOLESI, *Influsso di un vento laterale sul funzionamento delle eliche*, « L'Aerotecnica », 1925, p. 93.
2. — GLAUERT, *A General Theory of Autogyro*, « A. R. C. », n. 1111, 1926.
3. — PISTOLESI, *Contributo allo studio dell'elica in un vento laterale*, « Atti del IV Congresso Intern. di Navig. Aerea », Roma, 1927-V e « L'Aerotecnica », 1927, p. 622.
4. — FERRARI, *Sul problema dell'elica con vento laterale*, « L'Aerotecnica », 1928, p. 171.
5. — PISTOLESI, *Nuove considerazioni sul problema dell'elica in un vento laterale*, « L'Aerotecnica », 1928, p. 177.
6. — PETERSOHN, *Ueber den Einfluss ungleichförmiger Zuströmung bei Schraubenpropellern*, « Werft-Reederei-Hafen », VIII, 10, 1928 (Aerot. 1928, p. 635).
7. — TROLLER, *Zur Berücksichtigung des Rumpfes beim Luftschraubenentwurf*, « Z. F. M. », 1928 (Aerot. 1929, p. 150).
8. — FLACHSBART & KRÖBER, *Experimentelle Untersuchungen an schrag angeblasenen Schraubenpropellern*, « Z. F. M. », 1929, p. 605 (Aerot. 1930, p. 314).
9. — PISTOLESI, *Il funzionamento dell'elica in un vento non uniforme*, « L'Aerotecnica », 1929, p. 863.
10. — BONDER, *Quelques remarque concernant les essais de l'hélice propulsive installée obliquement dans un courant d'air*, « Travaux de l'Institut Aérodynamique de Varsovie », fasc. 3, 1930 (Aerot. 1933, p. 224).
11. — HELMBOLD, *Beitrag zur Theorie der Nachstromschrauben*, « Ingenieur-Archiv », 1931, p. 277 (Aerot. 1932, p. 256).
12. — MISZTAL, *Zur Frage der schrag angeblasene Propeller*, « Abhandl. aus dem Aerodyn. Institut an der Technischen Hochschule Aachen », Heft 11, 1932 (Aerot. 1933, p. 226).
13. — LESLEY, WORLEY & MOY, *Air Propellers in Yaw*, « N. A. C. A. », Rep. n. 597 (Aerot. 1938, p. 739).
14. — WEINIG, *Die schräg angeblasene Luftschraube*, « Gesammelte Vorträge der Hauptversammlung 1937 der Lilienthal Gesell. für Luftfahrtforschung » (Aerot. 1938, p. 1016).
15. — KLINGEMANN & WEINIG, *Die Kräfte und Momente der Luftschraube bei Schräganblasung und Flugzeugdrehung*, « Luftfahrtforschung », Bd. 15, 4, 1938 (Aerot. 1939, p. 86).
16. — FERRARI, *Il problema dell'elica con vento laterale*, « Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino », vol. 75, 1939-40 (Aerot. 1941, p. 61).

G. Eliche in tandem e controeliche.

1. — GABRIELLI, *Un metodo' approssimato per l'adattamento dell'elica posteriore di un sistema in tandem*, « L'Aerotecnica », 1927, p. 575.
2. — GRANDINETTI, *L'installazione delle eliche in tandem negli aeroplani bimotori e rendimento del gruppo*, « Ingegneria », maggio 1927 (Aerot. 1927, p. 374).

3. — FERRARI, *Considerazioni sulle controeliche*, « L'Aerotecnica », 1927, p. 733.
4. — GUGLIELMETTI, *Studio sull'applicazione delle controeliche sugli aerei*, « Rendiconti Tecnici della Direzione del Genio Aeronautico », giugno 1927 (Aerot. 1927, p. 529).
5. — LESLEY, *Experiments with a Counter-Propeller*, « N. A. C. A. », Techn. Note n. 453 (Aerot. 1933, p. 1508).
6. — PANETTI, *Sul rendimento delle eliche in tandem*, « L'Aerotecnica », 1934, p. 1365.
7. — BETZ, *Zur Theorie der Leitapparate für Propeller*, « Ingenieur-Archiv », Bd. IX, dic. 1938 (Aerot. 1939, p. 807).
8. — BOCK & NIKODEMUS, *Die Aussichten der Luftschraubenantriebes für hohe Fluggeschwindigkeit*, « Luftfahrtforschung », Bd. 15, 7, luglio 1938 (Aerot. 1939, p. 88).
9. — PANETTI, *Problemi della Meccanica del volo*, « VI Convegno nazionale di Aerotecnica », maggio 1940.

H. Eliche intubate.

1. — PISTOLESI, *Il problema dell'elica intubata e le sue applicazioni*, « Atti dell'Associazione Italiana di Aerotecnica », IV, 4, 1924.
2. — PISTOLESI, *Considerazioni sul funzionamento dell'elica con tubo addizionale*, « L'Aerotecnica », 1931, p. 419.
3. — FERRARI, *Sul calcolo del ventilatore elicoidale intubato*, « L'Aerotecnica », 1933, p. 525.
4. — PISTOLESI, *Sul calcolo di schiere infinite di ali sottili*, « L'Aerotecnica », 1936, p. 484.
5. — TONIOLO, *Sul calcolo del ventilatore elicoidale intubato*, « L'Aerotecnica », 1936, p. 736.
6. — PISTOLESI & TONIOLO, *Sul calcolo pratico delle schiere alari*, « L'Aerotecnica », 1938, p. 1065.
7. — BÜCHI, *Esperienze sul mantello d'elica*, « L'Ingegnere », n. 7, 15 luglio 1939-XVIII (Aerot. 1941, p. 394).

I. Mutui influssi.

1. — SEIFERTH, *Die gegenseitige Beeinflussung zwischen Tragflügel und Propeller*, « Z. F. M. », 1926 (Aerot. 1927, p. 443).
2. — BETZ, *Der Wirkungsgradbegriff beim Propeller*, « Z. F. M. », 1928 (Aerot. 1928, p. 637).
3. — LOCK, *Analysis of Experiments on an Airscrew in Various Positions within the Nose of a Tractor Body*, « A. R. C. », n. 1120 (Aerot. 1929, p. 1032).
4. — LOCK, *The Effect of Body Interference on the Efficiency of an Airscrew*, « A. R. C. », n. 1238 (Aerot., ibid.).
5. — LOCK, *The Application of the Theoretical Velocity Field round a Spheroid to calculate the Performance of an Airscrew near the Nose of a Streamline Body*, « A. R. C. », n. 1239 (Aerot., ibid.).
6. — WEINIG, *Der Einfluss des Flugwerks auf den Vortriebswirkungsgrad der Luftschraube*, « Z. F. M. », 1930, p. 196 (Aerot. 1930, p. 639).
7. — WIESELSBERGER, *Die Wirkung einer Luftschraube auf eine Wand*, « Abhandl. aus dem Aerodyn. Institut, Aachen », Heft 10 (1931) (Aerot. 1934, p. 317).

8. — HELMBOLD, *Ueber die Wechselwirkung zwischen Luftschraube und Flugzeug*. « Rend. 5° Congresso Int. di Navig. Aerea », Roma, 1930 (Aerot. 1932, p. 225).
9. — BATEMANN & JOHANSEN, *Pressure and Force Measurements on Airscrew-Body Combinations*, « A. R. C. », 1380 (Aerot. 1932, p. 1263).
10. — LOCK & BATEMANN, *Interference between Bodies and Airscrew*, « A. R. C. », n. 1335 (Aerot. 1932, p. 1532).
11. — HELMBOLD, *Bemerkungen zum Problem der Wechselwirkung zwischen Schiffschraube und Schiffskörper*, « Hydromechanische Probleme des Schiffsantriebs », Hamburg, 1932 (Aerot. 1934, p. 201).
12. — FERRARI, *Sull'influenza dell'elica sulle caratteristiche aerodinamiche dell'ala*, « L'Aerotecnica », 1933, p. 989.
13. — LOCK, *Theory of Airscrew-Body Inteference*, « A. R. C. », n. 1378 (Aerot. 1933, p. 225).
14. — EGOROFF, *Influsso di un'ala spessa sulle caratteristiche di un'elica* (in russo), « Rendiconti dell'Istituto Centrale Aero-idrodinamico di Mosca », n. 134 (Aerot. 1933, p. 622).
15. — OWER, WARDEN & JONES, *The Effect of a Tractor Airscrew on Body-Wing Interference*, « A. R. C. », n. 1512 (Aerot. 1933, p. 1676).
16. — STAFFORD, *The Propulsive Efficiency of an Airscrew*, « Aircraft Engineering », 30 marzo 1933 (Aerot. 1934, p. 1468).
17. — JOHANSEN, *Improvement of Airscrew-Body Performance by Radial Vanes*, « A. R. C. », n. 1495 (Aerot. 1934, p. 83).
18. — WIESELSBERGER, *Beitrag zur gegenseitig Beeinflussung von Flügel und Luftschraube*, « Abhandl. aus dem Aerodyn. Institut, Aachen », Heft 13 (1933), (Aerot. 1934, p. 317).
19. — WOOD & BIOLETTI, *Tests of Nacelle-Propeller Combinations in Various Positions with Reference to Wings*, « N. A. C. A. », Rep. 507 (Aerot. 1936, p. 380) ⁽¹⁾.
20. — WINDLER, *Tests of a Wing-Nacelle-Propeller Combination at Several Pitch Settings up to 42°*, « N. A. C. A. », Rep. 564 (Aerot. 1937, p. 1080).
21. — BETZ, *Die Hubschraube in Bodennähe*, « Z. A. M. M. », Bd. 17, n. 2, 1937 (Aerot. 1938, p. 738).
22. — STÜPER, *Einfluss des Schraubenstrahls auf Flügel und Leitwerk*, « Luftfahrtforschung », 1938 (Aerot. 1938, p. 1002).
23. — SMELT & DAVIES, *Estimation of Increase in Lift due to Stipstream*, « A. R. C. », 1788 (Aerot. 1938, p. 1149).
24. — DAVIES & CALLEN, *Wind Tunnel Tests on the Effect of Extreme Slipstream on Single and Twin-Engined Monoplânes with Split or Slotted Flaps*, « A. R. C. », 1797 (Aerot. 1938, p. 1002).
25. — FRANKE & WEINIG, *Tragflügel und Schraubenstrahl*, « Luftfahrtforschung », Bd. 15, n. 5, 1938 (Aerot. 1938, p. 1396).
26. — DICKMANN, *Schiffskörpersog, Wellenwiderstand eines Propellers und Wechselwirkung mit Schiffswellen*, « Ingenieur-Archiv », Bd. IX, 1938, p. 452 (Aerot. 1939, p. 808).
27. — KAMPÉ DE FÉRIET & FAUQUET, *Influence du souffle d'une hélice sur les caractéristiques aérodynamiques d'une maquette motorisée*, « Groupement

(¹) In questo Report si trovano i riferimenti a molti altri che lo precedono sullo stesso argomento.

- francais pour le développement des recherches aéronautiques», Notes Techniques N. 2.e N. 4 (Aerot. 1939, p. 1097).
28. — BIERMANN & HARTMANN, *Tests of Five Full-Scale Propellers in the Presence of a Radial and a Liquid-Cooled Engine Nacelle. Including Tests of Two Spinners*, « N. A. C. A. », n. 642 (Aerot. 1939, p. 1109).
 29. — MC COY, *A Discussion of Propeller Efficiency*, « Journ. Of the Aer. Sciences », aprile 1939 (Aerot. 1940, p. 136).
 30. — PIVKO, *Contribution à l'étude de l'hélice dans le domain du point fixe et de son interaction avec l'aile sustentatrice*, « Publ. Scientifiques et Techniques du Ministère de l'Air », n. 134 (Aerot. 1940, p. 326).
 31. — FLUGGE-LOTZ & SOLF, *Strömungsaufnahmen eines durch einen Tragflügel gestörten Schraubenstrahl*, « Luftfahrtforschung », Bd. 17, n. 6, 1940 (Aerot. 1941, p. 394).
 32. — MILLIKAN, *The Influence of Running Propellers on Airplane Characteristics*, « Journ. Aer. Sc. », vol. 7° n. 3, gennaio 1940 (Aerot. 1941, p. 487).

L. Influsso della compressibilità per alte velocità periferiche.

1. — JENNINGS, *Full Scale Determination of the Effect of High Tip Speeds on the Performance of an Airscrew*, « A. R. C. », n. 1173 (1928) (Aerot. 1929, p. 657).
2. — WEINIG, *Das Verhalten der Kennziffern von Holzluftschrauben bei Umfangsgeschwindigkeit bis 280 m/s*, « Z. A. M. M. », 1930 (Aerot. 1931, p. 460).
3. — DOUGLAS, *Notes on the Effect of High Tip Speed on Airscrew Performance*, « Vorträge aus dem Gebiete der Aerodynamik und verwandter Gebiete », Aachen 1929 (Aerot. 1931, p. 462).
4. — WOOD, *Full Scale Tests of Metal Propellers at High Tip Speeds*, « N. A. C. A. », Rep. 375 (1931), (Aerot. 1931, p. 1457).
5. — HARTSHORN & DOUGLAS, *Scale Effect on High Tip Speed Airscrews*, « A. R. C. », n. 1417 (Aerot. 1932, p. 920).
6. — HARTSHORN & DOUGLAS, *Wind Tunnel Experiments on High Tip Speed Airscrews*, « A. R. C. », n. 1438 (Aerot. 1932, p. 1079).
7. — EGOROFF, *Caratteristiche di eliche ad alta velocità periferica* (in russo), « Rendiconti dell'Istituto Centrale Aero-idrodinamico di Mosca », n. 158 (Aerot. 1934, p. 604).
8. — DOUGLAS, *Research on model airscrew at high speed*, « Convegno di Scienze fisiche, Mat. e Naturali » (V Conv. Volta, 1935), R. Acc. d'Italia, 1936-XIV.
9. — WEINIG, *Luftschrauben für schnelle Flugzeuge*, « Luftfahrtforschung », Bd. 14, n. 4-5, 1937 (Aerot. 1937, p. 789).
10. — WEINIG, *Luftschrauben für schnelle Flugzeuge*, « Jahrbuch 1937 d. D. Luftfahrtforschung » (Aerot. 1939, p. 88).
11. — BETZ, *Luftschrauben für grosse Fluggeschwindigkeit*, « Jahrbuch 1937 d. D. Luftfahrtforschung » (Aerot. 1939, p. 89).
12. — BIERMANN & HARTMANN, *The Effect of Compressibility on Eight Full-Scale Propellers Operating in the Take-Off and Climbing Range*, « N. A. C. A. », Rep. 639 (Aerot. 1939, p. 1108).
13. — LAZZARINO, *Studio sulle eliche per aeroplani veloci*, « L'Aerotecnica », 1939, p. 760.
14. — FERRI, *Considerazioni sulla progettazione di eliche per aeroplani veloci*, « Atti di Guidonia », n. 21 (Aerot. 1940, p. 785).

CARLO FERRARI

**L'influenza della larghezza finita della pala
sulle caratteristiche aerodinamiche delle eliche.
Risultati sperimentali e teorici.**

Riassunto. — L'A. dall'esame dei risultati sperimentali relativi ad eliche aeree e navali deduce che l'influenza della larghezza delle pale sulle caratteristiche aerodinamiche dell'elica si esplica in modo del tutto analogo a quello corrispondente all'ala: egli ricava di fatto che il diagramma dei coefficienti di portanza e quello dei coefficienti di resistenza in funzione della incidenza per allungamento infinito del profilo dell'elica, ricavati col metodo della « striscia » secondo il procedimento di Lock, hanno la medesima forma e anche prossimamente i medesimi valori dei diagrammi delle stesse caratteristiche per allungamento infinito ricavati dalle prove su modelli di ala di piccolo allungamento.

L'A. compie poi lo studio teorico dello stesso problema servendosi del metodo del potenziale delle accelerazioni secondo la forma usata da Kàrmán-Burgers, e ricava un'equazione integro-differenziale che definisce la legge di distribuzione della vorticità aderente sulle pale d'elica, e che può considerarsi come una estensione dell'analoga equazione di Prandtl per l'ala di piccola larghezza. Indica quindi come si debba procedere per risolvere la predetta equazione e come essa possa essere applicata anche per risolvere il problema diretto di determinare l'elica di dato raggio e che per un dato rapporto di funzionamento sviluppa una data propulsione. L'A. mostra poi come, risolta l'equazione integro-differenziale, il calcolo dei coefficienti di trazione e di coppia sia immediato, e fa vedere che, se si fa tendere a zero la larghezza della pala, si ottengono i risultati noti, secondo le teorie di Prandtl e di Sandi-Kawada.

PREMESSE

1. — Il carattere geometrico più evidente che differenzia le eliche marine da quelle aeree è senza dubbio la notevole diversità del valore della larghezza relativa $\frac{l}{R}$ delle pale: basti pensare che mentre per le eliche aeree, assumendo come profilo base di riferimento quello disposto ad una distanza relativa dall'asse del propulsore $\frac{r}{R} = 0,7$, si ha $\frac{l}{R} = 0,125$ (per la serie normale americana), od anche $\frac{l}{R} = 0,15$ (per la serie normale inglese), per quelle marine $\frac{l}{R}$ varia normalmente da 0,5 a 0,6, potendo anche, in qualche caso, assumere valori superiori all'unità.

Questa differenza tende ad attenuarsi col crescere della velocità di volo degli aerei, e quindi coll'avvicinarsi del valore della velocità risultante relativa ai profili delle pale alla velocità del suono: di fatto, il vincolo di non superare in nessun punto la velocità del suono, per non dar luogo a formazioni di *onde d'urto*, che determinerebbero un notevole peggioramento delle caratteristiche aerodinamiche, porta ad una limitazione dell'angolo di incidenza dei profili stessi e del raggio analoga a quella che nelle eliche marine è imposta dalla necessità di evitare il fenomeno della *cavitazione*, e quindi rende necessario aumentare sempre più la larghezza delle pale per ottenere una data propulsione. Un notevole esempio di questa tendenza è mostrato dalle eliche per idrovolanti veloci studiate dagli inglesi per la Coppa Schneider 1931, nelle quali le pale avevano una larghezza relativa uguale a 0,22 in un tipo, e uguale a 0,30 in un secondo tipo.

Uno studio, pertanto, diretto ad indagare la influenza che la larghezza finita delle pale ha sulle caratteristiche aerodinamiche dell'elica, presenta un interesse immediato per la tecnica navale, mentre dà indicazioni utili in un prossimo futuro anche per quella aeronautica: è di fatto legittimo il sospetto che la teoria dell'elica basata sulla sostituzione di ogni pala non con una superficie vorticosa equivalente, bensì con un vortice singolo, se ha potuto portare a risultati utilissimi ed in ottimo accordo coi risultati sperimentali, sia per quanto si riferisce ai valori assoluti dei coefficienti di coppia e di spinta, sia per quanto ha riguardo alla deter-

minazione del propulsore di migliore rendimento, quando le pale sono molto strette a fronte della loro lunghezza, non possa essere senz'altro applicabile nel caso in cui la larghezza relativa assume

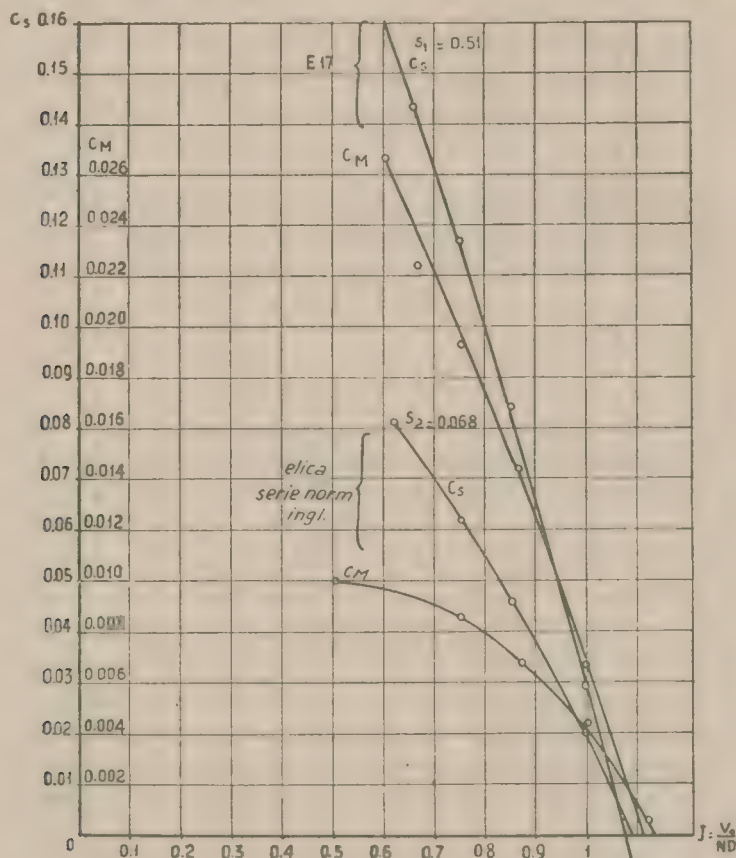


Fig. 1a.

valori dell'ordine di grandezza di quelli sopra indicati. Si considerino ad es. i diagrammi di figg. 1a e 1b ⁽¹⁾, nei quali sono date per le due eliche, le cui caratteristiche geometriche sono riportate nella figura 1b, le leggi di variazione con il coefficiente $J = \frac{V_0}{ND}$ dei coefficienti di spinta c_s e di coppia c_m definiti, come è uso in

(1) I diagrammi sono stati ricavati dai risultati sperimentali indicati rispettivamente in *Wind Tunnel Tests of high Pitch Airscrews*, Report and Memoranda N. 1673 dei « Technical Report of the Aer. Res. Comm. » e « Annali della Vasca Nazionale per le esperienze di Architettura Navale in Roma », vol. 1º.

Marina, dalle relazioni $c_s = \frac{T}{\rho N^2 D^4}$; $c_m = \frac{M}{\rho N^2 D^5}$, essendo V_0 la velocità di avanzo del propulsore, N il numero dei giri al secondo di questo, D il suo diametro, ρ la densità del fluido, mentre T e M sono rispettivamente la trazione sviluppata ed il momento

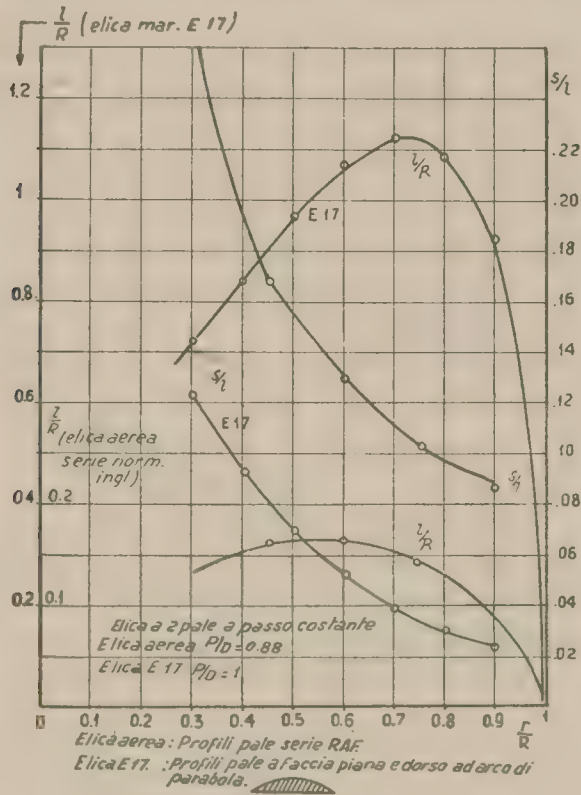


Fig. 1b.

assorbito. Una delle due eliche ha una larghezza relativa $\frac{l}{R} = 0,15$ ed appartiene alla serie normale inglese; essa ha passo geometrico p costante, un valore del rapporto $\frac{p}{D} = 0,88$, ed una solidità $s_1 = \frac{ml/R}{2\pi \cdot 0,7} = 0,068$ (essendo m il numero delle pale, mentre $\frac{l}{R}$ è sempre la larghezza relativa della sezione di riferimento corrispondente a $\frac{r}{R} = 0,7$). L'altra elica, che nei Rendiconti della

Vasca Nazionale di Roma è contrassegnata colla sigla *E 17*, ha passo geometrico pure costante, un valore del rapporto $\frac{p}{D} = 1$, ed una solidità $s_2 = 0,51$. Poichè l'angolo di portanza nulla del profilo a $0,7 R$ per la *E 17* è uguale a $-2^\circ 30'$, mentre quello dell'elica aerea è di $-4^\circ 30'$, ai sopradetti valori differenti di $\frac{p}{D}$ corrisponde lo stesso valore del passo aerodinamico, e di fatto sia i diagrammi dei c_s , sia quello dei c_m per le due eliche intersecano l'asse delle ascisse per il medesimo valore di J . Ora si riconosce dai diagrammi della fig. 1a, che per un valore di $J = 0,85$, corrispondente all'incirca al massimo rendimento in entrambi i casi, pure essendo il rapporto delle solidità $\sigma = \frac{s_2}{s_1} = 7,5$ il rapporto dei coefficienti di spinta è appena 1,82, mentre quello dei coefficienti c_m è 2,1. La differenza di questi valori da quello di σ appare troppo grande, perchè possa essere dovuto soltanto a un effetto di induzione.

RISULTATI SPERIMENTALI

2. — Il risultato sopra indicato induce ad analizzare con maggiore cura i diagrammi sperimentali delle caratteristiche aerodinamiche delle eliche aeree e navali per scoprire la natura dell'effetto che la larghezza relativa grande delle pale ha sulle caratteristiche stesse. A questa analisi si presta molto bene il metodo proposto da C. H. Lock ⁽¹⁾, che è in sostanza una semplificazione giustificata del normale metodo della « striscia » di determinazione delle caratteristiche aerodinamiche di una elica, nel quale si tiene anche conto del numero finito delle pale. Questo metodo permette di ricavare dai valori sperimentali dei coefficienti c_s e c_m i diagrammi dei coefficienti di portanza c_p e di resistenza c_r , per allungamento infinito, in funzione dell'incidenza, del profilo della sezione rappresentativa dell'elica. Rimando alla pubblicazione originale per la spiegazione del procedimento; importa ora mettere in evidenza il risultato che è rappresentato dai diagrammi delle figure 2, 3, 4.

⁽¹⁾ C. N. H. LOCK, *A graphical method of calculating the performance of an airscrew*, Report and Memoranda N. 1675 dei « Tech. Rep. Aer. Res. Comm. ».

Nella figura 2 sono riportati i diagrammi dei coefficienti di portanza c_p e di resistenza c_r in funzione dell'incidenza, ottenuti col procedimento sopradetto dai risultati sperimentali relativi ad una famiglia di eliche a due pale della Serie normale inglese, e sono messi a raffronto i diagrammi stessi con quelli che danno le medesime caratteristiche per il medesimo profilo ottenute dagli

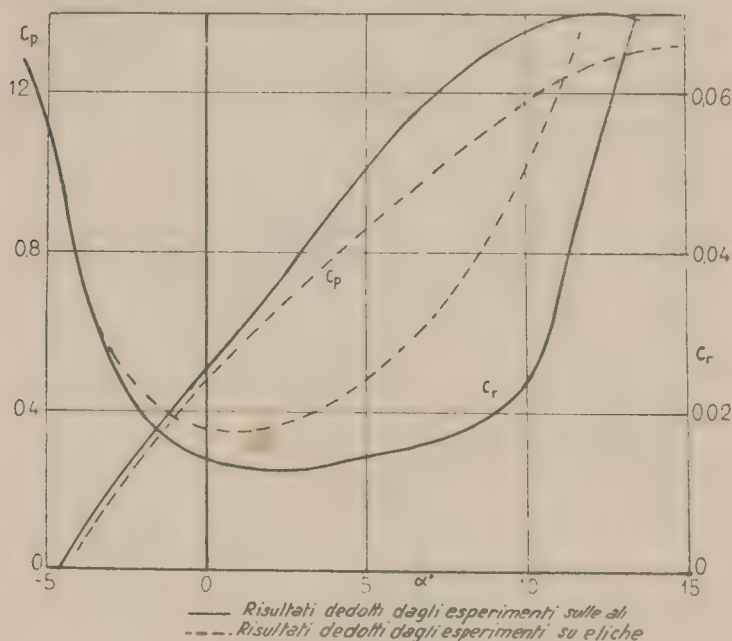


Fig. 2.

esperimenti fatti sopra un modello di ala e corrette colle formole di Prandtl per ridurle ai valori corrispondenti all'allungamento infinito. La concordanza è buona, tenuto conto dell'ordine di approssimazione del procedimento, ed è un indice dell'elevato grado di esattezza dell'ordinaria teoria dell'elica; in particolare, il coefficiente angolare di portanza per il tratto rettilineo dei diagrammi dei c_p nei due casi ha il medesimo valore $\lambda'_{p\infty} = \left(\frac{dc_p}{d\alpha} \right)_{\lambda=\infty} = 5,75$; così pure risulta quasi identico l'angolo di portanza nulla (uguale a $-4^\circ 30'$), mentre il coefficiente di resistenza minimo, quale risulta dagli esperimenti sopra l'elica, è appena un poco maggiore del valore che si ricava dagli esperimenti sopra l'ala avente il medesimo profilo:

$$\begin{aligned} (c_{r_{\min}}) &= 0,0168 \text{ per l'elica} \\ &= 0,0130 \text{ per l'ala.} \end{aligned}$$

Nelle figg. 3a e 3b è ripetuta la medesima ricerca per un'altra serie di eliche aeree comprendente anche quella della Coppa Schneider

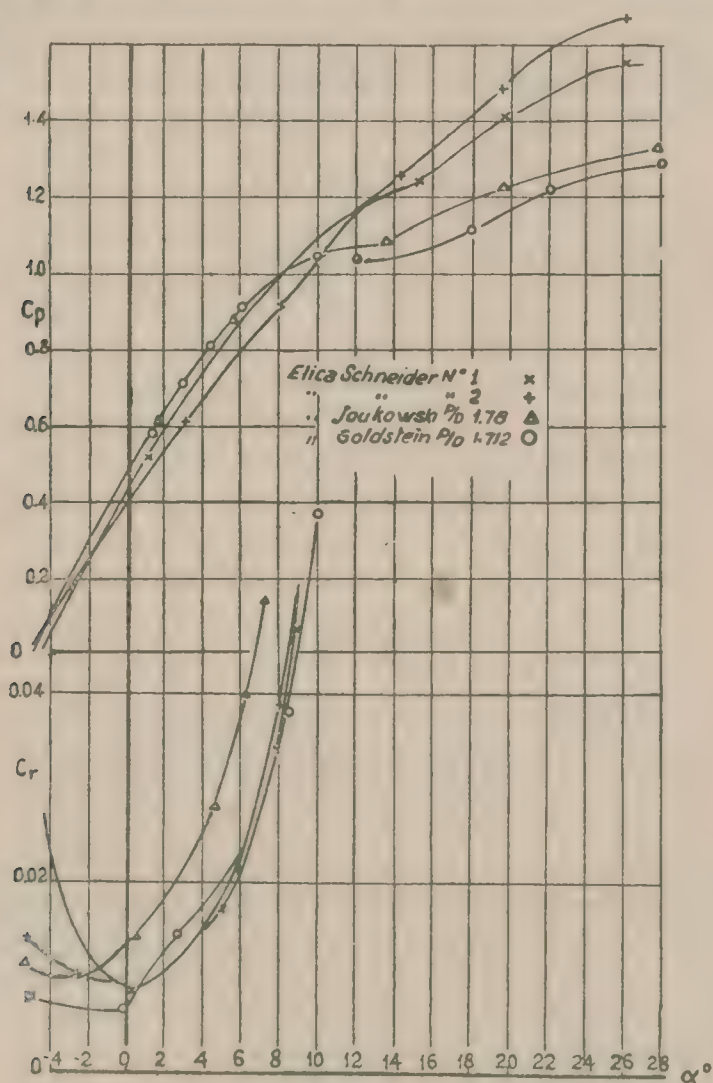


Fig. 3a.

di larghezza relativa maggiore, già prima indicata ⁽¹⁾; è confermata la concordanza dei valori delle principali caratteristiche aerodinamiche ricavate dai risultati sperimentali sopra le eliche

⁽¹⁾ C. N. J. LOCK e H. BATEMAN, *Wind tunnel tests of high pitch airscrews. Variations of blade width and blade section.* Report and Memoranda N. 1729 dei «Tech. Rep. Aer. Res. Comm. ».

coi valori dedotti dagli esperimenti sopra le ali: è da notare che le varie eliche hanno diversa forma di pala ed anche diverso profilo,

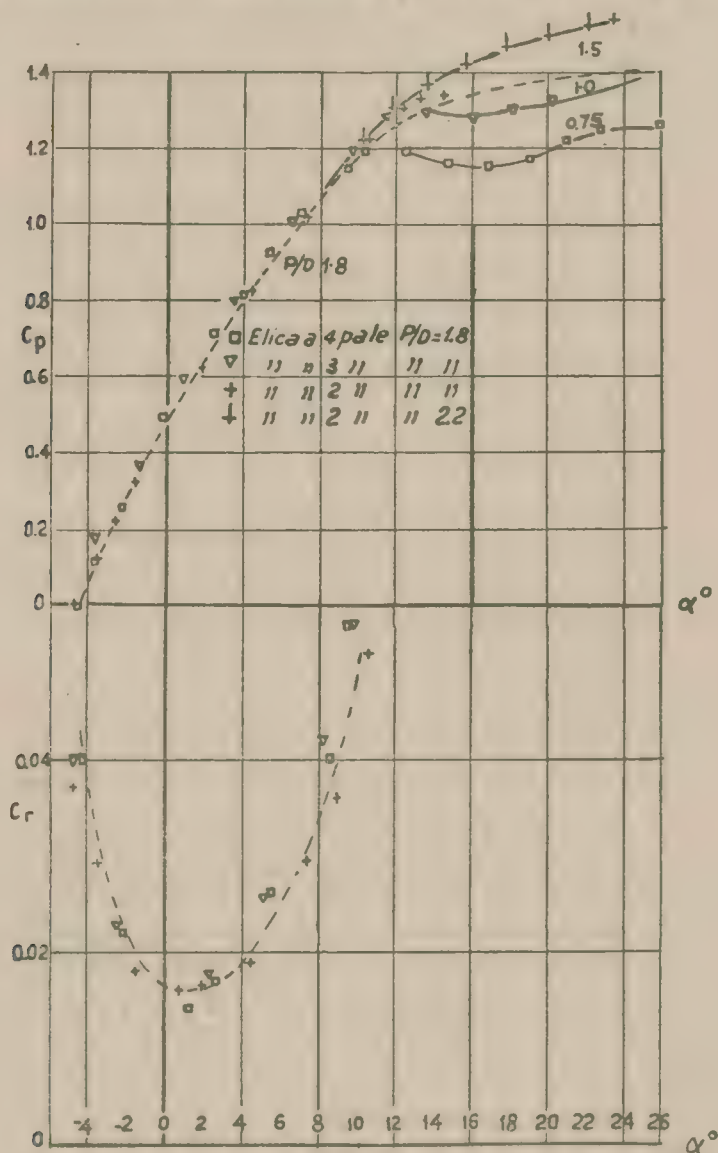


Fig. 3b.

che però nella sezione a $0,7 R$ presenta sempre la medesima curvatura media. Fa solo eccezione alla detta concordanza l'elica *Schneider* n° 2, per la quale il coefficiente angolare di portanza del profilo risulta avere un valore di 4,6 invece che di 5,75, mentre

le altre caratteristiche aerodinamiche non presentano sostanziali differenze rispetto ai valori corrispondenti degli altri propulsori.

Infine nelle figg. 4 e 5 sono riportati i risultati della medesima ricerca fatta per le tre diverse eliche navali sperimentate nella *Vasca di Roma* e contrassegnate nei Rendiconti di questa colle sigle *E 17*; *E 18*; *E 124*. È notevole la forma che hanno i dia-

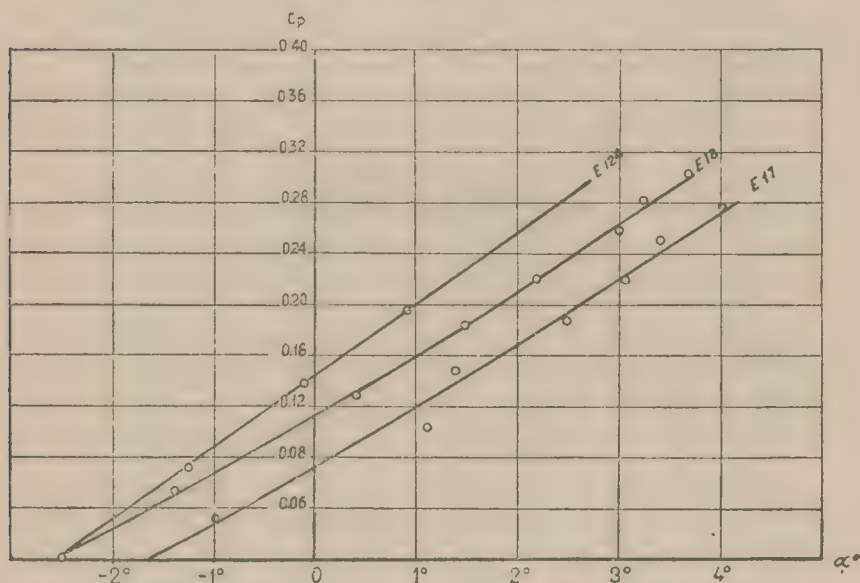


Fig. 4.

grammi dei coefficienti di portanza in funzione delle incidenze (riferite alla corda del profilo): essi presentano una caratteristica curvatura nel senso di rivolgere la *concavità* verso l'alto, nel piccolo intervallo dei valori di α per i quali è stato possibile determinare i valori corrispondenti di c_p , ed hanno in detto intervallo un massimo valore del coefficiente c'_{p_∞} uguale ad appena $3 \div 3,2$ (da mettere a raffronto col valore 5,75 prima indicato), mentre l'angolo di portanza nulla è assai prossimo al valore che la teoria deduce per la forma del profilo usato nelle eliche suddette; i diagrammi dei coefficienti c_r sono invece del tutto analoghi, sia per quanto si riferisce all'andamento, sia per quanto riguarda i valori dei coefficienti c_r , a quelli prima dedotti per le eliche aeree, solo dimostrando una tendenza ad accrescere coll'incidenza un po' più rapidamente di quanto non avvenga per queste. Ora i risultati più notevoli che si deducono da queste ricerche sono:

a) il diagramma dei coefficienti di portanza ha un andamento del tutto simile a quello corrispondente alle ali di piccolo allungamento (e precisamente di allungamento dell'ordine di $\frac{R}{l}$), quale risulta dagli esperimenti di Zimmerman ⁽¹⁾ e di Winter ⁽²⁾, e dalle ricerche teoriche di Bollay ⁽³⁾: in particolare questi pre-

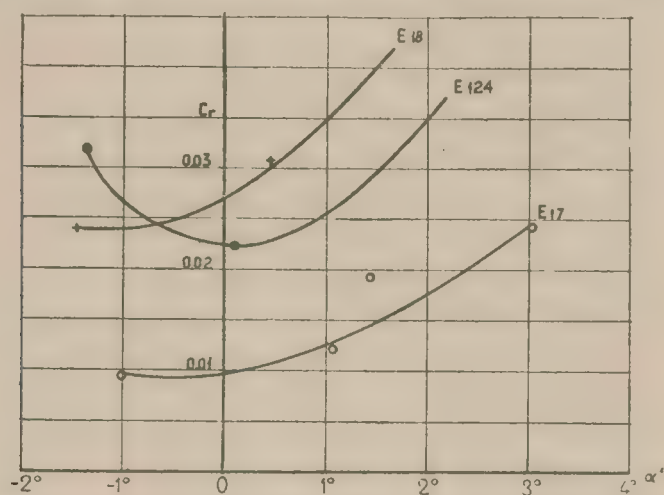


Fig. 5.

sentano quella caratteristica curvatura alle piccole incidenze che è stata notata sopra;

b) il valore del coefficiente angolare di portanza c'_{p_∞} ricavato dai diagrammi sperimentali relativi alle ali per mezzo della formula di Prandtl $c'_{p_\infty} = \frac{c'_p}{1 - \frac{1}{\pi\lambda} c'_p}$, ha un valore molto prossimo

a quello sopra indicato ricavato dai diagrammi relativi alle eliche: più precisamente, mentre gli esperimenti di Winter danno valori

⁽¹⁾ C. H. ZIMMERMAN, *Characteristics of Clark Y airfoils of small aspect ratio*. Report. N. 431 del N.A.C.A.

⁽²⁾ H. WINTER, *Strömungsvorgänge an Platten und profilierten Körpern bei kleinen Spannweite*, «Forschung auf dem Gebiete des Ingenieurwesens», Band 6, 1935, pag. 40.

⁽³⁾ W. BOLLAY, *A non-linear wing theory and its application to rectangular wings of small aspect ratio*. «Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik», Bd. 19, 1°, Fb. 1939.

di $c'_{p\infty}$ variabili da 3,68 a 4,4 al variare dell'allungamento λ da 1 a 2, quelli di Zimmerman dànno valori compresi tra 2,72 e 3,46 per λ compreso tra 0,9 e 1,4;

e) dagli esperimenti di Zimmerman si ricava pure, che l'angolo di portanza nulla non riceve alcuna apprezzabile variazione al variare dell'allungamento, in concordanza con quanto risulta dalle prove sulle eliche, mentre i diagrammi dei coefficienti di

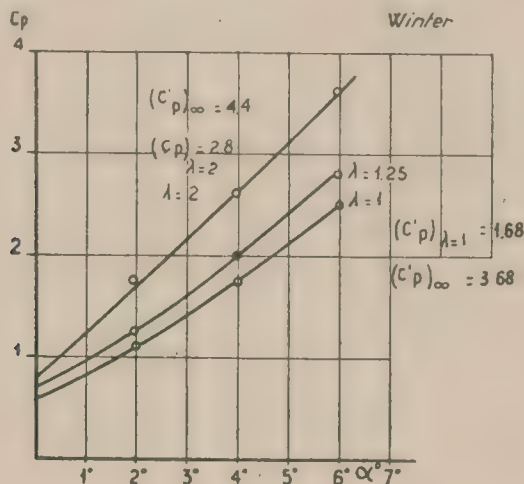


Fig. 6.

resistenza si presentano del tutto analoghi a quelli ricavati dalle prove sulle eliche prima indicate. Si può di fatto riconoscere anche in essi la maggiore tendenza dei c_r ad aumentare, col crescere di α , per i diagrammi relativi alle ali di più piccolo allungamento.

Appare pertanto che l'influenza della larghezza finita si esplica per le pale d'elica in modo del tutto analogo a quello corrispondente all'ala; anzi, osservando che la variazione di $c'_{p\infty}$ coll'allungamento geometrico λ è alquanto lenta, appare già legittimo il calcolare le caratteristiche aerodinamiche di un'elica a pale larghe (come le eliche navali) collo stesso procedimento seguito normalmente per le eliche aeree a pale strette, pur di assumere come valori del coefficiente angolare di portanza e dei coefficienti di resistenza per allungamento infinito dei singoli profili, non quelli dedotti dalle prove fatte sopra ali di allungamento notevoli, bensì quelli ricavati da esperimenti eseguiti sopra modelli alari di allungamento geometrico piccolo dello stesso ordine di $\frac{l}{R}$.

È poi ancora opportuno osservare come, alla luce dei risultati ora ottenuti, appaia perfettamente chiarita la ragione del comportamento singolare della elica Schneider n° 2, per quanto si riferisce al valore del coefficiente $c'_{p_{\infty}}$, cui sopra è stato accennato.

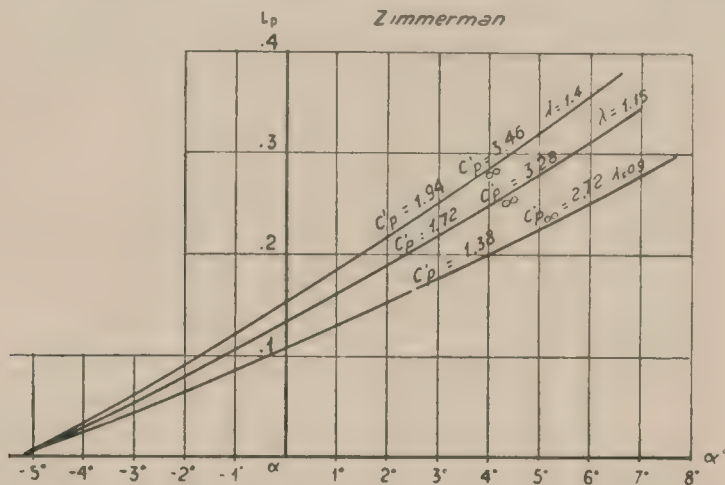


Fig. 7.

RISULTATI TEORICI

3. — *Impostazione del problema.* — Lo studio teorico del problema, che nei numeri precedenti è stato esaminato solo in base alla considerazione di dati sperimentali, mentre permette di dare al risultato sopra indicato un fondamento razionale, lo completa e lo perfeziona, richiedendo però per tale perfezionamento una mole di calcoli laboriosi notevole.

In questa ricerca ho applicato il metodo del *potenziale delle accelerazioni*, secondo la forma usata da Kármán-Burgers ⁽¹⁾ per lo studio del campo aerodinamico attorno ad un'ala, che se dal punto di vista formale può sembrare più complesso di quello basato sulla teoria vorticoso dell'elica, presenta indubbi vantaggi per quanto si riferisce alla semplicità concettuale colla quale i vari risultati sono dedotti.

Riferisco il movimento ad una terna destra di assi ortogonali, mobili solidalmente coll'elica, dei quali l'asse z coincide coll'asse

(1) KARMAN-BURGERS, *Aerodynamic Theory*, vol. 2

dell'elica ed è orientato positivamente in senso contrario a quello della velocità V_0 con cui essa avanza, mentre x e y ruotano intorno a z colla medesima velocità angolare ω del propulsore. Rispetto ad un tale sistema di riferimento il moto è permanente, e se u, v, w sono le componenti della velocità assoluta secondo i detti assi, mentre p è la pressione, ϱ la densità del fluido, p_0 la pressione all'infinito a monte, le equazioni del moto sono:

$$(1) \quad \begin{aligned} \frac{k_x}{\varrho} - \frac{1}{\varrho} \frac{\partial q}{\partial x} &= \omega \left(x \frac{\partial u}{\partial y} - y \frac{\partial u}{\partial x} \right) + V_0 \frac{\partial u}{\partial z} + \omega x \\ \frac{k_y}{\varrho} - \frac{1}{\varrho} \frac{\partial q}{\partial y} &= \omega \left(x \frac{\partial v}{\partial y} - y \frac{\partial v}{\partial x} \right) + V_0 \frac{\partial v}{\partial z} - \omega y \\ \frac{k_z}{\varrho} - \frac{1}{\varrho} \frac{\partial q}{\partial z} &= \omega \left(x \frac{\partial w}{\partial y} - y \frac{\partial w}{\partial x} \right) + V_0 \frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned}$$

in cui $q = p - p_0 + \frac{1}{2} \varrho (u^2 + v^2 + w^2)$, mentre k è la « forza generalizzata » di componenti (k_x, k_y, k_z) , uguale alla somma della forza esterna f (applicata dalla pala al fluido) e del prodotto esterno della velocità assoluta V del fluido per la sua vorticità 2Ω (pure del moto assoluto). Ammetterò che sia V sia 2Ω siano grandezze piccole del primo ordine, e quindi trascurerò $V \wedge 2\Omega$ a fronte di f : questa ipotesi non limita troppo il campo di applicabilità dei risultati ai quali la presente ricerca perviene, in quanto, come già ho indicato al n° 1, i valori dei coefficienti c_s e c_m , almeno nell'intervallo dei valori del rapporto $\frac{V_0}{ND}$ ai quali corrispondono rendimenti non piccoli, anche per le eliche navali sono abbastanza prossimi ai valori di c_s e di c_m delle eliche aeree, che presentano lo stesso rapporto $\frac{p}{D}$.

Alle (1) si deve ancora aggiungere l'equazione di continuità

$$(2) \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Derivando la prima delle (1) rispetto ad x , la seconda rispetto ad y , la terza rispetto a z e sommando membro a membro, tenendo conto della (2), risulta:

$$(3) \quad \Delta_z q = \frac{\partial k_x}{\partial x} + \frac{\partial k_y}{\partial y} + \frac{\partial k_z}{\partial z}$$

nella quale, come è detto prima, si potrà considerare k coincidente con f : ne viene che il secondo membro della (3) è nullo in tutto lo spazio esterno a quello σ occupato dalle pale, mentre in queste ha valore generalmente diverso da zero. A distanza infinita dal propulsore il fluido è in quiete, mentre la sua pressione ha il valore costante p_0 ; è perciò $(q)_\infty = 0$. La soluzione di (3) che all'infinito si annulla, che corrisponde a circolazione nulla per qualunque linea fluida, mentre presenta entro σ , quando ci si muova nella direzione di k , una discontinuità uguale a k è:

$$(4) \quad q = -\frac{1}{4\pi} \iiint_{\sigma} d\xi d\eta dz \left[\frac{\partial k_x}{\partial \xi} + \frac{\partial k_y}{\partial \eta} + \frac{\partial k_z}{\partial z} \right] =$$

$$= -\frac{1}{4\pi} \iiint_{\sigma} d\xi d\eta dz \frac{k_x(x - \xi) + k_y(y - \eta) + k_z(z - \zeta)}{d^3}$$

essendo

$$d = [(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2]^{1/2}.$$

4. — Determinazione del potenziale delle accelerazioni del campo di moto prodotto dall'elica.

Assumo ora un sistema di coordinate cilindriche r, θ, z , di cui l'asse z coincide sempre coll'asse del propulsore; suppongo, come è lecito nel problema in esame, che la componente di k secondo il raggio r sia nulla. Se k_T è la componente trasversa di k nel piano normale a z , positiva se concorde col senso positivo delle rotazioni attorno a z , è:

$$k_x = -k_T \cos \theta \quad ; \quad k_y = k_T \sin \theta.$$

Si ricava poi, indicando con r, θ, ζ le coordinate cilindriche dell'elemento di volume $d\tau$ di σ , in cui è applicata la forza unitaria k , e con r_1, θ_1, z le corrispondenti coordinate del punto in cui si calcola la q ,

$$k_x(x - \xi) + k_y(y - \eta) = k_T[\cos \theta(r \cos \theta - r_1 \cos \theta_1) +$$

$$+ \sin \theta(r_1 \sin \theta_1 - r \sin \theta)] = k_T[r \cos 2\theta - r_1 \cos(\theta + \theta_1)]$$

$$d^2 = (r_1 \cos \theta - r \cos \theta)^2 + (r_1 \sin \theta_1 - r \sin \theta)^2 + (z - \zeta)^2 =$$

$$= r^2 + r_1^2 - 2rr_1 \cos(\theta - \theta_1) + (z - \zeta)^2.$$

Suppongo che le pale abbiano spessore ε così piccolo che si possano considerare come semplici superficie, ed ammetto che dette superficie appartengano ad *elicoidi conoidi retti* le cui equazioni parametriche sono:

$$(5) \quad x = r \cos \theta ; y = r \sin \theta ; z = h(\theta - \theta_i) ; \left(\theta_i = i \frac{2\pi}{m} \right)$$

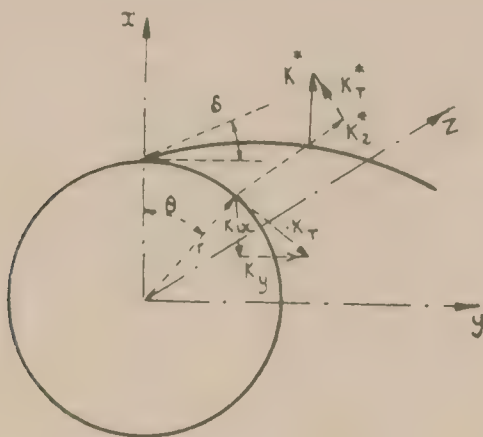


Fig. 8.

con i variabile da zero a $m - 1$, ed essendo m il numero delle pale, mentre h è il *passo ridotto* dell'elicoide uguale a $\frac{\text{passo}}{2\pi}$.

Se ds è la lunghezza di un arco elementare dell'elica sezione dell'elicoide (5) col cilindro di raggio r , mentre ds_1 è la lunghezza dell'arco elementare che appartiene all'elica normale alla precedente ed è tracciata sullo stesso cilindro r , è $d\xi d\eta d\zeta = dr ds ds_1$.

Pongo $k^* = \int_0^\varepsilon k ds_1$: essendo k la intensità della forza per unità di volume di una pala generica, k^* è ovviamente l'intensità della forza per unità di superficie della pala medesima.

Ammetto infine che la direzione della k^* , in ogni punto P di questa, sia quella della normale al raggio r per detto punto ed alla velocità risultante di V_0 e di $\omega \wedge (P - O)$ (assunto ω nella direzione e nel senso di z); è così:

$$k_z^* = k^* \cos \delta = k^* \frac{\omega r}{\sqrt{V_0^2 + \omega^2 r^2}} ; k_r^* = -k^* \sin \delta = -k^* \frac{V_0}{\sqrt{V_0^2 + \omega^2 r^2}}$$

con ovvio significato dei simboli. Se β è l'angolo di calettamento del profilo generico della pala a distanza r (angolo che l'elica

sezione dell'elicoide col cilindro di raggio r forma col piano normale a z , ed α è l'angolo di incidenza dello stesso profilo (angolo che sul cilindro di raggio r formano le eliche di inclinazione δ e β) è $\beta = \delta + \alpha$; ma l'ipotesi fatta circa l'ordine di grandezza delle velocità impresses al fluido dal propulsore portano necessariamente a considerare valori di α piccoli; così che sarà lecito porre, ora, $\beta \cong \delta$ e quindi

$$\cos \delta = \cos \beta = \frac{r}{\sqrt{r^2 + h^2}} \quad ; \quad \sin \delta = \sin \beta = \frac{h}{\sqrt{r^2 + h^2}}.$$

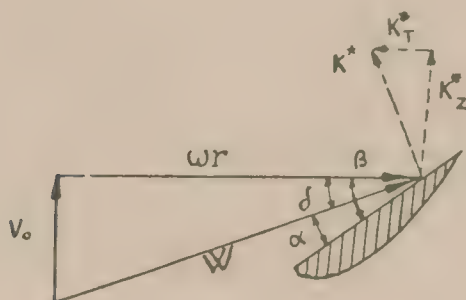


Fig. 9.

Si potrà perciò scrivere la (4) nella forma

$$(6) \quad q = \frac{1}{4\pi} \sum_{i=0}^{i=m-1} \int_0^{\theta'(r)} \int_{\theta''(r)}^{\theta'(r)} k^* \frac{h[-r \cos 2\theta + r_1 \cos(\theta + \theta_1)] + r[z - h(\theta - \theta_1)]}{d^3} dr d\theta$$

dove ho indicato con $\theta'(r)$ e con $\theta''(r)$ i valori di θ che corrispondono rispettivamente al bordo di attacco ed al bordo di fuga della sezione della pala col cilindro di raggio r .

Osservo ancora che, essendo evidentemente tutte le pale fra loro identiche ed assumendo k^* nei punti corrispondenti di queste il medesimo valore, il valore del potenziale delle accelerazioni q in un punto P qualsiasi, che risulta per la (6) espresso come la somma dei potenziali prodotti nello stesso punto P dalle forze generalizzate applicate alle varie pale, è pure uguale alla somma dei potenziali prodotti nei punti P_i di coordinate $\left(\theta_{1i} = \theta_1 + i \frac{2\pi}{m}; r_1; z\right)$ (con i variabile da 0 a $m-1$) dalle forze generalizzate applicate ad una unica e medesima pala. Ponendo quindi

$$(7) \quad \frac{h[r_1 \cos(\theta + \theta_{1i}) - r \cos 2\theta] + r(z - h\theta)}{d^3} = f(r, r_1, \theta, \theta_1, z)$$

posso scrivere

$$(8) \quad q = \frac{1}{4\pi} \int_0^R \int_{\theta'(r)}^{\theta''(r)} k^*(r, \theta) \sum_{i=0}^{i=m-1} f^i(r, r_1, \theta, \theta_1, z) dr d\theta.$$

5. — Determinazione del potenziale di velocità.

Pongo

$$(9) \quad u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + u' \quad ; \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} + v' \quad ; \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z} + w';$$

$u - u'$; $v - v'$; $w - w'$ definiscono così le parti di u , di v e di w che derivano da un potenziale di velocità φ , mentre u' , v' , w' sono le componenti del campo *rotazionale* di velocità prodotto dall'elica. Sostituendo le (9) nelle (1) si ha

$$\begin{aligned} \frac{k_x}{\varrho} - \frac{1}{\varrho} \frac{\partial q}{\partial x} &= \omega \left(x \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - y \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) + V_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} + \omega \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \\ &+ \omega \left(x \frac{\partial u'}{\partial y} - y \frac{\partial u'}{\partial x} \right) + V_0 \frac{\partial u'}{\partial z} + \omega v' = \omega \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial \varphi}{\partial y} - y \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \\ &+ V_0 \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \omega \left(x \frac{\partial u'}{\partial y} - y \frac{\partial u'}{\partial x} \right) + V_0 \frac{\partial u'}{\partial z} + \omega v' \end{aligned}$$

che risulta soddisfatta ponendo

$$(10) \quad -\frac{1}{\varrho} \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\omega \left(x \frac{\partial \varphi}{\partial y} - y \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + V_0 \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right]$$

ossia

$$(11) \quad \begin{cases} -\frac{q}{\varrho} = \omega \left(x \frac{\partial \varphi}{\partial y} - y \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + V_0 \frac{\partial \varphi}{\partial z} \\ \text{e} \\ \frac{k_x}{\varrho} = \omega \left(x \frac{\partial u'}{\partial y} - y \frac{\partial u'}{\partial x} \right) + V_0 \frac{\partial u'}{\partial z} + \omega v' \end{cases}$$

Dalla prima delle (11), tenendo presente che in un punto generico del campo è

$$\frac{x}{r} = \cos \theta \quad ; \quad \frac{y}{r} = \sin \theta$$

mentre è

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial y} \cos \theta - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \sin \theta = v_r = \frac{\partial \varphi}{r \partial \theta}$$

indicando con v_r la componente trasversa della velocità, si ha

$$\begin{aligned} & -\frac{q}{e} - \omega \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + V_0 \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \\ & = \sqrt{V_0^2 + \omega^2 r^2} \left[\frac{\omega r}{\sqrt{V_0^2 + \omega^2 r^2}} \frac{\partial \varphi}{r \partial \theta} + \frac{V_0}{\sqrt{V_0^2 + \omega^2 r^2}} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right] = \\ & = W \left[\cos \delta \frac{\partial \varphi}{r \partial \theta} + \sin \delta \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right] = W \frac{\partial \varphi}{ds} \end{aligned}$$

ponendo $W = \sqrt{V_0^2 + \omega^2 r^2}$, mentre ds è la lunghezza di un arco elementare dell'elica del cilindro di raggio r e di inclinazione δ sul piano normale a z . È perciò

$$(12) \quad \varphi = -\frac{1}{eW} \int_{-\infty}^s q ds',$$

ponendo il valore di φ all'infinito a monte uguale a zero. Dalla seconda delle (11), tenendo presente che è

$$\frac{\partial u'}{\partial \theta} = \frac{\partial u'}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial u'}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} = -\frac{\partial u'}{\partial x} y + \frac{\partial u'}{\partial y} x$$

si deduce

$$\frac{k_x}{e} = \omega \frac{\partial u'}{\partial \theta} + V_0 \frac{\partial u'}{\partial z} + \omega v'.$$

In modo analogo dalla seconda e dalla terza delle (1), in grazia delle (9) e (12), si ha:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{k_y}{e} &= \omega \frac{\partial v'}{\partial \theta} + V_0 \frac{\partial v'}{\partial z} - \omega u' \\ \frac{k_z}{e} &= \omega \frac{\partial w'}{\partial \theta} + V_0 \frac{\partial w'}{\partial z} \end{aligned} \right.$$

e poichè è

$$\begin{aligned} k_y \cos \theta - k_x \sin \theta &= k_r & k_y \sin \theta + k_x \cos \theta &= k_r \\ v' \cos \theta - u' \sin \theta &= v'_r & u' \cos \theta + v' \sin \theta &= v'_r \end{aligned}$$

dove i simboli hanno i significati ovvii, si ricava

$$\begin{aligned}
 (13) \quad & \frac{k_r}{\varrho} = \omega \cos \theta \frac{\partial v'}{\partial \theta} + \\
 & + V_0 \cos \theta \frac{\partial v'}{\partial z} - \omega u' \cos \theta - \omega \sin \theta \frac{\partial u'}{\partial \theta} - V_0 \sin \theta \frac{\partial u'}{\partial z} - \\
 & - \omega v' \sin \theta = \omega \left(\cos \theta \frac{\partial v'}{\partial \theta} - v' \sin \theta - \sin \theta \frac{\partial u'}{\partial \theta} - u' \cos \theta \right) + \\
 & + V_0 \left(\cos \theta \frac{\partial v'}{\partial z} - \sin \theta \frac{\partial u'}{\partial z} \right) = \omega \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (v' \cos \theta) - \frac{\partial}{\partial \theta} (u' \sin \theta) \right] + \\
 & + V_0 \frac{\partial}{\partial z} (v' \cos \theta - u' \sin \theta) = \omega \frac{\partial}{\partial \theta} v'_r + V_0 \frac{\partial}{\partial z} v'_r.
 \end{aligned}$$

Da questa infine si ha, come è stato indicato prima:

$$v'_r = \frac{1}{\varrho W} \int_{-\infty}^s k_r ds';$$

analogamente è

$$v'_r = \frac{1}{\varrho W} \int_{-\infty}^s k_r ds' = 0$$

perchè $k_r = 0$ ovunque, per ipotesi;

$$w' = \frac{1}{\varrho W} \int_{-\infty}^s k_s ds'.$$

E poichè, come già è stato indicato, è

$$k_r = -k \sin \delta \quad ; \quad k_s = k \cos \delta$$

posso scrivere

$$(14) \quad v'_r = - \frac{1}{\varrho W} \int_{-\infty}^s k \sin \delta ds' = - \frac{\sin \delta}{\varrho W} Q$$

$$w' = \frac{1}{\varrho W} \int_{-\infty}^s k \cos \delta ds' = \frac{\cos \delta}{\varrho W} Q$$

essendo

$$(15) \quad Q = \int_{-\infty}^s k ds'.$$

6. — *Determinazione del vettore rotazione del campo di moto prodotto dall'elica.*

Posso ora dedurre le espressioni delle componenti del vettore rotazione secondo il riferimento in coordinate cilindriche sopra adottato; è:

$$(16) \quad 2\omega_r = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial w'}{\partial \theta} - \frac{\partial(rv'_\tau)}{\partial z} \right] = \frac{\cos \delta}{r \varrho W} \frac{\partial}{\partial \theta} \int_{-\infty}^s k ds' + \\ + \frac{\sin \delta}{\varrho W} \frac{\partial}{\partial z} \int_{-\infty}^s k ds' = \frac{1}{\varrho W} \left[\frac{\omega r}{W} \frac{\partial}{\partial \theta} \int_{-\infty}^s k ds' + \frac{V_0}{W} \frac{\partial}{\partial z} \int_{-\infty}^s k ds' \right] = \\ = \frac{1}{\varrho W} \frac{\partial}{\partial s} \int_{-\infty}^s k ds' = \frac{k}{\varrho W}.$$

$$2\omega_\theta = - \frac{\partial w'}{\partial r} = - \frac{\cos \delta}{\varrho W} \frac{\partial}{\partial r} \int_{-\infty}^s k ds' = - \frac{\partial}{\partial r} (Q_1 \cos \delta)$$

$$2\omega_s = \frac{1}{r} \left(v'_\tau + r \frac{\partial v'_\tau}{\partial r} \right) = - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (Q_1 r \sin \delta)$$

avendo posto

$$(15 \text{ bis}) \quad Q_1 = \frac{Q}{\varrho W}.$$

Nella *scia*, essendo in essa $k = 0$, risulta $\omega_r = 0$; poichè è poi

$$2\omega_\theta \sin \delta - 2\omega_s \cos \delta = - \sin \delta \frac{\partial}{\partial r} (Q_1 \cos \delta) + \frac{\cos \delta}{r} \frac{\partial}{\partial r} (Q_1 r \sin \delta)$$

mentre si ha

$$\frac{\partial}{\partial r} \cos \delta = \frac{\omega}{W} - \frac{\omega r}{W^3} \omega^2 r;$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \sin \delta = - \sin \delta \frac{\cos^2 \delta}{r}$$

risulta

$$2\omega_\theta \sin \delta - 2\omega_s \cos \delta = 0$$

dalla quale appare il risultato notissimo che i *cortici liberi* nella *scia* hanno i loro assi disposti secondo le eliche cilindriche di ineli-

nazione δ sui piani normali all'asse z . La intensità di questi vortici elicoidali liberi è data dalla:

$$(17) \quad \begin{aligned} 2\Omega &= 2\omega_\theta \cos \delta + 2\omega_z \sin \delta = -\frac{\partial Q_1}{\partial r} \cos^2 \delta - \\ &- Q_1 \cos \delta \frac{\partial}{\partial r} \cos \delta - \frac{Q_1}{r} \sin^2 \delta - \sin^2 \delta \frac{\partial Q_1}{\partial r} - \\ &- Q_1 \sin \delta \frac{\partial}{\partial r} \sin \delta = -\frac{\partial Q_1}{\partial r} - \frac{Q_1}{r} \sin^2 \delta. \end{aligned}$$

Moltiplichiamo la prima delle (16) per $\varepsilon = r \sin \delta \Delta\theta$, essendo ε lo spessore della pala in corrispondenza di un suo profilo generico, e passiamo al limite per $k \rightarrow \infty$ ed $\varepsilon \rightarrow 0$ in modo che (17 bis) $\lim_{\substack{k \rightarrow \infty \\ \Delta\theta \rightarrow 0}} kr \sin \delta \Delta\theta = k^*$ e poniamo corrispondentemente $\lim_{\substack{k \rightarrow \infty \\ \Delta\theta \rightarrow 0}} Q_1 = Q_1^*$; il secondo membro della (17 bis) dà sempre la intensità della forza generalizzata per unità di superficie di ogni pala, quale già prima era stata definita.

Otteniamo, nel caso già considerato che il luogo dei punti di applicazione delle forze si riduca a semplici superficie, le intensità dei vortici disposti secondo il raggio e secondo le eliche cilindriche di raggio r , che risultano date dalla

$$(18) \quad \gamma_r = \frac{k^*}{\varrho W} \quad ; \quad \gamma_t = -\frac{\partial}{\partial r} Q_1^* ;$$

è di fatto

$$\begin{aligned} r \sin \delta \left(\frac{\partial Q_1}{\partial r} + \frac{Q_1}{r} \sin^2 \delta \right) &= r \sin \delta \frac{\partial Q_1}{\partial r} + Q_1 \sin \delta (1 - \cos^2 \delta) = \\ &= r \sin \delta \frac{\partial Q_1}{\partial r} + Q_1 \sin \delta - Q_1 \sin \delta \cos^2 \delta = r \sin \delta \frac{\partial Q_1}{\partial r} + Q_1 \sin \delta + \\ &+ r Q_1 \frac{\partial}{\partial r} \sin \delta = \frac{\partial}{\partial r} (Q_1 r \sin \delta) \end{aligned}$$

Nella scia è $\gamma_r = 0$, mentre

$$\gamma_t = -\frac{\partial}{\partial r} \int_l \frac{k^*}{\varrho W} ds$$

(se si indica con l la lunghezza della corda del profilo della pala a distanza r dall'asse, ossia la lunghezza dell'arco d'elica sezione

della pala col cilindro di raggio r). Ma $\int \frac{k^* ds}{\rho W} = \Gamma$, se Γ è la circolazione totale attorno a detto profilo; si ha perciò nella scia $\gamma_i = -\frac{\partial \Gamma}{\partial r}$ come è noto dai teoremi di Helmholtz.

7. — Interpretazione della formola che dà il potenziale di velocità.

Se si sostituisce ora nella (12) al posto di q l'espressione data dalla (8) si ricava

$$(19) \quad \varphi = -\frac{1}{4\pi\rho W} \int_{-\infty}^s ds' \int_0^R dr \int_{\theta(r)}^{\theta''(r)} k^*(r, \theta) \sum_{i=0}^{i=m-1} f^i(r, r_1, \theta, \theta'_1, z') d\theta$$

avendo indicato con θ'_1, z' i valori che θ_1 e z assumono quando ci si muove sopra l'elica cilindrica di inclinazione δ passante per il punto P in cui si calcola la q . Eseguiamo prima l'integrazione rispetto ad s' e poniamo

$$(20) \quad \int_{-\infty}^s f^i(r, r_1, \theta, \theta'_1, z') ds' = F^i(r, r_1, \theta, z, \theta).$$

Non occorre, per ora, conoscere la forma della funzione F^i ; tenendo conto della (20), dalla (19) si ha:

$$(21) \quad \varphi = -\frac{1}{4\pi\rho W} \int_0^R dr \int_{\theta(r)}^{\theta''(r)} k^*(r, \theta) \sum F^i(r, r_1, \theta, \theta_1, z) d\theta$$

che permette, avuto riguardo ai risultati ottenuti nel numero precedente, di riconoscere il significato della funzione F^i . Si immagini di fatto che la forza unitaria k^* sia applicata solo in corrispondenza dell'elemento di area $d\sigma = ds dr$: si genererà allora, per quanto è dimostrato al n° 6, un vortice disposto secondo il raggio in corrispondenza dello stesso elemento $d\sigma$, la cui intensità è $\frac{k^* ds}{\rho W}$, ed il cui asse ha la lunghezza dr , ed una coppia di vortici elicoidali che sfuggono alle estremità dell'elemento dr , hanno circolazione uguale e contraria, il cui valore assoluto è $\left| \frac{k^* d\theta}{\rho \omega} \right|$, mentre hanno i loro assi disposti secondo le eliche cilindriche di inclinazione δ sui piani normali a z , e tracciate sui cilindri di raggio r e $r + dr$. Poichè un campo di corrente è perfettamente determinato quando si conoscono di esso le condizioni all'infinito

e i valori della vorticità in tutti i punti, il campo di corrente generato dalla applicazione della forza unitaria $\mathbf{k}^*$ sull'elemento ds risulterà così identico a quello prodotto dal vortice a staffa sopra definito, e perciò avrà anche il medesimo potenziale. Ma dalla (21) appare che detto potenziale, nel caso ora considerato, è uguale a $-\frac{k^*(r, \theta)}{4\pi Q W} dr d\theta F^i$: risulta perciò senz'altro che F^i è proporzionale alla funzione potenziale del campo di moto prodotto dal vortice a staffa prima definito. Ed è anche ovvio il significato della stessa formola (21): per essa la funzione potenziale del campo esterno alle superficie vorticosi viene dedotto, come è lecito data la linearità della equazione che la definisce, come semplice somma dei potenziali dei campi prodotti dagli infiniti vortici a staffa che corrispondono a tutte le forze $\mathbf{k}^*$ applicate alle pale.

8. — *Determinazione della componente della velocità normale all'elicoide conoide retto ottenuto da quello delle pale per rotazione attorno all'asse z in un punto P generico di esso.*

Sia P un punto qualsiasi che non appartiene alle pale, ed $\mathbf{n}$ la retta normale in P all'elicoide conoide retto che passa per P , e che si ottiene da quello delle pale per semplice rotazione di questo attorno all'asse z ; orientiamo la $\mathbf{n}$ in modo che, coincidendo detta superficie con quella delle pale, essa risulti concorde col senso di $\mathbf{k}$.

La componente della velocità in P nella direzione della $\mathbf{n}$ è data dalla

$$(22) \quad \frac{\partial q}{\partial n} = -\frac{1}{4\pi Q W} \int_0^R dr \int_{\theta(r)}^{\theta''(r)} k^*(r, \theta) \sum_i \frac{\partial F^i}{\partial n} d\theta$$

perchè essendo P esterno alle pale la funzione integranda non presenta in P alcuna singolarità. Possiamo anche fare prima l'integrazione rispetto ad r : è allora

$$(23) \quad \begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial n} &= -\frac{1}{4\pi Q W} \int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} d\theta \int_{r'(\theta)}^{r''(\theta)} k^*(r, \theta) \sum_i \frac{\partial F^i}{\partial n} dr = \\ &= -\frac{1}{4\pi Q W} \left\{ \int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} d\theta [k^*]_{r'}^{r''} \left[\sum_i F^i \right]_{r'}^{r''} - \int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} d\theta \int_{r'}^{r''} k_1(r, \theta) \sum_i F^i dr \right\} = \\ &= \frac{1}{4\pi Q W} \int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} d\theta \int_{r'}^{r''} k_1(r, \theta) \sum_i F^i dr \end{aligned}$$

dove si è indicato, ora, con r' e con r'' i valori entro i quali varia la r per la sezione della pala con il piano per z di equazione $\theta = \text{costante}$, e con $\theta_{\min}$ e $\theta_{\max}$ rispettivamente il minimo ed il massimo valore di θ tra i quali è compresa tutta la pala; si è posto poi

$$k_1(r, \theta) = \frac{\partial k^*}{\partial r} \quad ; \quad F_1^i = \int \frac{\partial}{\partial n} F^i dr$$

e si è ammesso che k^* ai limiti del campo entro cui è definito sia nullo.

Ora, per il significato prima riconosciuto alla funzione F^i , la $\frac{\partial F^i}{\partial n} dr$ risulta proporzionale alla componente della velocità normale all'elicoide in P prodotta dal vortice a staffa che abbiamo visto generato dall'applicazione della forza $k^* dr ds$. Se $\frac{1}{4\pi} \Psi_1^i$ è la componente analoga prodotta dal vortice elicoidale inferiore, posta la circolazione uguale ad uno, quello superiore, di circolazione uguale e contraria, produrrà una velocità la cui componente secondo la n è:

$$-\frac{1}{4\pi} \left(\Psi_1^i + \frac{\partial}{\partial r} \Psi_1^i dr \right);$$

d'altra parte, il tratto AB del vortice a staffa diretto secondo il raggio, supposta sempre la sua intensità uguale ad uno, induce una velocità secondo la n data, secondo la formola di Biot-Savart, dalla

$$-\frac{\partial}{\partial r} \frac{\cos \gamma \cos \tau}{a_2} dr,$$

nella quale è a_2 la distanza del punto P dal raggio a cui appartiene l'elemento dr , mentre γ e τ sono rispettivamente l'angolo che la retta AP , congiungente il punto P col punto A , origine del vortice elicoidale inferiore, forma col raggio AB , e l'angolo che la normale al piano ABP forma colla n . Poichè la circolazione effettiva del vortice a staffa è $\frac{k^* d\theta}{c\omega}$ dovendo essere:

$$-\frac{k^*}{4\pi c\omega} dr d\theta \frac{\partial F^i}{\partial n} = -\frac{k^* d\theta}{4\pi c\omega} \left(\frac{\partial \Psi_1^i}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r} \frac{\cos \gamma \cos \tau}{a_2} \right)$$

si deduce che è

$$\frac{\partial F^i}{\partial n} = \frac{W}{\omega} \frac{\partial}{\partial r} \left(\Psi_1^i + \frac{\cos \gamma \cos \tau}{a_2} \right)$$

e pertanto

$$(24) \quad F_1^i = \int \frac{\partial F^i}{\partial n} dr = \frac{W}{\omega} \left(\Psi_1^i + \frac{\cos \gamma \cos \tau}{a_2} \right).$$

9. — *Determinazione delle funzioni Ψ_1^i e $\frac{\cos \gamma \cos \tau}{a_2}$.*

È necessario ora determinare le funzioni Ψ_1^i e $\frac{\cos \gamma \cos \tau}{a_2}$.

Per questo procediamo nel modo seguente: consideriamo il piano normale a z per P , e sia D il punto in cui detto piano interseca il vortice elicoidale passante per A (od il suo prolungamento); poichè, per la risoluzione del problema in istudio è sufficiente, come si vedrà in seguito, limitare il calcolo della $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ a punti che appartengono alle pale, potremo considerare il tratto di vortice elicoidale compreso tra D e A di lunghezza abbastanza piccola, perchè sia lecito confondere il tratto di elica AD col segmento A_1D della sua tangente in D compreso tra gli stessi piani. L'approssimazione che questa assunzione consente di raggiungere, per i valori del rapporto tra il passo ed il diametro dell'elica quali occorre considerare normalmente sia nella tecnica aeronautica sia in quella navale, è, verosimilmente, almeno dello stesso ordine di grandezza di quello corrispondente alla linearizzazione dell'equazione differenziale che definisce la φ , e pertanto può essere accettata anche per i valori della larghezza relativa che si hanno nelle eliche navali.

La velocità prodotta in P dal vortice elicoidale uscente da A risulta così come somma (o come differenza a seconda che A precede D , oppure lo segue) di quella indotta dal vortice elicoidale uscente da D ed estendentesi sino all'infinito a valle, e di quella prodotta dal tratto rettilineo A_1D sopra definito. Indichiamo con $\frac{1}{4\pi} \Psi_2^i$ la componente secondo n della velocità in P dovuta al vortice elicoidale uscente da D e corrispondente ad una circolazione unitaria di questo; la sua espressione è stata ricavata da

Sandi Kawada ⁽¹⁾, e non la scriviamo qui ora, perchè essa non è necessaria ai fini della presente ricerca.

La componente secondo n della velocità in P prodotta dal tratto rettilineo A_1D , sempre supposto uguale ad uno il valore della circolazione e sia che A_1 preceda oppure segua D , si calcola colla:

$$(25) \quad \frac{1}{4\pi} \Psi'_3 = \frac{1}{4\pi a_1} (\cos \mu_1 - \cos \mu_2) \cos \nu$$

se μ_1 , e μ_2 sono rispettivamente gli angoli che le rette orientate A_1P e DP formano colla retta tangente t all'elica asse del vortice elicoidale passante per D , orientata secondo il senso del moto

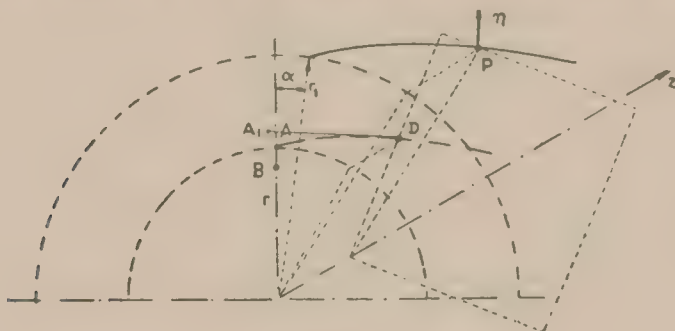


Fig. 10.

(relativo agli assi solidali x, y, z), delle particelle fluide sopra esse, mentre ν è l'angolo che la retta normale al piano $(t; P)$ forma colla n , ed a_1 è la distanza di P da detta retta tangente. Se si indica con α l'angolo di cui occorre ruotare (nel senso positivo delle rotazioni attorno a z) la superficie elicoidale a cui appartiene il vortice inducente AD per portarla a coincidere con quella passante per P , si ricava, procedendo nel modo indicato in Appendice, che è:

$$(26^a) \quad \cos \mu_1 = \frac{(\theta_1 - \theta)(r^2 + h^2) + rr_1 \sin \alpha}{(r^2 + h^2)^{1/2} r_{A_1P}}$$

essendo

$$r_{A_1P}^2 = r_1^2 + r^2 - 2rr_1 \cos \alpha + (\theta_1 - \theta)^2(r^2 + h^2) + 2rr_1(\theta_1 - \theta) \sin \alpha;$$

(1) SANDI KAWADA, *Calculation of induced velocity by helical vortices and its application to propeller theory*, « Report of the Aeron. Res. Instit. Tokyo Imperial University », n. 172, gennaio 1939.

si è ora indicato con $(\theta_1 + \alpha; r_1)$ le corrispondenti coordinate cilindriche del punto P , mentre quelle analoghe del punto D risultano ovviamente $(\theta_1; r)$;

$$(26^b) \quad \cos \mu_2 = \frac{rr_1 \sin \alpha}{r_{DP}(r^2 + h^2)^{1/2}}$$

essendo

$$r_{DP}^2 = r_1^2 + r^2 - 2rr_1 \cos \alpha;$$

$$\cos \nu = \frac{r \cos \alpha (h^2 - r_1^2) - r_1 (h^2 - r^2)}{(r_1^2 + h^2)^{1/2} Ar}$$

essendo

$$A^2 = (r - r_1 \cos \alpha)^2 \left(1 + \frac{h^2}{r^2}\right) + \frac{r_1^2}{r^2} h^2 \sin^2 \alpha;$$

ed infine

$$a_1^2 = r^2 - \frac{r^2 r_1^2}{r^2 + h^2} \sin^2 \alpha - 2rr_1 \cos \alpha + r_1^2.$$

Pure in Appendice sono calcolati i valori di $\cos \gamma$, $\cos \tau$, e a_2 che risultano:

$$(27) \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos \gamma = \frac{r_1 \cos (\theta_1 + \alpha - \theta) - r}{r_{AP}} \\ \text{in cui è} \\ r_{AP}^2 = r_1^2 + r^2 - 2rr_1 \cos (\theta_1 + \alpha - \theta) + h^2(\theta_1 - \theta)^2 \\ \cos \tau = \frac{h^2(\theta_1 - \theta) \cos (\theta_1 - \theta + \alpha) + r_1^2 \sin (\theta_1 - \theta + \alpha)}{(h^2 + r_1^2)^{1/2} [h^2(\theta_1 - \theta)^2 + r_1^2 \sin^2 (\theta_1 - \theta + \alpha)]^{1/2}} \\ a_2^2 = r_1^2 \sin^2 (\theta_1 - \theta + \alpha) + h^2(\theta_1 - \theta)^2. \end{array} \right.$$

10. — Equazione integrale determinatrice della $k_1(r, \theta)$.

Le espressioni sopra indicate permettono di ricavare il valore della funzione $F_1 = \sum_{i=0}^{m-1} F_1^i$ in un punto qualsiasi P non appartenente ad una pala: basterà per questo porre nella Ψ_3^i e nella $\Psi_4^i = \frac{\cos \gamma \cos \tau}{a_2}$ successivamente

$$\alpha = a_1 \quad ; \quad \alpha = a_1 - \frac{2\pi}{m} \quad ; \quad \dots \quad \alpha = a_1 + (m-1) \frac{2\pi}{m}$$

se α_1 è l'angolo di cui si deve far ruotare la superficie elicoidale σ a cui appartiene l'asse x per portarla a coincidere con quella a cui appartiene P (mentre a θ_1 si dà sempre il medesimo valore corrispondente al punto D appartenente a σ), e quindi fare la somma delle espressioni così ottenute. Quanto al valore di $\Psi_2 = \sum_i \Psi_2^i$ nel caso di m pale, esso è pure dato dalla già citata

Nota di Sandi Kawada.

La F_1 , così ottenuta, sostituita nella (23) consente di ricavare $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ nello stesso punto P . Ma è ora possibile calcolare anche il valore della componente della velocità secondo la n in un punto M qualsiasi che appartiene ad una pala. Basta di fatto osservare che detta componente è *continua* anche in corrispondenza di una superficie vorticoso: essa perciò sarà data dal valore limite che assume la (23) quando si faccia tendere P a M (ossia α_1 a zero). Si deve soltanto osservare che per $P = M$ la funzione F_1 presenta in questo stesso punto una singolarità, diventando ivi infinita; l'integrale conserva, però, significato, assumendo per esso il valore principale secondo Cauchy, come si può riconoscere osservando che nell'intorno del punto singolare la funzione integranda è del tutto analoga a quella che occorre considerare nella determinazione del campo di moto attorno ad una superficie vorticoso piana, per la quale detta proprietà è ben nota. Così nel caso più semplice in cui il numero delle pale m è *due*, si ricava per F_1 la:

$$(28) \quad F_1 = \frac{W}{\omega} (\Psi_2 + S_1 + S_2)$$

in cui è:

$$(29) \quad -\Psi_2 = \sqrt{1+\mu^2} \left[-\frac{2m^2\mu_0}{r_1} \sum_{c=1}^{c=\infty} c I'_{cm}(cm\mu_0) K_{cm}(cm\mu) \right] - \frac{m}{r_1} \frac{1}{1+\mu^2}$$

per $\mu > \mu_0$

$$= \sqrt{1+\mu^2} \frac{m}{r_1} \left[1 - 2m\mu_0 \sum_{c=1}^{c=\infty} c K'_{cm}(cm\mu_0) I_{cm}(cm\mu) \right] - \frac{m}{r_1} \frac{1}{1+\mu^2}$$

per $\mu < \mu_0$

essendo

$$\mu = \frac{\omega r_1}{V_0} \quad ; \quad \mu_0 = \frac{\omega r}{V_0}$$

mentre I_ν e K_ν sono i simboli delle funzioni di Bessel di ordine ν e di argomento immaginario puro, e I'_ν e K'_ν sono le derivate prime di tali funzioni. Si è posto poi:

$$S_1 = (\Psi_3^0)_{\alpha=0} + (\Psi_4^0)_{\alpha=0} \quad ; \quad S_2 = (\Psi_3^1)_{\alpha=\pi} + (\Psi_4^1)_{\alpha=\pi}.$$

Risulta dalle espressioni sopra scritte per Ψ_3 e Ψ_4

$$(30) \quad S_1 = \frac{\theta_1 - \theta}{r_1 - r} \frac{h^2 + rr_1}{(r^2 + h^2)^{1/2}} \frac{1}{r_{\Delta, P}} + \\ + \frac{[r_1 \cos(\theta_1 - \theta) - r][h^2(\theta_1 - \theta) \cos(\theta_1 - \theta) + r_1^2 \sin(\theta_1 - \theta)]}{r_{\Delta, P}(h^2 + r_1^2)^{1/2}[h^2(\theta_1 - \theta)^2 + r_1^2 \sin^2(\theta_1 - \theta)]}$$

essendo

$$r_{\Delta, P}^2 = (r_1 - r)^2 + (\theta_1 - \theta)^2(r^2 + h^2)$$

e

$$r_{\Delta, P}^2 = r_1^2 + r^2 - 2rr_1 \cos(\theta_1 - \theta) + h^2(\theta_1 - \theta)^2$$

mentre S_2 si ricava da S_1 semplicemente ponendo $-r$ invece di $+r$.

La espressione della Ψ_2 può essere semplificata esprimendo i prodotti delle I_ν per le K_ν e delle K_ν per le I_ν per mezzo delle formole di Nicholson, come ha indicato Sandi Kawada; non riportiamo però qui dette formole perchè per ora non necessarie. Porremo in generale:

$$(31) \quad F_1 = \frac{W}{\omega} (\Psi_2 + S)$$

essendo

$$S = \sum (\Psi_3^i + \Psi_4^i).$$

Si ha in un punto qualsiasi P della pala

$$(32) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{1}{4\pi \rho \omega} \int_0^R \int_{\theta'}^{\theta''} k_1(r, \theta) (\Psi_2 + S) dr d\theta ;$$

è da osservarsi che Ψ_2 è funzione soltanto di r e di r_1 , mentre S è anche funzione di θ e di θ_1 . D'altra parte, poichè la pala è *superficie di corrente*, nel moto relativo ad essa, la componente secondo la n della velocità assoluta, che è proprio la $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$, deve essere

uguale alla analoga componente della velocità di trascinamento, che è data dalla

$$\omega r_1 \sin \beta - V_0 \cos \beta.$$

Si ha pertanto

$$(33) \quad \frac{1}{4\pi\rho\omega} \int_0^R \int_{\theta'}^{\theta''} k_1(r, \theta) (\Psi_2 + S) dr d\theta = \omega r_1 \sin \beta - V_0 \cos \beta$$

che può anche scriversi nella forma

$$(33'') \quad \frac{1}{4\pi W} \int_0^R \int_{\theta'}^{\theta''} \frac{k_1(r, \theta)}{\rho\omega} (\Psi_2 + S) dr d\theta = \frac{\omega r_1}{W} \sin \beta - \frac{V_0}{W} \cos \beta = \\ = \sin \beta \cos \delta - \cos \beta \sin \delta = \sin (\beta - \delta) \quad \beta - \delta = \alpha$$

indicando ora con α l'incidenza del vento relativo sul profilo della pala a distanza r_1 dall'asse, e dove si è posto $\sin \alpha = \alpha$ dato l'ordine di grandezza già prima indicato per detta incidenza.

La (33), o la (33 bis), è un'equazione integrale, che insieme alle condizioni al contorno già poste al n° 8 per la $k'(r, \theta)$, risolve il problema proposto: notando che se si pone, in corrispondenza del profilo a distanza r_1 , $\Gamma' = \frac{W}{\omega} \int_{\theta'}^{\theta} \gamma_r d\theta$, dove γ_r ha il significato ed il valore dato dalla (18), è $\frac{k_1}{\rho\omega} = \frac{\partial^2 \Gamma'}{\partial \theta \partial r}$, si riconosce che la (33 bis) costituisce l'estensione, nel problema dell'elica con pale di larghezza finita, dell'equazione integrale di Prandtl per il problema corrispondente dell'ala di apertura finita.

11. — Risoluzione dell'equazione integrale.

La risoluzione dell'equazione integrale (33), data la grande complessità del nucleo, non è da sperare possa essere ottenuta in forma chiusa; si può tuttavia, nei casi che in generale interessano la tecnica, calcolare la funzione incognita $k_1(r, \theta)$ con una approssimazione tanto grande quanto si desidera procedendo nel modo seguente.

Supponiamo che tutti i bordi di attacco dei profili appartenano al medesimo raggio, così che è, qualunque sia r , $\theta' = 0$. Poniamo poi:

$$(34) \quad \frac{k_1(r, \theta)}{\rho\omega} = \sum_{h=0}^{h=n} \frac{1}{\theta''(r)} \frac{df_h(r)}{dr} g_h(\theta)$$

in cui le $f_h(r)$ sono funzioni, per ora incognite, della r , mentre le $g_h(\theta)$ sono date dalle:

$$(35) \quad g_0(\theta) = \sqrt{\frac{\theta'' - \theta}{\theta}} \quad ; \quad g_1(\theta) = \sqrt{\frac{\theta}{\theta''} - \frac{\theta^2}{\theta''^2}} \quad ;$$

$$g_h(\theta) = \left(\frac{\theta}{\theta''}\right)^{h-1} \sqrt{\frac{\theta}{\theta''} - \frac{\theta^2}{\theta''^2}}.$$

È appena necessario osservare che le $g_h(\theta)$ definite dalle (35), coincidono colle funzioni usate nella teoria approssimata dei profili alari infinitamente sottili per dedurre la legge di variazione della vorticità aderente lungo i profili stessi, e che, grazie alla ipotesi sopra fatta, che i bordi di attacco delle varie sezioni dell'elicoide-pala appartengano al medesimo raggio, la condizione al contorno data al n° 8 risulta senz'altro soddisfatta pur di determinare le $f_h(r)$ in modo che sia $f_h(0) = f_h(R) = 0$.

Sostituiamo la (34) nella (33 bis); le integrazioni rispetto a θ possono essere con relativa facilità eseguite, se si semplifica la espressione della S tenendo conto dell'ordine di grandezza di $\theta_1 - \theta$ in tutto l'intervallo di integrazione, ossia più precisamente se si pone

$$\cos(\theta_1 - \theta) = 1 - \frac{(\theta_1 - \theta)^2}{2} \quad ; \quad \sin(\theta_1 - \theta) = \theta_1 - \theta - \frac{(\theta_1 - \theta)^3}{3}$$

assunzione questa che è giustificata dall'approssimazione già fatta al n° 9. Ora è:

$$\int_0^{\theta''} \frac{k_1(r, \theta)}{\varrho \omega} \Psi_2 d\theta = \frac{\Psi_2}{\theta''(r)} \left[f'_0 \int_0^{\theta''} g_0(\theta) d\theta + f'_1 \int_0^{\theta''} g_1(\theta) d\theta + \dots \right] =$$

$$= \frac{\pi}{2} \Psi_2 \left(f'_0 + \frac{f'_1}{4} + \frac{f'_2}{8} + \dots \right)$$

avendo indicato coll'apice il simbolo di derivata, e poichè Ψ_2 non contiene θ . Poniamo poi

$$\int_0^{\theta''(r)} S g_0(\theta) d\theta = \pi \theta'' G_0(r, r_1, \theta_1) \quad ; \quad \int_0^{\theta''} S g_h(\theta) d\theta = \pi \theta'' G_h(r, r_1, \theta_1).$$

La determinazione delle funzioni G_h è eseguita in Appendice (parte 2ª); esse risultano costituite da integrali ellittici completi di prima, di seconda e di terza specie. Si ricava così dalla (33 bis)

$$(36) \quad \frac{1}{4 W(r_1)} \left\{ \int_0^R \Psi_2(r, r_1) \left(\frac{f'_0}{2} + \frac{f'_1}{8} + \dots \right) dr + \sum_h \int_0^R f'_h(r) G_h(r, r_1, \theta_1) dr \right\} = a(r_1).$$

Procedendo in modo analogo a quello indicato da Sandi Kawada per il problema corrispondente dell'elica con pale di larghezza piccola, così da poter utilizzare i suoi risultati, suddividiamo l'intervallo di integrazione $0 \leq r \leq R$ in n intervallini di ampiezza ε_i , abbastanza piccola, perchè si possa in ciascuno di essi sostituire al diagramma che definisce la legge effettiva di variazione delle f_h il diagramma costituito da un tratto costante, di ordinata uguale al valore della f_h nel punto di mezzo dell'intervallo stesso, seguito e preceduto, nell'intorno degli estremi di questo, da tratti di ampiezza $\eta_i \ll \varepsilon_i$ in cui la f_h presenta variazioni rapide, uguali alla differenza tra il valore della f_h nel tratto che si considera e quello corrispondente al tratto che lo segue o lo precede. Indichiamo con $(f_h)_i$ il valore della f_h nel punto di mezzo dell'intervallo i^{mo} e con $(r)_k$ il valore della r corrispondente all'estremo di sinistra dell'intervallo k^{mo} , mentre con $(r_1)_j$ indichiamo il valore della r_1 per il punto di mezzo dell'intervallo j^{mo} . Imponendo che la (36) risulti soddisfatta per gli n valori di $(r_1)_j$, corrispondenti ai punti di mezzo degli n intervallini otteniamo:

$$\begin{aligned} & \Psi_{2(1,j)} \left[\frac{(f_0)_1}{2} + \frac{(f_1)_2}{8} + \dots \right] + \Psi_{2(2,j)} \left[\frac{(f_0)_2 - (f_0)_1}{2} + \frac{(f_1)_2 - (f_1)_1}{8} + \dots \right] + \\ & \quad + \dots - \Psi_{2(n+1,j)} \left[\frac{(f_0)_n}{2} + \frac{(f_1)_n}{8} + \dots \right] + \\ & \quad + \sum_h [(f_h)_1 G_{h(1,j)} + G_{h(2,j)} [(f_h)_2 - (f_h)_1] + \dots - G_{h(n+1,j)} (f_h)_n] = \\ & \quad = 4W[(r_1)_j] \alpha[(r_1)_j] \end{aligned}$$

od anche

$$\begin{aligned} (37) \quad & \frac{(f_0)_1}{2} [\Psi_{2(1,j)} - \Psi_{2(2,j)} + 2G_{0(1,j)} - 2G_{0(2,j)}] + \\ & + \frac{(f_0)_2}{2} [\Psi_{2(2,j)} - \Psi_{2(3,j)} + 2G_{0(2,j)} - 2G_{0(3,j)}] + \dots + \\ & + \frac{(f_0)_n}{2} [\Psi_{2(n,j)} - \Psi_{2(n+1,j)} + 2G_{0(n,j)} - 2G_{0(n+1,j)}] + \\ & + \frac{(f_1)_1}{8} [\Psi_{2(1,j)} - \Psi_{2(2,j)} + 8G_{1(1,j)} - 8G_{1(2,j)}] + \\ & + \frac{(f_1)_2}{8} [\Psi_{2(2,j)} - \Psi_{2(3,j)} + 8G_{1(2,j)} - 8G_{1(3,j)}] + \dots = 4\alpha W. \end{aligned}$$

avendo posto

$$\Psi_{2(k,j)} = \Psi_2[(r)_k; (r_1)_j] \quad ; \quad G_{h(k,j)} = G_h[(r)_k; (r_1)_j]$$

$$\Psi_{2(\eta+1,j)} = \Psi_2[R, (r_1)_j] \text{ ecc.}$$

L'espressione della funzione generica $\Psi_{2(k,j)}$, che, a rigore, è data dalle (29), può essere semplificata e resa più atta al calcolo numerico osservando che, come ha indicato Sandi Kawada, per valori dell'argomento non troppo piccolo, le funzioni I_ν e K_ν possono essere espresse per mezzo delle formole di Nicholson; risulta, dalla Nota più volte citata di Sandi Kawada, che è:

$$A = \sum_{c=0}^{c=\infty} c I'_{mc}(mc\mu_{0k}) K_{mc}(cm\mu_j) =$$

$$= -\frac{1}{2\mu_{0k}m} \left(\frac{1+\mu_{0k}^2}{1+\mu_j^2} \right)^{1/4} \left[\frac{1}{e^{mt_1}-1} - \frac{1}{2m\mu_{0k}} \left(1 + \frac{1}{\mu_{0k}^2} \right)^{-3/2} \log_e \frac{1}{1-e^{-mt_1}} \right]$$

essendo

$$\mu_{0k} = \frac{\omega(r)_k}{V_0} < \mu_j = \frac{\omega(r_1)_j}{V_0}$$

e

$$t_1 = \sqrt{1+\mu_j^2} - \sqrt{1+\mu_{0k}^2} - \frac{1}{2} \log_e \frac{(\sqrt{1+\mu_j^2}+1)(\sqrt{1+\mu_{0k}^2}-1)}{(\sqrt{1+\mu_j^2}-1)(\sqrt{1+\mu_{0k}^2}+1)}$$

mentre si ha

$$B = \sum c K'_{cm}(cm\mu_{0k}) I_{cm}(cm\mu_j) =$$

$$= -\frac{1}{2m\mu_{0k}} \left(\frac{1+\mu_{0k}^2}{1+\mu_j^2} \right)^{1/4} \left[\frac{1}{e^{mt_1}-1} + \frac{1}{2m\mu_{0k}} \left(1 + \frac{1}{\mu_{0k}^2} \right)^{-3/2} \log_e \frac{1}{1-e^{-mt_1}} \right]$$

in cui è

$$t_2 = \sqrt{1+\mu_{0k}^2} - \sqrt{1+\mu_j^2} + \frac{1}{2} \log_e \frac{(\sqrt{1+\mu_j^2}+1)(\sqrt{1+\mu_{0k}^2}-1)}{(\sqrt{1+\mu_j^2}-1)(\sqrt{1+\mu_{0k}^2}+1)}$$

I valori delle funzioni A e B sono stati già calcolati dall'Istituto Nazionale del Calcolo a cura del Prof. Ghizzetti per una serie di valori di μ_{0k} e di μ_j , e possono perciò essere senz'altro utilizzati anche in questa ricerca.

Le equazioni analoghe alla (37) sono tante, quanti sono gli intervallini in cui abbiamo diviso l'intervallo $0 \leq r \leq R$, ossia sono in numero di n , mentre le incognite in esse contenute sono nh ; possiamo perciò ancora imporre che le equazioni stesse siano soddisfatte per h valori della θ_1 , e quindi che la (36) sia verificata in h punti di ognuna delle n sezioni della pala.

12. — Il problema è così, dal punto di vista formale, risolto; è però evidente la grande laboriosità dei calcoli necessari, e per il numero delle equazioni che devono essere risolte e per il fatto che le funzioni G_h contengono, come è stato detto, integrali ellittici completi di terza specie per i quali non sono ancora state calcolate comode tabelle come per gli altri integrali ellittici completi; è però da osservarsi, a questo proposito, che essi possono essere espressi per mezzo degli integrali ellittici di prima e di seconda specie per mezzo delle formole di Legendre, come è indicato in Appendice (parte 2^a).

Una notevole semplificazione si ottiene se ci si limita a porre

$$\frac{k_1(r, \theta)}{\rho \omega} = f'_0(r) \frac{g_0(\theta)}{\theta''}$$

e a soddisfare la (36) soltanto in corrispondenza dei punti dell'asse della pala, ossia per

$$\theta_1 = \frac{\theta''}{2},$$

perchè in tal guisa la G_0 non contiene che integrali ellittici completi di prima e di seconda specie. È da notare subito che questa semplificazione non altera verosimilmente in modo sensibile i risultati, per quanto si riferisce alla valutazione dell'effetto della larghezza finita delle pale sulle caratteristiche aerodinamiche dell'elica; di fatto, poichè con una opportuna variazione del secondo membro della equazione (36), si può riportare questa ad essere identicamente soddisfatta per tutti i valori di θ_1 , risulta che la sopraddetta assunzione equivale in sostanza ad una *alterazione della forma dei profili* della pala rispetto a quella supposta fino ad ora in questa ricerca. Ora è per lo meno assai verosimile che l'effetto della larghezza finita dipenda in misura piccola dalla forma del profilo.

Così per l'elica a due pale, per la quale l'espressione di $S = S_1 + S_2$ risulta dalla (30), otteniamo:

$$\begin{aligned}
 (38) \quad \kappa_1 &= \int_0^{\theta''} \sqrt{\frac{\theta'' - \theta}{\theta}} S_1 d\theta = \\
 &= \int_0^{\theta''} \sqrt{\frac{\theta'' - \theta}{\theta}} \frac{(h^2 + rr_1)(\theta_1 - \theta) d\theta}{(r^2 + h^2)^{1/2} [(r_1 - r)^2 + (\theta_1 - \theta)^2 (r^2 + h^2)]^{1/2} (r_1 - r)} + \\
 &\quad + \int_0^{\theta''} \sqrt{\frac{\theta'' - \theta}{\theta}} \\
 &\quad d\theta \cdot \frac{\left[(r_1 - r) \left(1 - \frac{(\theta_1 - \theta)^2}{2} \right) + r_1 (\theta_1 - \theta)^2 \right] \left[h^2 (\theta_1 - \theta) \left(1 - \frac{(\theta_1 - \theta)^2}{2} \right) + r_1^2 \left(\theta_1 - \theta - \frac{(\theta_1 - \theta)^3}{3} \right) \right]}{\left[(r_1 - r)^2 + (\theta_1 - \theta)^2 (rr_1 + h^2) \right]^{1/2} (h^2 + r_1^2)^{1/2} \left[h^2 (\theta_1 - \theta)^2 + r_1^2 \left(\theta_1 - \theta - \frac{(\theta_1 - \theta)^3}{3} \right) \right]} = \\
 &= \frac{h^2 + rr_1}{(r_1^2 + h^2)^{1/2}} \frac{1}{r_1 - r} \int_0^{\theta''} \sqrt{\frac{\theta'' - \theta}{\theta}} \frac{(\theta_1 - \theta) d\theta}{[(r_1 - r)^2 + (\theta_1 - \theta)^2 (r^2 + h^2)]^{1/2}} + \\
 &+ \frac{r_1 - r}{(r_1^2 + h^2)^{1/2}} \int_0^{\theta''} \sqrt{\frac{\theta'' - \theta}{\theta}} \frac{d\theta}{(\theta_1 - \theta) [(r_1 - r)^2 + (\theta_1 - \theta)^2 (rr_1 + h^2)]^{1/2}} + \\
 &+ \frac{-2hr_1^2 + rh^2 - r_1^3}{2(h^2 + r_1^2)^{3/2}} \int_0^{\theta''} \sqrt{\frac{\theta'' - \theta}{\theta}} \frac{(\theta_1 - \theta) d\theta}{[(r_1 - r)^2 + (\theta_1 - \theta)^2 (rr_1 + h^2)]^{1/2}} = \\
 &= \frac{h^2 + rr_1}{(r_1^2 + h^2)^{1/2} (r^2 + h^2)^{1/2}} \frac{\theta_1^2}{(c_1^2 + \theta_1^2)^{1/2}} \frac{1}{r_1 - r} \left[\frac{2}{k^2} E(k) + \frac{2(k^2 - 1)}{k^2} K(k) \right] + \\
 &+ \frac{r_1 - r}{(r_1^2 + h^2)^{1/2} (rr_1 + h^2)^{1/2} (c_2^2 + \theta_1^2)^{1/2}} + \frac{(-2h^2 r_1 + rh^2 - r_1^3) \theta_1^2}{2(h^2 + r_1^2)^{3/2} (c_2^2 + \theta_1^2)^{1/2} (rr_1 + h^2)^{1/2}} \\
 &\quad \cdot \left[\frac{2}{k_1^2} E(k_1) + \frac{2(k_1^2 - 1)}{k_1^2} K(k_1) \right]
 \end{aligned}$$

in cui è

$$c_1 = \frac{(r_1 - r)^2}{r^2 + h^2} ; \quad k^2 = \frac{\theta_1^2}{c_1^2 + \theta_1^2} ; \quad c_2^2 = \frac{(r_1 - r)^2}{rr_1 + h^2} ; \quad k_1^2 = \frac{\theta_1^2}{c_2^2 + \theta_1^2}$$

mentre $K(k)$ e $E(k)$ sono rispettivamente gli integrali ellittici completi di prima e di seconda specie.

Per quanto si riferisce all'espressione di $\mathcal{K}_2 = \int_0^{\theta''} \sqrt{\frac{\theta'' - \theta}{\theta}} S_2 d\theta$ osserviamo che, poichè S_2 si deduce da S_1 semplicemente cambiando di segno a r , per i valori di r e di r_1 per i quali è $-rr_1 - h^2 > 0$ essa si può dedurre subito da quella che dà $\mathcal{K}_1$ sostituendo anche in questa $a + r$ la $-r$. Per $-rr_1 + h^2 < 0$, tutte le 4 radici del radicale risultano invece reali, e di conseguenza è necessaria una diversa sostituzione per ridurre gli integrali ellittici alla forma canonica di Legendre. Poichè però per $-rr_1 + h^2 < 0$ è $(r + r_1)^2 > rr_1 - h^2$, mentre $(\theta_1 - \theta)^2$ ha sempre un ordine di grandezza alquanto inferiore all'unità, come già è stato detto, si può ottenere una espressione semplice, approssimata quanto si vuole dell'integrale, quando è soddisfatta la precedente disuguaglianza, procedendo nel modo seguente.

Se è $(r + r_1)^2 > rr_1 - h^2$, essendo $rr_1 - h^2 > 0$, risultano sia $\frac{r^2 + h^2}{(r_1 + r)^2}$, sia $\frac{rr_1 - h^2}{(r + r_1)^2}$, inferiori all'unità, e poichè $(\theta_1 - \theta)^2$ è pure una grandezza piccola, si potrà porre

$$\frac{1}{[(r_1 + r)^2 - (\theta_1 - \theta)^2(r^2 + h^2)]^{1/2}} = \frac{1}{r_1 + r} \left[1 - \frac{1}{2} \frac{r^2 + h^2}{(r + r_1)^2} (\theta_1 - \theta)^2 + \dots \right]$$

e

$$\frac{1}{[(r_1 + r)^2 + (\theta_1 - \theta)^2(h^2 - rr_1)]^{1/2}} = \frac{1}{r_1 + r} \left[1 + \frac{1}{2} \frac{h^2 - rr_1}{(r_1 + r)^2} (\theta_1 - \theta)^2 + \dots \right]$$

in cui, in generale, sarà lecito non considerare i termini con $(\theta_1 - \theta)^4$ ecc. Risulta allora per $h^2 - rr_1 < 0$ (e sempre per $\theta_1 = \frac{\theta''}{2}$)

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_2 &= \int_0^{\theta''} \sqrt{\frac{\theta'' - \theta}{\theta}} S_2 d\theta = \\ &= \frac{\pi}{(r_1^2 + h^2)^{1/2}} + \frac{\pi}{16} \frac{\theta''^2}{(r_1 + r)^2 (r_1^2 + h^2)^{1/2}} - \frac{\pi}{16} \frac{\theta''^2}{(h^2 + r_1^2)^{3/2} (r_1 + r)} + \dots \end{aligned}$$

in cui i termini non scritti sono di un ordine di grandezza uguale, o più piccola, di $\left(\frac{\theta''}{2}\right)^4$. Risulta così senz'altro determinata la G_0 ,

data dalla $G_0 = \frac{1}{\pi \theta''} (\mathcal{K}_1 + \mathcal{K}_2)$, che viene così ad assumere una espressione che si presta bene ai calcoli numerici.

Usando le medesime notazioni indicate nel numero precedente l'equazione determinatrice dei valori della f_0 si riduce alla

$$(39) \quad (f_0)_1[\Psi_{2(1,j)} - \Psi_{2(2,j)} + 2G_{0(1,j)} - 2G_{0(2,j)}] + \\ + (f_0)_2[\Psi_{2(2,j)} - \Psi_{2(3,j)} + 2G_{0(2,j)} - 2G_{0(3,j)}] + \dots + \\ + (f_0)_n[\Psi_{2(n,j)} - \Psi_{2(n+1,j)} + 2G_{0(n,j)} - 2G_{0(n+1,j)}] = 8aW$$

in cui nella G_0 si deve porre $\theta_1 = \frac{\theta''}{2}$, mentre per j si debbono successivamente porre tutti i valori da 1 a n . È appena necessario osservare che la (39) è del tutto analoga a quella di cui già si servì Sandi Kawada per definire la legge di variazione della circolazione lungo il raggio di un'elica a pale strette, differenziandosi soltanto da essa per l'introduzione della funzione G_0 nei coefficienti delle $(f_0)_k$, e non presenta quindi, in sostanza, nessuna maggiore difficoltà di questa, dato che i valori della G_0 possono essere abbastanza facilmente calcolati.

13. — Calcolo della forza sull'elica.

Determinata la funzione $\frac{k^*}{\rho\omega} = \int_0^{r_1} \frac{k_1(r, \theta)}{\rho\omega} dr$, il calcolo della forza che si esercita sopra ogni elemento di pala non presenta più difficoltà.

Per il teorema di Kutta-Joukowski generalizzato, la forza che si esercita sopra un elemento di pala di estensione dr nella direzione del raggio e di lunghezza ds nella direzione dell'elica, sezione della pala col cilindro di raggio r , è data dal prodotto esterno della vorticità aderente per la velocità risultante (del moto relativo) moltiplicato per la densità del fluido e per l'area dell'elemento $ds dr$; se ne deduce che, a meno di grandezze piccole di ordine superiore, la componente di portanza d^2R_p (in direzione cioè normale a detta velocità risultante) è data dalla

$$d^2R_p = \rho dr ds W \gamma_r,$$

mentre la componente di resistenza (nella direzione cioè di W) è (sempre a meno di grandezze piccole di ordine superiore)

$$d^2R_r = \rho dr ds w_n \gamma_r \quad \text{in cui} \quad \gamma_r \text{ e } w_n = \frac{\partial \varphi}{\partial n}$$

hanno i significati già definiti precedentemente. Ne risulta per la componente della forza nella direzione dell'asse del propulsore,

$$d^2T = \varrho dr ds \gamma_r (W \cos \delta - w_n \sin \delta)$$

e per quella in direzione normale

$$d^2Q = \varrho dr ds \gamma_r (W \sin \delta + w_n \cos \delta).$$

Poichè W , δ , w_n sono costanti per tutti i punti di un medesimo profilo si ha:

$$(40) \quad \begin{cases} \frac{dT_1}{dr} = \varrho (W \cos \delta - w_n \sin \delta) \Gamma \\ \frac{dQ_1}{dr} = \varrho (W \sin \delta + w_n \cos \delta) \Gamma \end{cases}$$

avendo sempre indicato con $\Gamma = \int_0^l \gamma_r ds$ la circolazione totale attorno al profilo della pala in esame. Si deve però subito osservare che le (40) non dànno *tutte* le $\frac{dT}{dr}$ e $\frac{dQ}{dr}$: si deve di fatto aggiungere ad esse ancora il termine corrispondente alla così detta *aspirazione allo spigolo*, dovuta al fatto che, diventando infinita la velocità al bordo di attacco del profilo, la pressione ivi risulta infinita e negativa. Ora il calcolo di questa aspirazione allo spigolo si fa in modo semplice se si osserva che essa dipende unicamente dai valori locali della velocità nell'intorno dello spigolo stesso, e questi risultano uguali (a meno di quantità che si conservano finite al tendere di θ_1 a zero) ai valori che vi sarebbero prodotti se la superficie vorticoso equivalente alla pala fosse costituita da filetti rettilinei disposti secondo il raggio, di intensità costante, uguale al valore che essi hanno in corrispondenza del profilo in esame, ossia, come se il moto in corrispondenza dello stesso profilo fosse piano. Riportiamo qui la sola dimostrazione che si riferisce alla componente della velocità normale alla superficie elicoidale della pala, w_n , per le eliche bipale, poichè essa si fa facilmente servendosi delle sole formole già scritte nei numeri precedenti. Si ha di fatto dalla (32), tenendo presenti le (38), a meno di termini che si conservano finiti al tendere di θ_1 a zero

$$w_n = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\theta_{\max}} \frac{d\theta}{\theta_1 - \theta} \int_{r'}^{r''} \frac{k_1}{\varrho \omega} \frac{r_1 - r}{(r_1^2 + h^2)^{1/2}} \frac{dr}{[(r_1 - r)^2 + (\theta_1 - \theta)^2(r^2 + h^2)]^{1/2}}$$

Ma poiché i vortici a distanza dal bordo di attacco ($\theta_1 = 0$) producono in esso velocità finita, (sempre non considerando i termini che rimangono finiti al tendere di θ_1 a zero) si potranno considerare nella funzione da integrare solo valori piccoli di $\theta_1 - \theta$, così che sia lecito porre

$$[(r_1 - r)^2 + (\theta_1 - \theta)^2(r^2 + h^2)]^{1/2} = \pm (r_1 - r)$$

(dove si deve prendere il segno $+$ se $r_1 > r$, il segno $-$ se $r_1 < r$); tenendo conto poi che è

$$\frac{k_1}{\rho\omega} = \frac{\partial^2 \Gamma'}{\partial \theta \partial r} \quad \text{e che} \quad \frac{\partial \Gamma'}{\partial \theta} = \frac{k^*}{\rho\omega}$$

si annulla per $r = r'$ e per $r = r''$ si ricava,

$$(41) \quad w_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^\varepsilon \frac{\partial}{\partial s} (\Gamma')_{r=r_1} \frac{ds}{s_1 - s}$$

avendo indicato con s e con s_1 le ascisse curvilinee, misurate sull'elica sezione della pala a partire dal bordo di attacco, rispettivamente del punto in cui è disposto il vortice di circolazione $\frac{\partial \Gamma'}{\partial s}$

e di quello in cui si calcola la w_n , ed essendo ε l'ascissa curvilinea di un punto di detta elica alquanto prossimo al bordo di attacco, così che nell'intervallo $0 \div \varepsilon$ siano lecite le semplificazioni nella espressione della funzione integranda sopra indicate. Ora la (41) coincide coll'analogha espressione per un'ala di apertura infinita, donde discende senz'altro la proprietà prima enunciata, almeno per quanto si riferisce alla componente w_n ⁽¹⁾. Si potrà perciò per calcolare l'aspirazione allo spigolo che si esercita sopra il tratto di pala lungo dr applicare la medesima formola che dà l'aspirazione stessa nel caso del moto piano; risulta, se si indica detta forza con $(dR_r)_1$ e si considera espressa la $\frac{k_1}{\rho\omega}$ colla (34),

$$(42) \quad (dR_r)_1 = - \frac{1}{4} \pi \rho \frac{f_0^2 l}{r_1^2 + h^2}.$$

⁽¹⁾ Ricordo che altra dimostrazione della stessa proprietà per un'ala di allungamento finito e in moto vario è data da C. POSSIO in *Determinazione dell'azione aerodinamica corrispondente alle piccole oscillazioni del velivolo*, « L'Aerotecnica », dicembre 1938; e *Sulla determinazione dei coefficienti aerodinamici che interessano la stabilità del velivolo*, « Pontificia Accademia delle Scienze », 1938.

Risulta allora per le $\frac{dT}{dr}$ e $\frac{dQ}{dr}$ l'espressione definitiva:

$$(43) \quad \begin{cases} \frac{dT}{dr} = \varrho W (\cos \delta - a \sin \delta) \Gamma + \frac{1}{4} \pi \varrho \frac{f_0^2 l}{r_1^2 + h^2} \sin \delta \\ \frac{dQ}{dr} = \varrho W (\sin \delta + a \cos \delta) \Gamma - \frac{1}{4} \pi \varrho \frac{f_0^2 l}{r_1^2 + h^2} \cos \delta \end{cases}$$

che permettono di calcolare la propulsione sviluppata e la coppia assorbita dall'elica.

14. — Calcolo dell'elica (a pale larghe) avente caratteristiche aerodinamiche prefissate.

Il procedimento indicato nei numeri precedenti permette di determinare le caratteristiche aerodinamiche di un'elica, quando questa sia perfettamente definita dal punto di vista geometrico. È però anche possibile, servendosi delle espressioni sopra date, ricavare un metodo che permetta il calcolo diretto dell'elica, quando siano fissate le caratteristiche aerodinamiche che si vogliono ottenere ed il raggio di essa.

Prendiamo a tale scopo ancora in esame la equazione (33 bis), che scriviamo nella forma:

$$\frac{1}{4\pi W} \int_0^R \int_{\theta'}^{\theta''} \frac{k_1(r, \theta)}{\varrho \omega} \Psi_2 dr d\theta + \frac{1}{4\pi W} \int_0^R \int_{\theta'}^{\theta''} \frac{k_1(r, \theta)}{\varrho \omega} S dr d\theta = a$$

Poichè la Ψ_2 è indipendente da θ , l'integrazione rispetto a θ nel primo integrale doppio può essere senz'altro fatta; risulta così:

$$\frac{1}{4\pi W} \int_0^R \frac{d\Gamma}{dr} \Psi_2 dr + \frac{1}{4\pi W} \int_0^R \int_{\theta'}^{\theta''} \frac{k_1(r, \theta)}{\varrho \omega} S dr d\theta = a.$$

Ma ora $\frac{1}{4\pi W} \int_0^R \frac{d\Gamma}{dr} \Psi_2 dr$ è nella teoria normale dell'elica a pale strette l'incidenza indotta a_i in corrispondenza del generico profilo a distanza r_1 dall'asse dovuta ai vortici liberi; conservando ad a_i lo stesso significato, possiamo così scrivere:

$$\int_0^R \int_{\theta'}^{\theta''} \frac{k_1(r, \theta)}{\varrho \omega} S dr d\theta = 4\pi W (a - a_i)$$

ed anche moltiplicando e dividendo per

$$\int_0^{r_1} \int_{\theta'}^{\theta''} \frac{k_1(r, \theta)}{\varrho \omega} dr d\theta = \Gamma$$

e ponendo

$$(44) \quad A = \frac{\int_0^{r_1} \int_{\theta'}^{\theta''} \frac{k_1(r, \theta)}{\rho \omega} dr d\theta}{\frac{l}{4} \int_0^R \int_{\theta'}^{\theta''} \frac{k_1(r, \theta)}{\rho \omega} S dr d\theta}$$

$$(45) \quad \Gamma = \pi A l W(\alpha - \alpha_i)$$

che ha una immediata interpretazione: da essa appare di fatto che è lecito calcolare la circuitazione attorno ad un generico profilo e quindi la sua portanza, coll'ordinaria teoria dell'elica a pale strette, pur di assumere il coefficiente angolare di portanza per allungamento infinito non uguale a 2π ma uguale a $2\pi A$.

I due integrali, dai quali risulta il valore di A , dipendono unicamente dalla legge secondo la quale la forza $\frac{k^*}{\rho \omega}$ è distribuita sulla pala, e dalla forma di questa; ora, detta legge non ha sostanziali diversità da quella corrispondente al caso dell'ala, mentre la caratteristica differenza tra la forma di questa e quella della pala d'elica è soltanto il notevole *svergolamento* che questa presenta; appare pertanto logico che le leggi di variazione del coefficiente angolare di portanza per allungamento infinito, definito come sopra è indicato, al variare della larghezza del profilo nel caso della pala ed in quello dell'ala siano analoghe, ed appare anche assai verosimile che il valor medio di A (per i vari profili distribuiti lungo il raggio) ed il valor medio corrispondente per i profili dell'ala lungo l'apertura siano prossimi fra di loro. È questo il fondamento razionale del risultato trovato dalle osservazioni dei valori sperimentali dei coefficienti aerodinamici caratteristici dell'elica indicato nei primi numeri di questa ricerca.

Possiamo riconoscere che, se la pala è molto stretta a fronte del raggio, si ha $A = 1$. La dimostrazione è molto semplice nel caso dell'elica a due pale per la quale la funzione S ha l'espressione definita dalla (30). Di fatto in tal caso, considerando $\theta_1 - \theta$ come grandezza piccola del primo ordine, e trascurando i termini che hanno un ordine di grandezza più piccolo, S_1 si riduce alla

$$(46) \quad S_1 = \frac{r_1 - r}{(r_1^2 + h^2)^{1/2}} \frac{1}{(\theta_1 - \theta)[(r_1 - r)^2 + (\theta_1 - \theta)^2(r^2 + h^2)]^{1/2}} =$$

$$= \pm \frac{1}{(r_1^2 + h^2)^{1/2}(\theta_1 - \theta)}$$

dove si deve prendere il segno $+$ per $r_1 > r$ ed il segno $-$ per $r_1 < r$, mentre è in ogni caso

$$S_2 = \frac{1}{(r_1^2 + h^2)^{1/2}(\theta_1 - \theta)}.$$

Si ha pertanto:

$$(47) \quad \int_{\theta'}^{\theta_{\max}} d\theta \int_{r'}^{r''} \frac{k_1}{\rho \omega} S dr = \\ = \int_{\theta_1 - \theta}^{\theta_{\max}} \frac{d\theta}{\theta_1 - \theta} \int_{r'}^{r''} \frac{\partial^2 \Gamma'}{\partial \theta \partial r} \left[\pm \frac{1}{(r_1^2 + h^2)^{1/2}} + \frac{1}{(r_1^2 + h^2)^{1/2}} \right] dr = 2 \int_0^1 \frac{\partial(\Gamma')_{r=r_1}}{\partial s} \frac{ds}{s_1 - s}$$

poichè per $r = r'$ e per $r = r''$ la $\frac{\partial \Gamma'}{\partial \theta}$ si annulla. D'altra parte la equazione (33 bis) si riduce, in queste condizioni, ad assumere la forma:

$$\frac{1}{4\pi W} \int_0^R \int_{\theta'}^{\theta''} \frac{k_1(r, \theta)}{\rho \omega} \Psi_2 dr d\theta + \frac{1}{2\pi W} \int_{\theta'}^{\theta''} d\theta \frac{\partial \Gamma'}{\partial \theta} \frac{1}{\theta_1 - \theta} = \alpha(r_1)$$

od anche, per la indipendenza di Ψ_2 da θ , e supponendo ancora, qualunque sia r_1 , $\theta'(r_1) = 0$

$$\frac{1}{4\pi W} \int_0^R \frac{d\Gamma}{dr} \Psi_2 dr + \frac{1}{2\pi W} \int_0^{\theta''(r_1)} \frac{\partial \Gamma'}{\partial \theta} \frac{d\theta}{\theta_1 - \theta} = \alpha(r_1)$$

che si scinde, in modo analogo a quello che è già stato indicato da Mattioli (1) nel problema relativo all'ala, nelle due equazioni:

$$(48) \quad \begin{cases} \frac{1}{4\pi} \int_0^R \frac{d\Gamma}{dr} \Psi_2 dr - W\alpha(r_1) = \varphi(r_1) \\ \frac{1}{2\pi} \int_0^{\theta''(r_1)} \left(\frac{\partial \Gamma'}{\partial \theta} \right)_{r=r_1} \frac{d\theta}{\theta_1 - \theta} = -\varphi(r_1). \end{cases}$$

La seconda delle due equazioni integrali sopra scritte può essere subito risolta e dà:

$$\frac{\partial \Gamma'(r, \theta)}{\partial \theta} = -\varphi(r)^2 \sqrt{\frac{\theta''(r) - \theta}{\theta}}$$

(1) G. D. MATTIOLI, *Theorie der dünnen Tragflügels bei beliebigen Umrisformen*, « Ingenieur Arch. », H. 3 (1939).

ossia

$$\Gamma(r) = \Gamma'(\theta'', r) = -2\varphi(r) \int_0^{\theta''(r)} \sqrt{\frac{\theta'' - \theta}{\theta}} d\theta = -\theta''(r) \varphi(r) \pi$$

da cui

$$\varphi(r) = -\frac{\Gamma(r)}{\pi\theta''(r)}, \quad \text{ossia} \quad \frac{\varphi(r)}{(r^2 + h^2)^{1/2}} = -\frac{\Gamma(r)}{\pi l}$$

avendo indicato al solito con $\theta''(r)(r^2 + h^2)^{1/2} = l$ la corda del profilo generico.

Risulta:

$$\frac{1}{2\pi(r_1^2 + h^2)^{1/2}} \int_0^{\theta''(r_1)} \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial \theta} \right)_{r=r_1} \frac{d\theta}{\theta_1 - \theta} = -\frac{\varphi(r_1)}{(r_1^2 + h^2)^{1/2}} = -\frac{\Gamma(r_1)}{\pi l}.$$

Ma è pure

$$\int_0^{r_1} \int_0^{\theta''(r_1)} \frac{k_1}{\rho\omega} dr d\theta = \Gamma(r_1)$$

da cui appare senz'altro che è $A = 1$.

Se le pale dell'elica sono troppo larghe perchè sia lecita la sostituzione ad S_1 e ad S_2 delle espressioni date dalle (46), si potrà ottenere un valore approssimato di A ponendo per $\frac{k_1(r, \theta)}{\rho\omega}$ l'analogica funzione determinata coll'ordinaria teoria dell'elica a pale strette. Questo procedimento si presta bene per calcolare l'elica in modo da realizzare, per un dato rapporto di funzionamento $\frac{V_0}{\omega R}$, le condizioni di *massimo* per il *rendimento indotto*. Di fatto, in tal caso, è nota dalle ricerche di Goldstein ⁽¹⁾, la legge secondo la quale deve variare la circolazione lungo le pale; ponendo ancora:

$$\frac{k_1(r, \theta)}{\rho\omega} = \frac{1}{\theta''} \sqrt{\frac{\theta'' - \theta}{\theta}} \frac{df_0(r)}{dr}$$

si ricava

$$\Gamma(r_1) = \int_0^{\theta''} \int_0^{r_1} \frac{k_1(r, \theta)}{\rho\omega} dr d\theta = \frac{\pi}{2} f_0(r_1)$$

da cui risulta $f_0(r) = \frac{2}{\pi} \Gamma(r)$, che sostituita nella (44) permette di calcolare per ogni profilo a distanza r_1 dall'asse il corrispondente

⁽¹⁾ GOLDSTEIN, *On the vortex theory of screw-propellers*, • Proceedings of the Royal Society •. 123, 1929.

valore di A , quando si ponga nell'integrale a denominatore $\theta_1 = \frac{\theta''}{2}$, come è stato detto nel n° 12, e quindi per

$$\int_0^{\theta''} \sqrt{\frac{\theta'' - \theta}{\theta}} S d\theta$$

l'espressione indicata nel numero stesso.

Ricavato per ogni r_1 il valore di A , e quindi del coefficiente angolare di portanza per allungamento infinito, la normale *teoria alare* dell'elica permette di calcolare la larghezza di ogni profilo, e l'angolo di calettamento di questo necessari per ottenere il desiderato valore di Γ attorno ad esso. L'applicazione pratica del metodo ora schematizzato richiede solo la tabellazione dei valori numerici dell'integrale a denominatore di (44), che non presenta difficoltà se non per il tempo che richiedono i calcoli.

APPENDICE - PARTE I.

Determinazione delle funzioni Ψ_3 e Ψ_4 (n. 9-10).

Assumiamo, per ora, l'asse x coincidente colla retta AB ; le equazioni parametriche dell'elica a cui appartiene il punto D , se indichiamo con θ^* il parametro, sono:

$$x = r \cos \theta^* \quad ; \quad y = r \sin \theta^* \quad ; \quad z = h\theta^*$$

e quindi i coseni direttori della retta τ tangente ad essa in D , se θ_1^* è il valore del parametro corrispondente a detto punto, sono

$$\begin{aligned} \cos(\tau, x) &= -\frac{r \sin \theta_1^*}{(r^2 + h^2)^{1/2}} \quad ; \quad \cos(\tau, y) = \frac{r \cos \theta_1^*}{(r^2 + h^2)^{1/2}} \quad ; \\ \cos(\tau, z) &= \frac{h}{(r^2 + h^2)^{1/2}} \end{aligned}$$

mentre le coordinate del punto A , in cui detta tangente interseca il piano (x, y) sono

$$x_{A_1} = \theta_1^* r \sin \theta_1^* + r \cos \theta_1^* \quad ; \quad y_{A_1} = -\theta_1^* r \cos \theta_1^* + r \sin \theta_1^* \quad ; \quad z_{A_1} = 0.$$

Le coordinate del punto P sono invece:

$$x_P = r_1 \cos(\theta_1^* + \alpha) \quad ; \quad y_P = r_1 \sin(\theta_1^* + \alpha) \quad ; \quad z_P = h\theta_1^*.$$

Deduciamo così i coseni direttori della retta DP che risultano

$$\cos (DP, x) = \frac{\cos \theta_1^* (r_1 \cos \alpha - r) - r_1 \sin \alpha \sin \theta_1^*}{r_{DP}}$$

$$\cos (DP, y) = \frac{\sin \theta_1^* (r_1 \cos \alpha - r) + r_1 \sin \alpha \cos \theta_1^*}{r_{DP}}$$

$$\cos (DP, z) = 0 \quad \text{in cui è} \quad r_{DP}^2 = r_1^2 + r^2 - 2rr_1 \cos \alpha$$

mentre i coseni direttori della retta A_1P sono dati dalle

$$\cos (A_1P, x) = \frac{\cos \theta_1^* (r_1 \cos \alpha - r) - \sin \theta_1^* (r_1 \sin \alpha + r\theta_1^*)}{r_{A_1P}}$$

$$\cos (A_1P, y) = \frac{\sin \theta_1^* (r_1 \cos \alpha - r) + \cos \theta_1^* (r_1 \sin \alpha + r\theta_1^*)}{r_{A_1P}}$$

$$\cos (A_1P, z) = \frac{h\theta_1^*}{r_{A_1P}}$$

in cui è

$$r_{A_1P}^2 = r_1^2 + r^2 - 2rr_1 \cos \alpha + \theta_1^{*2}(r^2 + h^2) + 2rr_1\theta_1^* \sin \alpha.$$

Possiamo ora subito ricavare

$$\begin{aligned} \cos \mu_1 &= \cos (A_1P, \tau) = \\ &= \frac{-r \sin \theta_1^* [\cos \theta_1^* (r_1 \cos \alpha - r) - \sin \theta_1^* (r_1 \sin \alpha + r\theta_1^*)]}{(r^2 + h^2)^{1/2} r_{A_1P}} + \\ &+ \frac{r \cos \theta_1^* [\sin \theta_1^* (r_1 \cos \alpha - r) + \cos \theta_1^* (r_1 \sin \alpha + r\theta_1^*)] + h^2 \theta_1^*}{(r^2 + h^2)^{1/2} r_{A_1P}} = \\ &= \frac{\theta_1^* (r^2 + h^2) + rr_1 \sin \alpha}{(r^2 + h^2)^{1/2} r_{A_1P}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos \mu_2 &= \cos (DP, \tau) = \\ &= \frac{-r \sin \theta_1^* [\cos \theta_1^* (r_1 \cos \alpha - r) - r_1 \sin \alpha \sin \theta_1^*]}{(r^2 + h^2)^{1/2} r_{DP}} + \\ &+ \frac{r \cos \theta_1^* [\sin \theta_1^* (r_1 \cos \alpha - r) + r_1 \sin \alpha \cos \theta_1^*]}{(r^2 + h^2)^{1/2} r_{DP}} = \\ &= \frac{rr_1 \sin \alpha}{r_{DP} (r^2 + h^2)^{1/2}} \end{aligned}$$

Per calcolare la distanza a_1 del punto P dalla retta A_1D , conduciamo da P il piano perpendicolare alla retta A_1D e determiniamo il punto P_1 di intersezione di detto piano colla A_1D . Ora l'equazione della retta A_1D è

$$\frac{x - r \cos \theta_1^*}{-r \sin \theta_1^*} = \frac{y - r \sin \theta_1^*}{r \cos \theta_1^*} = \frac{z - h \theta_1^*}{h}$$

mentre quella del piano è:

$$-r \sin \theta_1^* [x - r_1 \cos (\theta_1^* + \alpha)] + r \cos \theta_1^* [y - r_1 \sin (\theta_1^* + \alpha)] + h(z - h \theta_1^*) = 0.$$

Le coordinate del punto P_1 risultano così:

$$x_0 = r \cos \theta_1^* - r \sin \theta_1^* \frac{rr_1}{r^2 + h^2} \sin \alpha ; \quad y_0 = r \sin \theta_1^* + r \cos \theta_1^* \frac{rr_1}{r^2 + h^2} \sin \alpha$$

$$z_0 = h \left(\theta_1^* + \frac{rr_1}{r^2 + h^2} \sin \alpha \right)$$

e pertanto è:

$$a_1^2 = \overline{PP_1^2} = r^2 - \frac{rr_1}{r^2 + h^2} \sin^2 \alpha rr_1 - 2rr_1 \cos \alpha + r_1^2.$$

Se scriviamo l'equazione del piano generico passante per P

$$a(x - x_P) + b(y - y_P) + c(z - z_P) = 0$$

ed imponiamo la condizione che questo piano contenga la retta A_1D , ricaviamo per i parametri di direzione a, b, c della normale al piano le equazioni

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{a}{c} \sin \theta_1^* + \frac{b}{c} \cos \theta_1^* + \frac{h}{r} = 0 \\ \frac{a}{c} [r \cos \theta_1^* - r_1 \cos (\theta_1^* + \alpha)] + \frac{b}{c} [r \sin \theta_1^* - r_1 \sin (\theta_1^* + \alpha)] = 0 \end{array} \right.$$

dalle quali risulta che i coseni direttori di questa normale sono rispettivamente proporzionali a:

$$\frac{h}{r} [r \sin \theta_1^* - r_1 \sin (\theta_1^* + \alpha)] ; \quad -\frac{h}{r} [r \cos \theta_1^* - r_1 \cos (\theta_1^* + \alpha)] ; \quad r - r_1 \cos \alpha.$$

Il fattore di proporzionalità Λ risulta dato dalla

$$\Lambda^2 = (r - r_1 \cos \alpha)^2 \left(1 + \frac{h^2}{r^2}\right) + \frac{h^2}{r^2} r_1^2 \sin^2 \alpha.$$

D'altra parte i coseni direttori della normale alla superficie elicoidale in P sono proporzionali rispettivamente a

$$h \sin (\theta_1^* + \alpha) \quad ; \quad -h \cos (\theta_1^* + \alpha) \quad ; \quad r_1$$

e quindi otteniamo

$$\begin{aligned} \cos \nu &= \frac{h[r \sin \theta_1^* - r_1 \sin (\theta_1^* + \alpha)]h \sin (\theta_1^* + \alpha)}{r\Lambda(r_1^2 + h^2)^{1/2}} + \\ &+ \frac{h[r \cos \theta_1^* - r_1 \cos (\theta_1^* + \alpha)]h \cos (\theta_1^* + \alpha)}{r\Lambda(r_1^2 + h^2)^{1/2}} + \\ &+ \frac{r_1(r - r_1 \cos \alpha)}{(r_1^2 + h^2)^{1/2}\Lambda} = \frac{r \cos \alpha (h^2 - r_1^2) - r_1(h^2 - r^2)}{(r_1^2 + h^2)^{1/2}\Lambda r} \end{aligned}$$

Dai valori sopra indicati delle coordinate di P si ricava che il coseno dell'angolo che la retta AP forma coll'asse x è:

$$\cos \gamma = \frac{r_1 \cos (\theta_1^* + \alpha) - r}{r_{AP}}$$

essendo

$$r_{AP}^2 = r_1^2 + r^2 - 2rr_1 \cos (\theta_1^* + \alpha) + h^2\theta_1^{*2}.$$

Essendo i coseni direttori della retta normale al piano $(x; P)$ proporzionali rispettivamente a

$$0 \quad ; \quad -h\theta_1^* \quad ; \quad r_1 \sin (\theta_1^* + \alpha)$$

ricaviamo

$$\cos \tau = \frac{h^2\theta_1^* \cos (\theta_1^* + \alpha) + r_1^2 \sin (\theta_1^* + \alpha)}{(h^2 + r_1^2)^{1/2}[h^2\theta_1^{*2} + r_1^2 \sin^2 (\theta_1^* + \alpha)]^{1/2}}$$

mentre la distanza a_2 di P dall'asse x è data dalla

$$a_2^2 = r_1^2 \sin^2 (\theta_1^* + \alpha) + h^2\theta_1^{*2}.$$

Se ora prendiamo l'asse x non passante per A , ma sempre passante per un punto dell'elica a cui appartiene AD , ed indi-

chiamo con θ il valore del parametro corrispondente ad A , e con θ_1 quello appartenente a D , basterà per ottenere le espressioni corrispondenti di Ψ_3 e di Ψ_4 sostituire nelle formole sopra scritte a θ_1^* la $\theta_1 - \theta$.

PARTE II. - Determinazione delle funzioni G_h (per l'elica bipala).

Ricordiamo innanzi tutto l'espressione di alcuni integrali ellittici, per mezzo dei quali risulta poi facile esprimere le funzioni G_h .

Sia la y la funzione della x definita dalla

$$y^2 = (1 - x^2)(1 - k^2 + k^2 x^2)$$

(in cui è sempre $0 \leq k \leq 1$, mentre la x varia nell'intervallo $-1 \div 1$). Si ha allora subito

$$J_0 = \int_{-1}^1 \frac{dx}{y} = 2K(k) \quad ; \quad J_1 = \int_{-1}^1 \frac{x dx}{y} = 0 ;$$

$$J_2 = \int_{-1}^1 \frac{x^2 dx}{y} = \frac{2}{k^2} E(k) + 2 \frac{k^2 - 1}{k^2} K(k)$$

in cui E e K sono gli integrali ellittici completi di 2^a e di 1^a specie. Si ricava poi, se p è un numero qualsiasi interno all'intervallo $-1 \div 1$,

$$\begin{aligned} H_1(p, k) &= \int_{-1}^1 \frac{dx}{\left(x - \frac{1}{p}\right)y} = \int_0^\pi \frac{d\varphi}{\left(\cos \varphi - \frac{1}{p}\right)\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = \\ &= -p \int_0^\pi \frac{d\varphi}{(1 - p \cos \varphi)\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = -p \int_0^\pi \frac{1 - p \cos \varphi}{1 - p^2 \cos^2 \varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = \\ &= -p \int_0^\pi \frac{d\varphi}{(1 - p^2 \cos^2 \varphi)\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = \\ &= -\frac{p}{1 - p^2} \int_0^\pi \frac{d\varphi}{1 + \frac{p^2}{1 - p^2} \sin^2 \varphi} \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = \\ &= -\frac{2p}{1 - p^2} F\left(\frac{p^2}{1 - p^2}; k; \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

avendo posto $x = \cos \varphi$ ed avendo indicato con $\Pi\left(\frac{p^2}{(1-p^2)}; k; \frac{\pi}{2}\right)$ l'integrale ellittico completo di terza specie relativo al modulo k ed al parametro $\frac{p^2}{1-p^2}$. Poniamo ancora

$$y^2 = b_0 \left(x - \frac{1}{p}\right)^4 + 4b_1 \left(x - \frac{1}{p}\right)^3 + 6b_2 \left(x - \frac{1}{p}\right)^2 + 4b_3 \left(x - \frac{1}{p}\right) + b_4;$$

Ricaviamo:

$$b_0 = -k^2; \quad b_1 = -\frac{k^2}{p}; \quad b_2 = \frac{2k^2 - 1}{6} - \frac{k^2}{p^2}$$

$$b_3 = -\frac{k^2}{p^3} + \frac{1}{2} \frac{2k^2 - 1}{p}; \quad b_4 = 1 - k^2 - \frac{k^2}{p^4} - \frac{2k^2 - 1}{p^2}.$$

Indicando con

$$H_r = \int_{-1}^1 \frac{dx}{\left(x - \frac{1}{p}\right)^r y},$$

si hanno per le H_r le formole di ricorrenza ⁽¹⁾

$$\begin{cases} b_0 \left(J_2 - \frac{2}{p} J_1 + \frac{1}{p^2} J_0\right) - 2b_1 \left(J_1 - \frac{J_0}{p}\right) - 2b_3 H_1 - b_4 H_2 = 0 \\ -2b_1 J_0 - 6b_2 H_1 - 6b_3 H_2 - 2b_4 H_3 = 0 \\ -b_0 J_0 - 6b_1 H_1 - 12b_2 H_2 - 10b_3 H_3 - 3b_4 H_4 = 0 \end{cases}$$

ecc..., dalle quali ricaviamo

$$H_2 = \frac{b_0}{b_4} J_2 + J_0 \left(\frac{b_0}{b_4} \frac{1}{p^2} - \frac{2b_1}{b_4} \frac{1}{p} \right) -$$

$$- \frac{2b_3}{b_4} H_1 = \frac{b_0}{b_4} \left[\frac{2}{k^2} E(k) + 2 \frac{k^2 - 1}{k} K(k) \right] +$$

$$+ \frac{1}{p b_4} \left(\frac{b_0}{p} - 2b_2 \right) 2K(k) + \frac{4b_3}{b_4} \frac{p}{1-p^2} \Pi\left(\frac{p^2}{1-p^2}; k; \frac{\pi}{2}\right)$$

$$H_3 = -\frac{b_1}{b_4} J_0 - \frac{3b_2}{b_4} H_1 - \frac{3b_3}{b_4} H_2 = -\frac{2b_1}{b_4} K(k) - \frac{3b_2}{b_4} H_1 - \frac{3b_3}{b_4} H_2.$$

⁽¹⁾ F. TRICOMI, *Funzioni ellittiche*, pag. 64 e segg.

Poniamo ora

$$\pi\theta''G_h = G_{1h} + G_{2h} = \int_0^{\theta''} g_h S_1 d\theta + \int_0^{\theta''} g_h S_2 d\theta.$$

Valendosi della forma semplificata di S_1 (e quindi anche di S_2) indicata al n° 12, si vede che il calcolo di G_{1h} si riduce a quello di determinare gli integrali del tipo

$$\int_0^{\theta''} g_h \frac{(\theta_1 - \theta) d\theta}{[a + b(\theta_1 - \theta)^2]^{1/2}}$$

essendo

$$a = (r_1 - r)^2 \quad ; \quad b = h^2 + r^2$$

e

$$\int_0^{\theta''} g_h \frac{d\theta}{(\theta_1 - \theta)[a + b_1(\theta_1 - \theta)^2]^{1/2}}$$

essendo $b_1 = h^2 + rr_1$; precisamente è

$$\begin{aligned} G_{1h} = & \frac{1}{r_1 - r} \frac{h^2 + rr_1}{(r_1^2 + h^2)^{1/2}} \int_0^{\theta''} g_h \frac{(\theta_1 - \theta) d\theta}{[a + b(\theta_1 - \theta)^2]^{1/2}} + \\ & + \frac{r_1 - r}{(r_1^2 + h^2)^{1/2}} \int_0^{\theta''} \frac{d\theta}{(\theta_1 - \theta)[a + b_1(\theta_1 - \theta)^2]^{1/2}} + \\ & + \frac{-2h^2r_1 + rh^2 - r_1^3}{2(h^2 + r_1^2)^{3/2}} \int_0^{\theta''} g_h \frac{(\theta_1 - \theta) d\theta}{a + b_1(\theta_1 - \theta)^2} \end{aligned}$$

mentre la espressione corrispondente di G_{2h} si ottiene dalla precedente cambiando $+r$ in $-r$. Ora si ha

$$I_0 = \int_0^{\theta''} \sqrt{\frac{\theta'' - \theta}{\theta}} \frac{(\theta_1 - \theta) d\theta}{[a + b(\theta_1 - \theta)^2]^{1/2}} = \frac{1}{b^{1/2}} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{(\alpha_1 - \chi) \chi d\chi}{(\chi - \alpha_2)^{1/2} (\alpha_1 - \chi)^{1/2} (c_1 + \chi^2)^{1/2}}$$

avendo posto

$$\theta = \theta_1 + \chi \quad ; \quad \alpha_1 = \theta'_1 = \theta'' - \theta_1 \quad ; \quad \alpha_2 = -\theta_1 \quad ; \quad c_1 = \frac{a}{b} = \frac{(r_1 - r)^2}{h^2 + r^2}.$$

Facciamo la sostituzione ⁽¹⁾

$$\chi = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} - \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} \frac{n - \cos \varphi}{1 - n \cos \varphi}$$

⁽¹⁾ F. TRICOMI, *Funzioni ellittiche*, pag. 64 e segg.

essendo

$$n = \operatorname{tg} \frac{\mu_2 - \mu_1}{2} \operatorname{tg} \frac{\mu_2 + \mu_1}{2} \quad ; \quad \operatorname{tg} \mu_1 = \frac{a_1}{c_1} \quad ; \quad \operatorname{tg} \mu_2 = \frac{a_2}{c_1}$$

Risulta

$$n = \frac{\sqrt{c_1^2 + \theta_1^2} - \sqrt{c_1^2 + \theta_1'^2}}{\sqrt{c_1^2 + \theta_1^2} + \sqrt{c_1^2 + \theta_1'^2}}$$

e, essendo

$$k^2 = \operatorname{sen}^2 \frac{\mu_1 - \mu_2}{2} = \frac{1}{2} + \frac{c_1^2 - \theta_1' \theta_1}{2\sqrt{c_1^2 + \theta_1'^2} \sqrt{c_1^2 + \theta_1^2}}$$

$$I_0 = - \frac{\sqrt{\cos \mu_1 \cos \mu_2}}{c_1 b^{1/2}} .$$

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi \left(a_1 - \frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{a_1 - a_2}{2} \frac{n - \cos \varphi}{1 - n \cos \varphi} \right) \left(\frac{a_1 + a_2}{2} - \frac{a_1 - a_2}{2} \frac{n - \cos \varphi}{1 - n \cos \varphi} \right) \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} = \\ & = - \frac{\sqrt{\cos \mu_1 \cos \mu_2}}{c_1 b^{1/2}} \left[\frac{a_1^2 - a_2^2}{4} \int_0^\pi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} + \right. \\ & \quad + a_2 \frac{a_1 - a_2}{2} \int_0^\pi \frac{n - \cos \varphi}{1 - n \cos \varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} - \\ & \quad \left. - \left(\frac{a_1 - a_2}{2} \right)^2 \int_0^\pi \left(\frac{n - \cos \varphi}{1 - n \cos \varphi} \right)^2 \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} \right] . \end{aligned}$$

Ora è

$$\begin{aligned} \frac{n - \cos \varphi}{1 - n \cos \varphi} &= \frac{1}{n} \left[(n^2 - 1) \frac{1}{1 - n \cos \varphi} + 1 \right] ; \\ \left(\frac{n - \cos \varphi}{1 - n \cos \varphi} \right)^2 &= \frac{1}{n^2} \left[\frac{(n^2 - 1)^2}{(1 - n \cos \varphi)^2} + 1 + 2 \frac{n^2 - 1}{1 - n \cos \varphi} \right] \end{aligned}$$

mentre è

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi \frac{1}{1 - n \cos \varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} = \\ & = - \frac{1}{n} \int_0^\pi \frac{1}{\cos \varphi - \frac{1}{n}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} = - \frac{1}{n} H_1(n, k) \end{aligned}$$

e pertanto otteniamo

$$I_0 = - \frac{\sqrt{\cos \mu_1 \cos \mu_2} (a_1^2 - a_2^2)}{c_1 b^{1/2}} \left\{ \frac{2}{n} K(k) + a_2 \frac{a_1 - a_2}{2} \left[\frac{2}{n} K(k) - \frac{n^2 - 1}{n^2} H_1(n, k) \right] - \right. \\ \left. - \left(\frac{a_1 - a_2}{2} \right)^2 \frac{1}{n^2} \left[\frac{(n^2 - 1)^2}{n^2} H_2(n, k) + 2 K(k) - 2 \frac{n^2 - 1}{n} H_1(n, k) \right] \right\}.$$

Si deve notare, dalla espressione sopra data di n , che è sempre $-1 \leq n \leq 1$; per $|n| \neq 1$ è quindi sempre $\frac{n^2}{1 - n^2}$, parametro da cui dipende l'integrale ellittico completo di terza specie, *sempre maggiore di zero*. Si ha $n = 1$ se è contemporaneamente $r = r_1$ e $\theta_1 = \theta''$; in tal caso I_0 si riduce semplicemente a $I_0 = \frac{\pi}{2} \frac{\theta''}{b^{1/2}}$; si ha invece $n = -1$, se è $r = r_1$, e $\theta_1 = 0$, e risulta allora

$$I_0 = - \frac{\pi}{2} \frac{\theta''}{b^{1/2}}.$$

In modo analogo si ricava

$$I'_0 = \int_0^{\theta''} \sqrt{\frac{\theta'' - \theta}{\theta}} \frac{d\theta}{(\theta_1 - \theta)[a + b_1(\theta_1 - \theta)^2]^{1/2}} = \\ = \frac{1}{b^{1/2}} \int_{a_1}^{a_2} \frac{(a_1 - \chi) d\chi}{\chi(c_2 + \chi^2)^{1/2}(\chi - a_2)^{1/2}(a_1 - \chi)^{1/2}}$$

essendo ora $c_2 = \frac{a}{b_1} = \frac{(r_1 - r)^2}{h^2 + rr_1}$. Colle stesse sostituzioni prima indicate otteniamo:

$$I'_0 = - \frac{\sqrt{\cos \mu_1 \cos \mu_2}}{c_2 b_1^{1/2}} \left[\int_0^{\pi} \frac{a_1 dq}{\left(a_1 - a_2 \frac{n - \cos \varphi}{1 - n \cos \varphi} \right) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} - 2 K(k) \right] \\ - \frac{\sqrt{\cos \mu_1 \cos \mu_2}}{c_2 b_1^{1/2}} \left[\frac{a_1}{a_1 - a_2 n} \frac{m - n}{m} \frac{H_1(n, k)}{m} + \frac{a_1}{a_1 - a_2 n} \frac{n}{m} 2 K(k) - 2 K(k) \right].$$

essendo ora

$$a_1 = \frac{a_1 + a_2}{2} \quad ; \quad a_2 = \frac{a_1 - a_2}{2} \quad ; \quad m = \frac{a_1 n - a_2}{a_1 - a_2 n}.$$

Si deve osservare che è sempre $-1 \leq m \leq 1$ e che è $m = \pm 1$ quando è $n = \pm 1$, oppure è $a_1 + a_2 = 0$; ora perchè sia $n = \pm 1$ deve essere $r_1 = r$, e per detto valore di r è nullo il coefficiente di I'_0 ; l'integrale I'_0 è singolare per $\theta_1 = \theta''$, ma poichè il suo valore principale è finito, risulta che il prodotto $(r_1 - r) I'_0$ tende a zero col tendere di r a r_1 . Si ha invece $a_1 + a_2 = 0$ per $\theta_1 = 0$, e per detto valore di θ_1 è $I'_0 = \infty$: il bordo di attacco della pala è quindi una *linea singolare del campo di velocità* (vedi n° 13) ed è anche l'unico luogo dei punti singolari del campo. Calcoliamo ora:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{\theta''} \sqrt{\frac{\theta}{\theta''} - \frac{\theta^2}{\theta''^2}} \frac{(\theta_1 - \theta) d\theta}{[a + b(\theta_1 - \theta)^2]^{1/2}} = \\ &= \frac{1}{\theta''} \frac{1}{b^{1/2}} \int_{a_1}^{a_2} \frac{(a_1 - \chi)(\chi - a_2) \chi d\chi}{(\chi - a_2)^{1/2} (a_1 - \chi)^{1/2} (c + \chi^2)^{1/2}} = \\ &= -\frac{1}{\theta''} \frac{1}{b^{1/2}} \frac{|\cos \mu_1 \cos \mu_2|}{c_1} \left\{ \left(\frac{a_1 - a_2}{2} \right)^2 \frac{a_1 + a_2}{2} 2K(k) - \left(\frac{a_1 - a_2}{2} \right)^3 \right. \\ &\quad \left. \int_0^\pi \frac{n - \cos \varphi}{1 - n \cos \varphi} \frac{d\varphi}{1 - k^2 \sin^2 \varphi} - \left(\frac{a_1 - a_2}{2} \right)^2 \frac{a_1 + a_2}{2} \int_0^\pi \left(\frac{n - \cos \varphi}{1 - n \cos \varphi} \right)^2 \frac{d\varphi}{1 - k^2 \sin^2 \varphi} \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{a_1 - a_2}{2} \right)^3 \int_0^\pi \left(\frac{n - \cos \varphi}{1 - n \cos \varphi} \right)^3 \frac{d\varphi}{1 - k^2 \sin^2 \varphi} \right\}. \end{aligned}$$

Ma è

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \frac{n - \cos \varphi}{1 - n \cos \varphi} \frac{d\varphi}{1 - k^2 \sin^2 \varphi} &= -\frac{n^2 - 1}{n^2} H_1(n, k) + \frac{2}{n} K(k) \\ \int_0^\pi \left(\frac{n - \cos \varphi}{1 - n \cos \varphi} \right)^2 \frac{d\varphi}{1 - k^2 \sin^2 \varphi} &= \frac{(n^2 - 1)^2}{n^4} H_2 - 2 \frac{n^2 - 1}{n^3} H_1 + \frac{2}{n^2} K(k) \\ \int_0^\pi \left(\frac{n - \cos \varphi}{1 - n \cos \varphi} \right)^3 \frac{d\varphi}{1 - k^2 \sin^2 \varphi} &= \\ &= -\frac{1}{n^3} \left[-\frac{(n^2 - 1)^3}{n^3} H_3 + 3 \frac{(n^2 - 1)^2}{n^2} H_2 - 3 \frac{n^2 - 1}{n} H_1 + 2K \right] \end{aligned}$$

che sostituiti nella formola precedente danno I_1 . Si ha poi

$$\begin{aligned} I'_1 &= \int_0^{\theta''} \sqrt{\frac{\theta}{\theta''} - \frac{\theta^2}{\theta''^2}} \frac{d\theta}{(\theta_1 - \theta)[a + b_1(\theta_1 - \theta)^2]^{1/2}} = \\ &= \frac{1}{b_1^{1/2}} \frac{1}{\theta''} \int_{a_1}^{a_2} \frac{(a_1 - \chi)(\chi - a_2)d\chi}{(\chi - a_2)^{1/2}(a_1 - \chi)^{1/2}\chi(c_2 + \chi^2)^{1/2}} = \\ &= -\frac{1}{b_1^{1/2}} \frac{1}{\theta''} \left(\frac{a_1 - a_2}{2} \right)^2 \frac{\cos \mu_1 \cos \mu_2}{c_2} \left[-\frac{1}{a_2} \int_0^\pi \frac{n - \cos \varphi}{1 - n \cos \varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{2}{a_2} - \frac{a_1}{a_2^2} \right) 2K(k) + \left(1 - \frac{a_1}{a_2} \right)^2 \int_0^\pi \frac{1}{a_1 - a_2} \frac{n - \cos \varphi}{1 - n \cos \varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \right]. \end{aligned}$$

Ora il primo integrale nell'espressione entro parentesi quadra è già dato sopra, mentre si ha:

$$\begin{aligned} &\int_0^\pi \frac{1}{a_1 - a_2} \frac{n - \cos \varphi}{1 - n \cos \varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = \\ &= -\frac{m - n}{m^2} \frac{1}{a_1 - a_2 n} H_1(m, k) + \frac{2n}{m} \frac{1}{a_1 - a_2 n} K(k) \end{aligned}$$

che permette di calcolare I'_1 .

Si deve ancora osservare che, quando è $n = \pm 1$, si ha rispettivamente $I_1 = \pm \frac{\theta''}{8} \pi$; $\lim (r_1 - r) I'_1 = 0$; quando è $m = 1$, ossia $a_1 + a_2 = 0$ risulta pure I_2 finito.

In modo del tutto analogo a quello prima indicato si calcolano gli altri integrali corrispondenti ai vari valori di g_h ; è ancora opportuno soltanto notare:

1° tutti gli integrali, ad eccezione di I'_0 per $\theta_1 = 0$, risultano regolari in tutto l'intervallo $0 \leq \theta_1 \leq \theta''$;

2° gli integrali ellittici completi di terza specie sono funzioni di un parametro del tipo $\frac{n^2}{1 - n^2}$ (con $n < 1$) e quindi sempre positivo; anche essi possono essere espressi per mezzo degli inte-

grali ellittici di 1^a e di 2^a specie per mezzo della formola di Legendre:

$$H(p, k) = \frac{\operatorname{sen} \theta_n \cos \theta_n}{\sqrt{1 - k'^2 \operatorname{sen}^2 \theta_n}} \frac{\pi}{2} + \operatorname{sen}^2 \theta_n K(k) +$$

$$+ \frac{\operatorname{sen} \theta_n \cos \theta_n}{\sqrt{1 - k'^2 \operatorname{sen}^2 \theta_n}} \{K(k)F(k', \theta_n) - K(k)E(k', \theta_n) - E(k)F(k', \theta_n)\}$$

in cui è $p = \cotg^2 \theta_n$ mentre $F(k', \theta_n)$ e $E(k', \theta_n)$ sono gli integrali ellittici incompleti di 1^a e di 2^a specie corrispondenti al modulo $k'^2 = 1 - k^2$.

Determinazione della legge di distribuzione della circolazione lungo il raggio per un'elica data col metodo di Sandi Kawada. Calcolo dell'elica di dato raggio e di data distribuzione della circolazione lungo la pala.

Riassunto. — Nella prima parte, ricordato il metodo proposto da Sandi Kawada per la determinazione della distribuzione della circolazione lungo la pala di un'elica qualsiasi data, sono indicate le ipotesi assunte a base dell'applicazione del procedimento stesso ed è esposto il modo per mezzo del quale i risultati numerici ottenuti nelle ipotesi suddette possono essere applicati nel caso più generale. È infine mostrato come questi risultati permettano di risolvere in modo semplice il problema di determinare l'elica di dato raggio quando sia prefissata la legge di variazione della circolazione lungo la pala.

Nella seconda parte è indicato il modo col quale, per mezzo delle formole di Sandi Kawada, sono stati calcolati i vari coefficienti delle equazioni determinatrici delle circolazioni in corrispondenza dei vari profili lungo il raggio per le eliche definite nella parte 1^a, e sono riportate le tabelle che danno questi coefficienti ed i valori delle circolazioni stesse per i rapporti di funzionamento.

Nella terza parte è sviluppata l'applicazione numerica dei risultati riportati nella parte 2^a secondo il metodo esposto nella parte 1^a, e sono messi a raffronto i risultati ottenuti col calcolo con quelli dedotti sperimentalmente per la stessa elica. È inoltre riportato l'esempio di progetto di un'elica che realizza una data distribuzione di circolazione, ed è indicata l'estensione dell'uso delle tabelle date nella parte 2^a al caso in cui il passo uniforme delle pale si abbia per un angolo di calettamento diverso da quello considerato per dedurre i coefficienti dati dalle tabelle stesse.

PARTE I.

CARLO FERRARI

1. — In una Nota recente ⁽¹⁾ Sandi Kawada ha determinato un'espressione relativamente semplice ed atta al calcolo numerico della velocità indotta da un vortice elicoidale estendentesi indefinitamente in entrambi i sensi, ed ha indicato come ci si poteva servire di essa per determinare la distribuzione della circolazione, e quindi della forza, lungo il raggio di un'elica data. Per quanto il procedimento di Sandi Kawada presenti indubbi vantaggi di semplicità rispetto a quelli prima usati, la sua applicazione richiede ancora calcoli molto laboriosi; è sembrato pertanto opportuno portare l'applicazione del metodo di Sandi Kawada fino ad ottenere risultati numerici, così da porre il progettista in grado di ottenere la suddetta determinazione colla stessa semplicità colla quale le tabelle calcolate da Anderson ⁽²⁾ applicando il metodo di GLAUERT gli permettono di risolvere lo stesso problema nel caso dell'ala a pianta trapezia con svergolamento variabile con legge lineare lungo l'apertura, e questo nelle condizioni più generali possibili. L'esecuzione dei calcoli molto laboriosi necessari per conseguire il predetto scopo, che fu diretta dal prof. Aldo Ghizzetti, è stata possibile in un tempo relativamente breve, grazie all'opera dell'Istituto Nazionale del Calcolo diretto dal prof. M. Picone, che ha voluto cortesemente portare la sua valida collaborazione alla soluzione di un problema di indubbio notevole interesse per la Tecnica Aeronautica.

Naturalmente nel caso dell'elica il numero delle caratteristiche geometriche che possono, di frequente, variare è alquanto più grande che nel caso, sopra indicato, dell'ala, perchè mentre in questa è ormai quasi normale la forma trapezia e lo svergolamento lineare, nell'elica si possono avere facilmente forme in pianta diverse, diverse leggi di variazione dell'angolo di caletta-

⁽¹⁾ SANDI KAWADA, *Calculation of induced velocity by Helical Vortices and its application to propeller theory*. Report of the Aeronautical Research Institute, Tokyo Imperial University, N. 172, gennaio 1939.

⁽²⁾ ANDERSON, RAYMOND F., *Determination of the Characteristics of tapered Wings*. Techn. Report N. 572 N. A. C. A. 1936.

mento dei profili lungo il raggio, diverse forme dei profili. Ora è facile comprendere come non sia possibile tener conto in modo esatto della variazione di tutti questi elementi; la ricerca numerica è stata perciò limitata ai seguenti casi:

1° le leggi di variazione della larghezza relativa $\frac{l}{R}$ dei profili lungo il raggio sono quelle rappresentate nei diagrammi di fig. 1 e 2. Tali leggi sono quelle corrispondenti alla quasi tota-

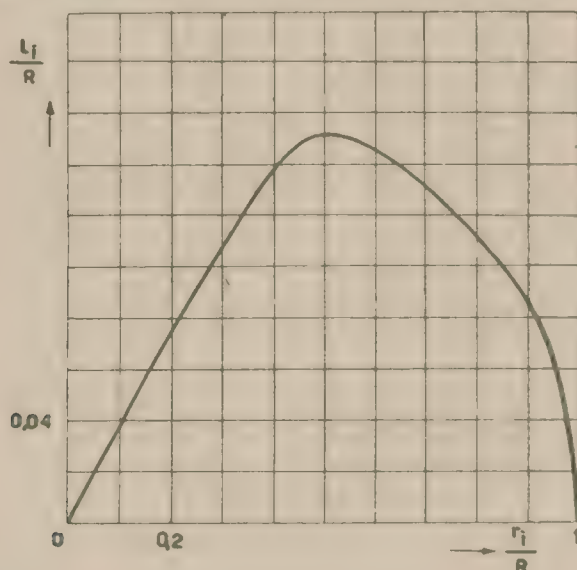


Fig. 1.

lità delle eliche sperimentate dal N. A. C. A., e pertanto di uso corrente nella Tecnica Aeronautica; precisamente, facendo riferimento alla raccolta « *Diagrammi logaritmici di eliche a passo variabile raccolti in 24 famiglie* » pubblicata a cura del Laboratorio di Aeronautica del R. Politecnico di Torino sotto la direzione del prof. Panetti, appartengono al diagramma di fig. 1 le eliche delle famiglie

N. 30 (E 5868-9); N. 31 (E 5868-9); N. 31 bis (E 5868-9); N. 32 (E 5868-9); N. 33 (E 5868-R6); N. 34 (E 5868-R6); N. 35 (E 5868-R6); N. 36 (E 6623 A); N. 37 (E 6623-B); N. 38 (E 6623-C); N. 39 (E 6623-D); N. 40 (E 5868-X₂); N. 44 (E 5868-9)

mentre appartengono al diagramma di fig. 2 le eliche delle famiglie

N. 27 (E 6101); N. 27 bis (E 6101); N. 28 (E 6129); N. 28 bis (E 6129); N. 29 (E 6131); N. 29 bis (E 6131).

È però subito opportuno osservare che i risultati di questa ricerca possono servire anche nel caso più generale in cui la legge di variazione di $\frac{l}{R}$ non coincide con quelle date sopra, come verrà indicato più avanti.

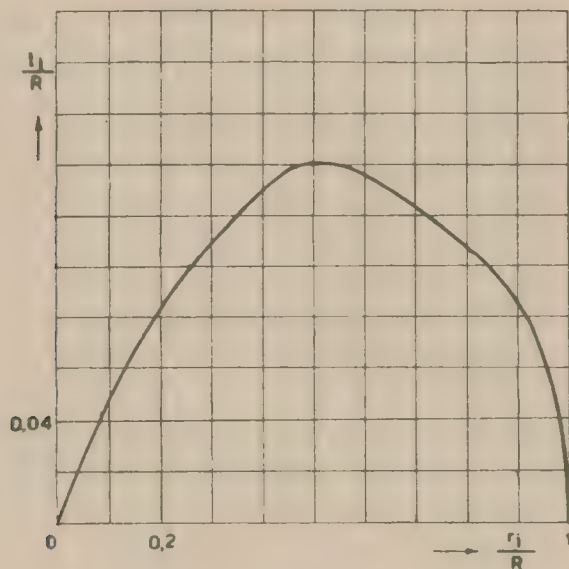


Fig. 2.

2° la legge di variazione della *incidenza assoluta apparente* lungo il raggio è stata assunta data dalla

$$(1) \quad \alpha = \alpha_0 + g_1 \frac{r}{R} + g_2$$

in cui g_1 e g_2 sono indipendenti da $\frac{r}{R}$, mentre α_0 è data dalla

$$(2) \quad \alpha_0 = \operatorname{arctg} k \frac{R}{r} - \operatorname{arctg} \frac{R}{\mu_0 r}$$

essendo

$$(3) \quad k = \frac{p}{2\pi R}$$

e

$$(4) \quad \mu_0 = \frac{\omega R}{V_0} = \frac{1}{\gamma}$$

se γ è, al solito, il rapporto di funzionamento dell'elica, mentre p è il passo dell'elica, che si è considerato, per un dato calettamento delle pale, costante lungo tutto il raggio. Nella ricerca numerica, fatta nella parte II, è stato assunto $k = 0,197$, corrispondente all'ipotesi di *passo costante* lungo la pala per un angolo di calettamento β del profilo, posto ad una distanza dall'asse $r = 0,75R$, uguale a 15° : a questa condizione, di fatto, soddisfano tutte le eliche N.A.C.A. contenute nella Raccolta già citata, ad eccezione di quella corrispondente al N. 40 (E 5868-X₂), che ha invece passo costante per un valore di β uguale a 35° . È tuttavia indicato nella parte III di questa Ricerca come i risultati numerici dati nella parte II possano essere senz'altro applicati anche quando il passo costante lungo la pala si verifica per un angolo di calettamento del profilo a $0,75R$ diverso da 15° , e quindi k abbia un valore diverso da quello assunto nei calcoli. Nel caso più generale poi che per nessun valore di β il passo risulti costante, i risultati dati nella parte II possono servire come risultati di prima approssimazione per ottenere valori più approssimati secondo il procedimento generale indicato al n. 5.

3° la forma dei profili usati lungo le pale può essere qualsiasi; di fatto, variando detta forma, varia solo, essenzialmente, l'angolo di portanza nulla, mentre il coefficiente angolare di portanza si può con ottima approssimazione ritenere costante; ora, questa variazione dell'angolo di portanza nulla lungo il raggio si potrà in generale rappresentare con una approssimazione sufficiente per mezzo di una relazione del tipo.

$$\Delta\beta_0 = k \frac{r}{R}$$

e quindi è compresa nella relazione generale colla quale si è espresso l'angolo di incidenza assoluta (apparente) lungo il raggio.

2. — Esponiamo ⁽¹⁾ qui ora, brevemente, a maggior comprensione del metodo applicato, il procedimento indicato da SANDI KAWADA per la determinazione della distribuzione della circolazione lungo il raggio; al n. 5 verrà quindi indicato il modo per mezzo del quale i risultati numerici ottenuti nelle ipotesi dette al n. 1 possono essere applicati nel caso più generale. Nella

⁽¹⁾ Quanto è contenuto nei nn. 2 e 3, e soltanto esso, ripete quanto pure è contenuto nella Nota già citata di SANDI KAWADA, alla quale pertanto si rimanda per maggiori particolari.

parte II della Ricerca sono esposti i risultati dei calcoli fatti nell'Istituto Nazionale del Calcolo sotto la direzione del prof. GRIZZETTI ed il modo col quale essi furono condotti. Nella parte III, infine, è indicata dall'ing. POSSIO la applicazione dei predetti risultati a un caso concreto ed il confronto dei valori ottenuti col calcolo con quelli ricavati sperimentalmente, ed è ancora mostrata la estensione dei risultati ottenuti dall'Istituto Nazionale per le applicazioni del calcolo nel caso di k qualsiasi.

Consideriamo p vortici elicoidali aventi ciascuno la circolazione Γ e tutti disposti sul cilindro di raggio r_0 , ed un vortice di circolazione $p\Gamma$ disposto secondo l'asse del medesimo cilindro; le tracce dei vortici elicoidali sopra un medesimo piano normale all'asse del cilindro a cui appartengono siano poste l'una dall'altra ad una distanza angolare uguale a $\frac{2\pi}{p}$. Assumiamo l'inclinazione delle eliche assi dei vortici, sulle generatrici del cilindro uguale a $\delta = \arctg \frac{V_0}{\omega r_0}$, avendo V_0 e ω i significati già definiti; indichiamo con r, θ, z le coordinate cilindriche avendo assunto l'asse z coincidente coll'asse del propulsore. Le equazioni degli elicoidi conoidi retti a cui appartengono i vortici elicoidali risultano pertanto

$$\theta - \frac{\omega z}{V_0} = \frac{i2\pi}{p}$$

con i variabile da 0 a $p-1$.

Posto $\zeta = \theta - \frac{\omega z}{V_0}$, la funzione potenziale del campo è funzione soltanto di ζ e di r ; essa può essere ottenuta come potenziale del campo creato da una distribuzione di *doppiette* poste sulle porzioni degli elicoidi conoidi retti interne al cilindro di raggio r_0 , di intensità uguale a Γ e di asse normale alle dette superficie elicoidali. Essa è pertanto definita dalle condizioni:

a) soddisfa in tutto lo spazio all'equazione di LAPLACE, che nelle coordinate r e ζ ha la forma

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \left(\frac{\omega^2}{V_0^2} + \frac{1}{r^2} \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \zeta^2} = 0$$

ossia ponendo $\mu = \frac{\omega r}{V_0}$

$$(5) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \mu^2} + \frac{1}{\mu} \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} + \left(1 + \frac{1}{\mu^2} \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \zeta^2} = 0$$

b) esternamente al cilindro di raggio r_0 la φ è funzione periodica e dispari di ζ , che si annulla per $\mu = \infty$;

c) internamente al cilindro di raggio r_0 la φ presenta una discontinuità attraverso alle superficie elicoidali prima dette uguale a Γ , mentre per $r = 0$ diventa infinita come $\frac{1}{r}$.

Ora la funzione φ che soddisfa alle condizioni (a), (b), (c) è data dalle

$$(6) \quad \varphi = -\frac{p\mu_0\Gamma}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} I'_{pm}(pm\mu_0)K_{pm}(pm\mu) \text{ sen } pm\zeta$$

per $\mu = \frac{\omega r}{V_0} \geq \mu_0$

$$\varphi = -\frac{p\Gamma}{2\pi} \left(\frac{\pi}{p} - \zeta \right) - \frac{p\mu_0\Gamma}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} K'_{pm}(pm\mu_0)I_{pm}(pm\mu) \text{ sen } pm\zeta$$

per $\mu \leq \mu_0$

nelle quali I_ν e K_ν sono le funzioni di BESSEL di prima e di seconda specie, di ordine ν e di argomento immaginario puro, mentre si è indicato coll'apice il simbolo di derivata. Dalle espressioni sopra indicate si ricavano subito le componenti della velocità indotte dai vortici, $2v'_T$ secondo la tangente alla circonferenza del cerchio di raggio r nel piano normale a z , e $2v'_z$ secondo z , in corrispondenza di un punto ad es. dell'elicoide $\zeta = 0$; è di fatto

$$(7) \quad 2v'_T = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right)_{\zeta=0} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} \right)_{\zeta=0};$$

$$2v'_z = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)_{\zeta=0} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right)_{\zeta=0} = -\mu 2v'_T.$$

Per ottenere le espressioni delle componenti della velocità prodotta dai soli vortici elicoidali basta aggiungere alla prima $-\frac{p\Gamma}{2\pi r}$, uguale e contraria alla velocità indotta dal vortice assiale.

Indicando la componente della velocità prodotta dai soli vortici elicoidali secondo la tangente alla circonferenza di raggio r con $2v_T$, e tenendo presenti le (6) si deduce

$$(8) \quad \text{per } r < r_0 \quad v_T = -\frac{p^2\mu_0\Gamma}{2\pi r} \sum_{m=1}^{\infty} mK'_{pm}(pm\mu_0)I_{pm}(pm\mu)$$

$$\text{per } r > r_0 \quad v_T = -\frac{p\Gamma}{4\pi r} \left[1 + 2p\mu_0 \sum_{m=0}^{\infty} mI'_{pm}(pm\mu_0)K_{pm}(pm\mu) \right].$$

Per valori dell'argomento pmu non troppo piccoli le funzioni cilindriche possono essere espresse per mezzo delle formole di NICHOLSON (come è anche indicato nella parte II); ne risultano per tal modo per le v_r delle formole più atte al calcolo numerico che sono date nella Nota citata di SANDI KAWADA.

3. — Per determinare la distribuzione della circolazione Γ lungo la pala suddividiamo questa in q tronchi abbastanza piccoli, perchè in ognuno di essi la circolazione stessa si possa considerare come costante: questo equivale a sostituire al diagramma effettivo della Γ lungo il raggio r il diagramma a scalini indicato in figura 3. I vortici elicoidali liberi che sfuggono dalle pale risul-

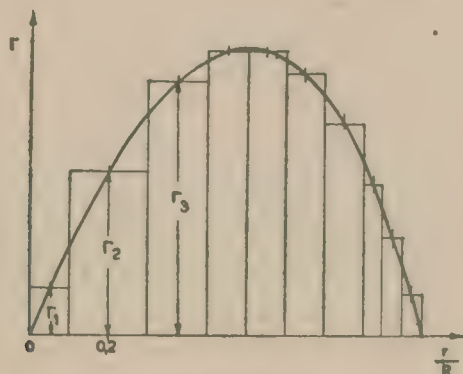


Fig. 3.

tano per tal modo concentrati alle estremità di detti tronchi, e le loro intensità, se assumiamo la circuitazione positiva se il senso di essa appare destro rispetto alla persona orientata secondo il vortice nel senso della velocità V_e lungo questo, e se indichiamo con Γ_i il valore della circolazione corrispondente al tronco i^{mo} , sono

$$(9) \quad \gamma_1 = \Gamma_1 - \Gamma_2 \quad ; \quad \gamma_2 = \Gamma_2 - \Gamma_3 \quad ; \quad \dots \gamma_q = \Gamma_q.$$

La componente della velocità tangente al cerchio di raggio r_i nel piano normale a z , in corrispondenza dell'elemento di pala distante r_i dall'asse, è la somma delle analoghe componenti prodotte dai vortici elicoidali sfuggenti alle estremità dei q tronchi e di quella indotta dal vortice assiale di circuitazione (10) $p\gamma_0 = p\Gamma_1$; poichè ora i vortici si estendono soltanto dal disco d'elica all'infinito a valle, le velocità da essi prodotte in corrispondenza del

disco sono uguali alla metà di quelle determinate nel numero precedente, e pertanto la componente trasversa dovuta a un vortice elicoidale generico in corrispondenza dell'elemento di pala considerato è proprio uguale al valore v_T dato dalle (8). Risulta perciò per la componente v_T^i indotta da *tutti* i vortici liberi in corrispondenza del punto di mezzo del tronco im^o (la cui distanza radiale abbiamo indicato con r_i)

$$(11) \quad v_T^i = \frac{p\gamma_0}{4\pi r_i} + \frac{p\gamma_1}{4\pi r_i} \lambda_{1i} + \frac{p\gamma_2}{4\pi r_i} \lambda_{2i} + \dots + \frac{p\gamma_q}{4\pi r_i} \lambda_{qi} =$$

$$= \frac{p}{4\pi r_i} [\Gamma_1(1 + \lambda_{1i}) - \Gamma_2(\lambda_{1i} - \lambda_{2i}) \dots - \Gamma_q(\lambda_{q-1,i} - \lambda_{q,i})]$$

in cui le λ_{ni} hanno le espressioni date dalla Nota di SANDI KAWADA e ripetute dalle (6) della parte II di questa ricerca.

Indichiamo ora con w^i la velocità risultante indotta dai vortici liberi in corrispondenza dell'elemento di pala disposto a metà del tronco im^o , e siano $V_e^i = \sqrt{V_0^2 + \omega^2 r_i^2}$ la velocità risultante della corrente (indisturbata) che lo investe e α^i la sua incidenza apparente, α_e^i la sua incidenza effettiva, l_i la lunghezza della sua corda. Supposto l_i molto piccolo a fronte di R si può esprimere la circolazione Γ_i colla $\Gamma_i = c'_{p_\infty} l_i V_e^i \alpha_e^i$, essendo c'_{p_∞} il coefficiente angolare di portanza per allungamento infinito del profilo che si considera. Poichè l'incidenza indotta α_i^i in corrispondenza dello stesso profilo è

$$\alpha_i^i = \frac{w^i}{V_e^i}, \quad \text{mentre} \quad \alpha^i = \alpha_e^i + \alpha_i^i$$

si deduce

$$\frac{w^i}{V_e^i} = \alpha^i - \frac{\Gamma_i}{c'_{p_\infty} l_i V_e^i}.$$

Ma ora è $V_e^i = V_0 \sqrt{1 + \mu_i^2}$ (essendo sempre $\mu_i = \frac{\omega r_i}{V_0}$), e poichè le componenti assiale e trasversa della velocità sono sempre legate dalla seconda delle (7) risulta pure

$$w^i = v_T^i \sqrt{1 + \mu_i^2}.$$

Si può pertanto scrivere

$$(12) \quad \frac{v_T^i}{V_0} = \alpha^i - \frac{\Gamma_i}{c'_{p_\infty} l_i V_0 \sqrt{1 + \mu_i^2}}.$$

Si ponga

$$(13) \quad J_n = \frac{p\Gamma_n}{4.7V_0R} \quad ; \quad \beta = \frac{4\pi \frac{r_i}{R}}{pc'_n \frac{l_i}{R} \sqrt{1 + \mu_i^2}}$$

(essendo R il raggio dell'elica). Si ottiene

$$(14) \quad (1 + \lambda_{1i})J_1 - (\lambda_{1i} - \lambda_{2i})J_2 \dots - (\lambda_{i-1,i} - \lambda_{i,i} - \beta_i)J_i - \dots \\ - (\lambda_{q-1,i} - \lambda_{q,i})J_q = \alpha^i \frac{r_i}{R}$$

nella quale si deve successivamente porre $i = 1 \div 2 \div 3 \div \dots q$.
Siano

$$A_{1i} = -(1 + \lambda_{1i}) \quad ; \quad A_{2i} = \lambda_{1i} - \lambda_{2i} \quad ; \quad A_{ii} = \lambda_{i-1,i} - \lambda_{i,i} \quad ; \quad A_{qi} = \lambda_{q-1,i} - \lambda_{q,i}.$$

Si può allora porre la (14) nella forma

$$(15) \quad -A_{1i}J_1 - A_{2i}J_2 \dots - (A_{ii} - \beta_i)J_i \dots - A_{qi}J_q = \alpha^i \frac{r_i}{R}.$$

I coefficienti A_{ni} sono funzioni soltanto di $\mu_n = \frac{\omega r_n}{V_0}$ e di $\mu_i = \frac{\omega r_i}{V_0}$; indicando con $\mu_0 = \frac{\omega R}{V_0}$ il reciproco del rapporto di funzionamento dell'elica, è $\mu_n = \mu_0 \frac{r_n}{R}$ e $\mu_i = \mu_0 \frac{r_i}{R}$, di guisa che, dato μ_0 , i valori A_{ni} non dipendono che da $\frac{r_n}{R}$ e da $\frac{r_i}{R}$.

Di equazioni come la (15) se ne possono scrivere tante quanti sono i tronchi nei quali si è divisa la pala, ossia q , e poichè, per ogni data elica, le β_i e α_i sono da considerarsi funzioni note di $\frac{r_i}{R}$, tutte le equazioni analoghe alla (15) costituiscono un sistema di q equazioni lineari nelle q incognite J_i , che permettono di determinare queste, e quindi la legge secondo cui varia I lungo la pala.

4. — Come già è stato detto, la soluzione del sistema (15) è stata ottenuta ponendo per α^i la $\alpha^i = \alpha_0^i + g_1 \frac{r_i}{R} + g_2$ essendo α_0^i data dalla (2), e assumendo per $\frac{l_i}{R}$ la legge di variazione in

funzione di $\frac{r_i}{R}$ data dalle figure 1 e 2, mentre il numero delle pale è stato fatto variare da 2 a 4. Il numero dei tronchi nei quali la pala è stata suddivisa è stato assunto uguale a 10 corrispondentemente ai valori di $\frac{r_n}{R}$ indicati nella parte II. I calcoli, eseguiti nell'Istituto Nazionale per le applicazioni del Calcolo a cura del prof. Ghizzetti, sono riportati nella parte II.

5. — I risultati dati nella parte II e valevoli per le leggi di variazione di $\frac{l}{R}$ e di α indicate al n. 1 possono essere con facilità estesi al caso più generale che si possa presentare.

Si osservi di fatto che tutti i coefficienti A_{ni} sono indipendenti sia da $\frac{l_i}{R}$ sia da α^i , e pertanto hanno un valore che non dipende dalla particolare elica che si considera; essi risultano per $n \neq i$ uguali e contrari ai coefficienti a_{ni} delle equazioni determinatrici delle J_i , mentre è

$$(16) \quad A_{ii} = -a_{ii} + \beta_i.$$

Nelle tabelle allegate alla parte II sono riportati i valori dei coefficienti A_{ni} e quelli dei coefficienti β_i , di guisa che il calcolo delle a_{ni} per ogni caso che si può presentare è immediato.

Scriviamo una generica delle 10 equazioni determinatrici delle J nella forma

$$(17) \quad a_{ii}J_i = \alpha^i \frac{r_i}{R} - \sum_n' a_{ni}J_n$$

dove col simbolo $\sum_n'$ si è indicato che la sommatoria va estesa a tutti i valori di n da 1 a 10 eccettuato $n = i$.

Se si considerano ora i valori delle a_{ni} , quali si possono ricavare dalle tabelle della parte II, si vede subito che i coefficienti a_{ii} sono molto più grandi di tutti gli altri a_{ni} (per $n \neq i$): la soluzione del sistema (17) si può quindi fare molto bene col metodo delle *iterate*. Nel caso generale determineremo valori approssimati (in prima approssimazione) delle J_i , che indicheremo con $J_i^{(1)}$ sostituendo a secondo membro della (17) i valori della J_i dati dalle tabelle della parte II che designeremo con $J_i^{(0)}$. Scriveremo cioè

$$a_{ii}J_i^{(1)} = \alpha^i \frac{r_i}{R} - \sum_n' a_{ni}J_n^{(0)}.$$

Sostituendo di nuovo a secondo membro le $J_n^{(1)}$, otterremo una seconda approssimazione dalla

$$a_{ii}J_i^{(2)} = a_i \frac{r_i}{R} - \sum_n' a_{ni}J_n^{(1)}$$

e così procedendo successivamente si possono determinare le J colla approssimazione che si desidera. È però opportuno, per la effettiva determinazione delle J_i , considerare, in luogo delle $J_i^{(k)}$, le differenze tra due successive approssimazioni delle J_i stesse. Ponendo

$$(18) \quad \Delta J_i^{(k+1)} = J_i^{(k+1)} - J_i^{(k)}$$

risultano come equazioni determinatrici delle ΔJ le

$$(19) \quad a_{ii}\Delta J_i^{(k+1)} = \sum_n' (-a_{ni})\Delta J_n^{(k)}$$

mentre le J_i sono allora date dalle

$$(20) \quad J_i = J_i^{(1)} + \Delta J_i^{(2)} + \Delta J_i^{(3)} + \dots$$

È facile riconoscere la convergenza di questo metodo di *iterazione*.

Osserviamo, innanzi tutto, che condizione *sufficiente* ⁽¹⁾ per la convergenza del metodo è che sia

$$\frac{\sum_i |\Delta J_i^{(k+1)}|}{\sum_i |\Delta J_i^{(k)}|} \leq \varepsilon < 1.$$

Ora, è

$$\Delta J_i^{(k+1)} = \sum_n' \frac{-a_{ni}}{a_{ii}} \Delta J_n^{(k)}$$

e pertanto

$$|\Delta J_i^{(k+1)}| \leq \sum_n' \left| \frac{a_{ni}}{a_{ii}} \right| |\Delta J_n^{(k)}|$$

⁽¹⁾ R. V. MISES-H. POLLACZEK-GEIRINGER «Praktische Verfahren der Gleichungsauflösung, Z. angew. Math. Mech.», Bd. 9 (1929).

ed anche

$$\sum_i |\Delta J_i^{(k+1)}| \leq \sum_i \sum'_n \left| \frac{a_{ni}}{a_{ii}} \right| |\Delta J_n^{(k)}|.$$

Invertendo l'ordine delle sommatorie a secondo membro, si ha

$$\sum_i |\Delta J_i^{(k+1)}| \leq \sum'_n |\Delta J_n^{(k)}| \sum_i \left| \frac{a_{ni}}{a_{ii}} \right|$$

e

$$\frac{\sum_i |\Delta J_i^{(k+1)}|}{\sum_i |\Delta J_i^{(k)}|} \leq \frac{\sum'_n |\Delta J_n^{(k)}| \sum_i \left| \frac{a_{ni}}{a_{ii}} \right|}{\sum_n |\Delta J_n^{(k)}|} \leq \frac{\sum_n |\Delta J_n^{(k)}| \varepsilon}{\sum_n |\Delta J_n^{(k)}|} = \varepsilon$$

se si indica con ε il massimo valore di

$$\sum'_i \left| \frac{a_{ni}}{a_{ii}} \right|$$

per i vari valori possibili di n . Ma dai valori di a_{ni} e di a_{ii} dati dalle tabelle allegate alla parte II risulta che è, per le leggi supposte di $\frac{l_i}{R}$, sempre

$$\left\{ \sum'_i \left| \frac{a_{ni}}{a_{ii}} \right| \right\}_{\max} < 1;$$

così per $\mu_0 = 5$; $p = 4$ si ottiene dalle tabelle $\varepsilon = 0,42$. Poichè, anche per variazioni relativamente grandi di $\frac{l_i}{R}$ dai valori considerati in questa ricerca, la circostanza ora verificata per il valore di ε permane, almeno per la maggior parte dei casi che si possono presentare, se ne deduce senz'altro la convergenza già affermata del metodo.

È pure facile determinare l'errore complessivo massimo che si può commettere quando ci si ferma all'approssimazione k^{ma} . Se J_i è proprio il valore esatto della grandezza corrispondente, è per la (20)

$$J_i - J_i^{(k)} = \Delta J_i^{(k+1)} + \Delta J_i^{(k+2)} + \dots$$

e quindi

$$(21) \quad \sum_i |J_i - J_i^{(k)}| \leq \sum_i |AJ_i^{(k+1)}| + \sum_i |AJ_i^{(k+2)}| + \dots \leq \sum_i |AJ_i^{(k+1)}| \frac{1}{1-\varepsilon}$$

dove ε ha il significato ed il valore già prima definito: di fatto i termini della serie a secondo membro della prima disuguaglianza sono minori, per il criterio di convergenza prima dimostrato, dei termini della progressione geometrica di ragione $\varepsilon < 1$.

L'errore massimo complessivo, somma dei valori assoluti degli errori corrispondenti alle varie J_i quando si consideri solo l'approssimazione k^{ma} , è pertanto minore, al limite uguale, alla somma delle variazioni delle J_i quando si passa dall'approssimazione k^{ma} a quella $(k+1)^{\text{ma}}$ (e quindi, a maggior ragione, dalla approssimazione $(k-1)^{\text{ma}}$ a quella k^{ma}) divisa per $1 - \varepsilon$.

6. — È infine ancora opportuno osservare che i risultati delle ricerche numeriche eseguite nella parte II servono non soltanto a determinare col calcolo le forze che si esercitano sopra una elica data, ma anche a calcolare l'elica quando sia prefissata la legge di variazione della circolazione lungo la pala.

Di fatto, nota la $\Gamma = \Gamma(r)$, risultano pure note le J_i ; si calcola allora subito la incidenza indotta in corrispondenza del profilo a distanza r_i dall'asse colla

$$\alpha_i^i = \frac{w^i}{V_e^i} = \frac{v_T^i}{V_0} = - \frac{R}{r_i} \sum A_{ni} J_n$$

in cui tutti i coefficienti A_{ni} hanno i valori noti dati dalle tabelle della parte II. Si ha infine

$$\alpha_e^i = \frac{4\pi R J_i}{pc'_{\infty} l_i \sqrt{1 + \mu_i^2}} = \alpha^i - \alpha_i^i = \alpha^i + \frac{R}{r_i} \sum A_{ni} J_n$$

che, fissata ad es. l'incidenza effettiva col criterio normalmente seguito nel calcolo delle eliche (prossima a quella di massima efficienza per allungamento infinito), permettono di determinare l'angolo di calettamento α^i del profilo e la sua larghezza relativa $\frac{l_i}{R}$.

È infine appena necessario osservare che sia i valori dei coefficienti A_{ni} , sia i valori delle J_i corrispondenti a valori di μ_0 diversi da quelli pei quali i calcoli numerici sono stati fatti si debbono dedurre da questi per interpolazione.

PARTE II.

A. GHIZZETTI

Nella Parte I della presente monografia è stato dimostrato che la ricerca della distribuzione della circolazione, lungo il raggio R di un'elica, si riduce alla risoluzione del sistema di equazioni (14) scritte per q sezioni della pala, corrispondenti a q valori del raggio r e contenenti le q incognite J .

Fissando a 10 il numero delle sezioni, il sistema di equazioni risolventi è il seguente

$$(1) \quad (1 + \lambda_{1,i})J_1 + (\lambda_{2,i} - \lambda_{1,i})J_2 + \dots + (\lambda_{i,i} - \lambda_{i-1,i} + \beta_i)J_i + \dots + (\lambda_{10,i} - \lambda_{9,i})J_{10} = \alpha^{(i)} \frac{r'_i}{R} \quad (i = 1, 2, \dots, 10)$$

Premettiamo la calcolazione dei coefficienti e dei termini noti dando le due successioni di valori numerici

$$(2) \quad \frac{r'_i}{R} = 0,05 \div 0,2 \div 0,375 \div 0,5 \div 0,6 \div 0,7 \div 0,8 \div 0,875 \div 0,925 \div 0,975$$

$$(3) \quad \frac{r''_n}{R} = 0,1 \div 0,3 \div 0,45 \div 0,55 \div 0,65 \div 0,75 \div 0,85 \div 0,90 \div 0,95 \div 1$$

e posto

$$(4) \quad \mu'_i = \mu_0 \frac{r'_i}{R} \quad (i = 1, 2, \dots, 10).$$

$$(5) \quad \mu''_n = \mu_0 \frac{r''_n}{R} \quad (n = 1, 2, \dots, 10)$$

ove μ_0 è il reciproco del rapporto di funzionamento dell'elica, come dichiarato nella Parte I, ed assume valore costante per il sistema di equazioni da risolvere; si ha

$$(6) \quad \lambda_{n,i} = \begin{cases} -2p\mu''_n \sum_{m=1}^{\infty} mK'_{pm}(p\mu''_n)I_{pm}(p\mu'_i), & (\text{se } i \leq n) \\ -1 - 2p\mu''_n \sum_{m=1}^{\infty} mI'_{pm}(p\mu''_n)K_{pm}(p\mu'_i), & (\text{se } i > n) \end{cases} \quad (i, n = 1, 2, \dots, 10)$$

ove p denota un numero intero positivo fisso; I_ν , K_ν sono i simboli delle funzioni di Bessel di ordine ν di argomento immaginario puro⁽¹⁾; I'_ν , K'_ν le derivate prime di tali funzioni.

Il calcolo delle λ_{ni} va ripetuto 15 volte perchè per la costante μ_0 occorre considerare separatamente i 5 valori seguenti

$$(7) \quad \mu_0 = 0,5 \div 1 \div 2 \div 3 \div 5$$

e per il numero intero p vanno considerati i tre casi

$$(8) \quad p = 2 \div 3 \div 4.$$

Si ha poi

$$(9) \quad \beta_i = \frac{4\pi}{pc'_{p_\infty} \sqrt{1 + \mu_i'^2}} \frac{r'_i}{R} \frac{1}{\frac{l_i}{R}} \quad (i=1, 2, \dots, 10)$$

con

$$c'_{p_\infty} = 2,8$$

mentre i valori $\frac{l_i}{R}$ sono definiti come ordinate dei punti di una certa assegnata linea C aventi per ascisse i numeri della successione (2). Per questa linea C sono possibili due casi (vedi figg. 1 e 2) che designeremo come *caso A* (fig. 1) e *caso B* (fig. 2).

Dall'esame di tali curve è risultato

$$(10) \quad \frac{l_i}{R} = \begin{cases} 0,02 \div 0,075 \div 0,13 \div 0,151 \div 0,145 \div 0,132 \div 0,112 \div \\ \div 0,096 \div 0,078 \div 0,044 \text{ (nel caso A)} \\ 0,025 \div 0,083 \div 0,123 \div 0,14 \div 0,136 \div 0,124 \div 0,108 \div \\ \div 0,092 \div 0,077 \div 0,048 \text{ (nel caso B).} \end{cases}$$

Con ciò sono completamente definiti i coefficienti del sistema (1) per il cui quadro sono dunque possibili 30 casi diversi (associando i vari casi (7), (8), (10)).

Per quanto riguarda i termini noti, si ha

$$(11) \quad \alpha^{(i)} = \operatorname{arctg} \frac{k}{\frac{r'_i}{R}} - \operatorname{arctg} \frac{1}{\mu'_i} + g_1 \frac{r'_i}{R} + g_2, \\ (i=1, 2, \dots, 10)$$

⁽¹⁾ Vedi G. N. WATSON, *A treatise on the theory of Bessel functions*, Cambridge 1922, pag. 77.

con

$$(12) \quad k = 0,197$$

mentre g_1, g_2 sono due costanti che non si possono precisare. Convienne perciò porre per le incognite J_n del sistema (1)

$$(13) \quad J_n = J'_n + g_1 J''_n + g_2 J'''_n$$

indicando con J'_n le soluzioni di (1) in corrispondenza ai termini noti

$$(14') \quad C'_i = \frac{r'_i}{R} \left(\operatorname{arctg} \frac{h}{\frac{r'_i}{R}} - \operatorname{arctg} \frac{1}{\mu'_i} \right),$$

$$(i = 1, 2, \dots, 10),$$

con J''_n le soluzioni di (1) coi termini noti

$$(14'') \quad C''_i = \left(\frac{r'_i}{R} \right)^2, \quad (i = 1, 2, \dots, 10),$$

con J'''_n le soluzioni di (1) coi termini noti

$$(14''') \quad C'''_i = \left(\frac{r'_i}{R} \right)^3, \quad (i = 1, 2, \dots, 10),$$

Il numero dei sistemi da risolvere sale pertanto a 90.

La parte più difficile del calcolo è la valutazione delle λ_{ni} secondo la (6); di ciò parleremo al n. 3. Non offre invece alcuna difficoltà il calcolo delle β_i secondo la (9), e quello dei termini noti C'_i, C''_i, C'''_i forniti dalle (14'), (14''), (14''').

Riportiamo quindi intanto i risultati ottenuti in questi calcoli immediati.

TABELLA I (coefficienti β_i)

μ_0	$p = 2 \quad \text{caso A}$									
	β_1	β_2	β_3	β_4	β_5	β_6	β_7	β_8	β_9	β_{10}
0,5	5,608	5,954	6,362	7,209	8,894	11,232	14,882	18,738	24,153	44,697
1	5,603	5,868	6,061	6,646	7,962	9,749	12,516	15,393	19,535	35,603
2	5,582	5,556	5,178	5,254	5,944	6,917	8,495	10,148	12,654	22,690
3	5,548	5,131	4,300	4,122	4,509	5,116	6,165	7,281	9,022	16,086
5	5,442	4,231	3,046	2,760	2,936	3,269	3,887	4,557	5,624	9,992

Segue: TABELLA I.

$p = 2$ caso B										
μ_0	β_1	β_2	β_3	β_4	β_5	β_6	β_7	β_8	β_9	β_{10}
0,5	4,487	5,380	6,724	7,775	9,517	12,005	15,462	19,553	24,467	40,972
1	4,482	5,302	6,406	7,168	8,520	10,420	13,004	16,062	19,789	32,636
2	4,466	5,020	5,473	5,667	6,361	7,393	8,826	10,589	12,819	20,799
3	4,438	4,637	4,545	4,446	4,826	5,468	6,405	7,598	9,139	14,745
5	4,354	3,823	3,220	2,976	3,142	3,494	4,039	4,756	5,697	9,159

$$p = 3$$

I valori corrispondenti si ottengono da quelli della tabella precedente moltiplicandoli per $\frac{2}{3}$.

$$p = 4$$

I valori corrispondenti si ottengono da quelli della tabella moltiplicandoli per $\frac{1}{2}$.

TABELLA II (termini noti C'_i)

μ_0	$-10^4 C'_1$	$-10^4 C'_2$	$-10^4 C'_3$	$-10^4 C'_4$	$-10^4 C'_5$	$-10^4 C'_6$	$-10^4 C'_7$	$-10^4 C'_8$	$-10^4 C'_9$	$-10^4 C'_{10}$
0,5	112	1387	3382	4753	5773	6719	7591	8198	8261	8949
1	99	1191	2731	3659	4279	4800	5237	5517	5684	5837
2	74	825	1664	2050	2265	2421	2537	2605	2643	2676
3	50	505	911	1063	1139	1191	1211	1247	1258	1268
5	2	15	23	26	27	28	28	29	29	29

I termini noti C''_i sono, qualunque sia μ_0 :

$$(15) \quad C''_i = 0,0025 \div 0,04 \div 0,1406 \div 0,25 \div 0,36 \div 0,49 \div 0,64 \div \\ \div 0,7656 \div 0,8556 \div 0,9506$$

mentre i C'''_i coincidono coi numeri della successione (2).

3. — Veniamo ora al calcolo delle λ_{ni} . Applicando certe formole dovute a J. W. NICHOLSON ⁽¹⁾ risultano per i prodotti

$$K'_{pm}(pm\mu_n'')I_{pm}(pm\mu_i') \quad , \quad I'_{pm}(pm\mu_n'')K_{pm}(pm\mu_i')$$

le formole approssimate

$$(16) \left\{ \begin{aligned} & K'_{pm}(pm\mu_n'')I_{pm}(pm\mu_i') \sim \\ & \sim - \left(\frac{1 + \mu_n''^2}{1 + \mu_i'^2} \right)^{\frac{1}{4}} \frac{e^{-pmt_{ni}}}{2p\mu_n''} \left[1 - \frac{1}{2p\mu_n''} \left(1 - \frac{1}{\mu_n''^2} \right)^{-\frac{3}{2}} \right] \\ & I'_{pm}(pm\mu_n'')K_{pm}(pm\mu_i') \sim \\ & \sim - \left(\frac{1 + \mu_n''^2}{1 + \mu_i'^2} \right)^{\frac{1}{4}} \frac{e^{-pmt_{ni}}}{2p\mu_n''} \left[1 - \frac{1}{2p\mu_n''} \left(1 - \frac{1}{\mu_n''^2} \right)^{-\frac{3}{2}} \right] \end{aligned} \right.$$

ove si è posto

$$(17) \quad t_{ni} = \sqrt{1 + \mu_n''^2} - 1 - \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + \mu_n''^2 - 1}{1 + \mu_i'^2 - 1} \right) \left(\frac{1 + \mu_n''^2 - 1}{1 + \mu_i'^2 - 1} \right)^{-\frac{3}{2}}$$

» Se si esprimono i vari termini della serie (6) in modo approssimato mediante le (16), tali serie si possono sommare elementarmente e si trovano così per le λ_{ni} le espressioni approssimate

$$(18) \quad \lambda_{ni}^* \left\{ \begin{aligned} & = - \left(\frac{1 + \mu_n''^2}{1 + \mu_i'^2} \right)^{\frac{1}{4}} \left[\frac{1}{e^{-pmt_{ni}} - 1} + \frac{1}{2p\mu_n''} \left(1 - \frac{1}{\mu_n''^2} \right)^{-\frac{3}{2}} \log \frac{1}{1 - e^{-pmt_{ni}}} \right] \\ & \quad \text{(se } i \leq n) \\ & = - 1 - \left(\frac{1 + \mu_n''^2}{1 + \mu_i'^2} \right)^{\frac{1}{4}} \left[\frac{1}{e^{-pmt_{ni}} - 1} - \frac{1}{2p\mu_n''} \left(1 - \frac{1}{\mu_n''^2} \right)^{-\frac{3}{2}} \log \frac{1}{1 - e^{-pmt_{ni}}} \right] \\ & \quad \text{(se } i > n). \end{aligned} \right.$$

⁽¹⁾ Vedi J. W. NICHOLSON, *The approximate calculation of Bessel Functions of imaginary argument*, *Philosophical Magazine* (6), XX, 1910, pag. 938-943.

Si può scrivere pertanto

$$(19) \quad \lambda_{ni} = \lambda_{ni}^* - \begin{cases} 2p\mu_n'' \sum_{m=1}^{\infty} m \left\{ K'_{pm}(pm\mu_n'') I_{pm}(pm\mu_i') + \right. \\ \left. + \left(\frac{1+\mu_n''^2}{1+\mu_i'^2} \right)^{\frac{1}{4}} \frac{e^{pmt_{ni}}}{2pm\mu_n''} \left[1 + \frac{1}{2pm\mu_n''} \left(1 + \frac{1}{\mu_n''^2} \right)^{-\frac{3}{2}} \right] \right\} & (\text{se } i \leq n) \\ 2p\mu_n'' \sum_{m=1}^{\infty} m \left\{ I'_{pm}(pm\mu_n'') K_{pm}(pm\mu_i') - \right. \\ \left. - \left(\frac{1+\mu_n''^2}{1+\mu_i'^2} \right)^{\frac{1}{4}} \frac{e^{-pmt_{ni}}}{2mp\mu_n''} \left[1 - \frac{1}{2pm\mu_n''} \left(1 + \frac{1}{\mu_n''^2} \right)^{-\frac{3}{2}} \right] \right\} & (\text{se } i > n) \end{cases}$$

ove i termini delle serie a secondo membro sono assai presto trascurabili.

Per il calcolo numerico delle λ_{ni} (con due cifre decimali esatte, come richiesto) conviene dunque calcolare dapprima le λ_{ni}^* , e poi modificarle tenendo conto di quei termini delle serie a secondo membro della (19) che influiscono sulla seconda cifra decimale.

Per la valutazione delle λ_{ni}^* si è ritenuto opportuno scrivere le formole (18) in modo diverso. Posto

$$a_{ni} = \sqrt{1 + \mu_i'^2} - \sqrt{1 + \mu_n''^2}$$

$$\beta_{ni} = \frac{(\sqrt{1 + \mu_i'^2} + 1)(\sqrt{1 + \mu_n''^2} - 1)}{(\sqrt{1 + \mu_i'^2} - 1)(\sqrt{1 + \mu_n''^2} + 1)}$$

dalla (17) risulta

$$t_{ni} = a_{ni} - \frac{1}{2} \log \beta_{ni}$$

e quindi

$$e^{t_{ni}} = \beta_{ni}^{-\frac{1}{2}} e^{a_{ni}}.$$

Posto allora

$$\varepsilon_{ni} = \beta_{ni}^{-\frac{1}{2}} e^{a_{ni}}$$

$$\xi_{ni}^{(p)} \begin{cases} = \frac{1}{1 - \varepsilon_{ni}^p} & (\text{se } i \leq n) \\ = \frac{\varepsilon_{ni}^p}{\varepsilon_{ni}^p - 1} & (\text{se } i > n) \end{cases}$$

le (18) assumono l'aspetto

$$(18') \quad \lambda_{ni} \begin{cases} = \left(\frac{1 + \mu_n''^2}{1 + \mu_i''^2} \right)^{\frac{1}{4}} \left[-1 + \xi_{ni}^{(p)} + \frac{1}{2p\mu_n''} \left(1 + \frac{1}{\mu_n''^2} \right)^{-\frac{3}{2}} \log \xi_{ni}^{(p)} \right] & (\text{se } i \leq n) \\ = -1 - \left(\frac{1 + \mu_n''^2}{1 + \mu_i''^2} \right)^{\frac{1}{4}} \left[-1 + \xi_{ni}^{(p)} - \frac{1}{2p\mu_n''} \left(1 + \frac{1}{\mu_n''^2} \right)^{-\frac{3}{2}} \log \xi_{ni}^{(p)} \right] & (\text{se } i > n). \end{cases}$$

Servendosi di queste ultime si è potuto (con successive tabellazioni delle quantità

$$\left(\frac{1 + \mu_n''^2}{1 + \mu_i''^2} \right)^{\frac{1}{4}}, \left(1 + \frac{1}{\mu_n''^2} \right)^{-\frac{3}{2}}, \alpha_{ni}, \beta_{ni}, \varepsilon_{ni}, \xi_{ni}^{(p)} \Bigg)$$

arrivare abbastanza rapidamente alla determinazione numerica delle λ_{ni} nei 15 casi richiesti.

Fatto ciò si è indagato sui valori numerici dei primi termini delle serie che compaiono a secondo membro delle (17). Si è esaminato a fondo il caso $\mu_0 = 5$, calcolando i valori delle varie funzioni di Bessel I_ν , K_ν e delle loro derivate prime che occorreva considerare. Questo calcolo è stato molto laborioso perchè o non esistono oppure non sono sufficientemente ampie le tabelle delle funzioni I_ν , K_ν con $\nu > 1$; è stato quindi necessario ricondurre ogni $I_\nu(x)$, $K_\nu(x)$ alle funzioni $I_0(x)$, $I_1(x)$, $K_0(x)$, $K_1(x)$ per mezzo delle note relazioni ricorrenti ⁽¹⁾

$$(20) \quad I_{\nu-1}(x) - I_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} I_\nu(x), \quad K_{\nu-1}(x) - K_{\nu+1}(x) = -\frac{2\nu}{x} K_\nu(x).$$

Lo stesso si è fatto per le I'_ν , K'_ν avvalendosi delle ⁽¹⁾

$$I_{\nu-1}(x) + I_{\nu+1}(x) = 2I'_\nu(x), \quad K_{\nu-1}(x) + K_{\nu+1}(x) = -2K'_\nu(x).$$

Però per $\nu \geq 6$ questo metodo non si è più potuto applicare a causa della insufficiente approssimazione dei valori delle I_0 ,

⁽¹⁾ Vedi G. N. WATSON, *loc. cit.*, pag. 7..

I_1 , K_0 , K_1 forniti dalle tabelle esistenti. Si è allora proceduto al calcolo delle I_v , K_v che occorreano (sia direttamente, sia per l'applicazione delle (20)) secondo il metodo già usato altra volta presso questo Istituto ⁽¹⁾.

Questo calcolo esplorativo ha rivelato che le λ_{ni} differiscono di pochissimo dalle λ_{ni}^* , la differenza risultando dell'ordine di $\frac{1}{100}$ solo per i primissimi valori di n ed i se $p = 2$, e addirittura

dell'ordine di $\frac{1}{1000}$ per tutti i valori di n , i se $p = 3, 4$.

I risultati ottenuti in questa trattazione del caso $\mu_0 = 5$ hanno indicato le norme da seguire nell'applicazione delle (19) negli altri casi ($\mu_0 = 0,5 \div 1 \div 2 \div 3$). Per avere le λ_{ni} , una volta determinate le λ_{ni}^* , è sufficiente applicare le (19) per i primi valori di n ed i nel caso $p = 2$, quasi mai nei casi $p = 3, 4$.

Lo studio fatto ha insomma portato alla conclusione che, nell'ordine di approssimazione richiesto, le λ_{ni} possono confondersi colle λ_{ni}^* , eccettuate al più quelle con $n + i \leq 4$. Per queste ultime si è fatta la necessaria correzione secondo le formule (19).

Dopo ciò si è finalmente arrivati a scrivere i vari sistemi (1) di equazioni lineari e si è iniziata la loro risoluzione.

4. — Per la soluzione dei sistemi lineari corrispondenti ai valori di $\mu_0 = 0,5 \mid 1 \mid 2 \mid 3$, si è proceduto nel modo seguente. Nel caso $\mu_0 = 0,5$ si è usato il *metodo delle ridotte* (come nel caso $\mu_0 = 5$); per gli altri casi si è fatta un'interpolazione lineare fra i risultati ottenuti nei due casi estremi $\mu_0 = 0,5$ e $\mu_0 = 5$, assumendo i valori così dedotti come prime approssimazioni per l'applicazione del *metodo delle iterate*. Tutto questo nel caso A; per il caso B si è usato sempre il metodo delle iterate mettendo come prime approssimazioni i corrispondenti risultati del caso A.

Nelle tabelle 3-17 sono riportati i valori dei coefficienti A_{ni} , nelle tabelle 18-47 sono riportati i valori dei coefficienti J_i relativi ai due casi A e B.

⁽¹⁾ Vedi la pubblicazione n. 66: M. BADELLINO, *Sul calcolo delle funzioni di Bessel*.

TABELLA III.

Coefficienti A_{ni} $p = 2$ $\mu_0 = 0,5$										
$\begin{smallmatrix} n \\ i \end{smallmatrix}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	-1,33	0,30	0,02	0	0	0	0	0	0	0
2	0,33	-2,13	0,55	0,10	0,05	0,03	0,02	0,01	0,01	0,01
3	0,07	1,66	-4,98	1,38	0,37	0,16	0,09	0,03	0,03	0,02
4	0,04	0,50	3,57	-9,74	3,57	0,29	0,27	0,08	0,06	0,05
5	0,03	0,29	0,90	3,78	-11,52	3,83	0,76	0,18	0,13	0,10
6	0,02	0,19	0,44	0,84	4,44	-13,34	4,41	0,55	0,33	0,22
7	0,01	0,13	0,27	0,39	0,95	5,83	-16,42	4,31	1,19	0,67
8	0,01	0,10	0,20	0,26	0,51	1,38	12,74	-32,08	10,72	2,15
9	0,01	0,09	0,17	0,21	0,38	0,83	3,14	11,14	-33,60	11,22
10	0,01	0,08	0,15	0,16	0,29	0,54	0,56	3,28	11,62	-35,07

TABELLA IV.

Coefficienti A_{ni} $p = 2$ $\mu_0 = 1$										
$\begin{smallmatrix} n \\ i \end{smallmatrix}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	-1,33	0,30	0,02	0	0	0	0	0	0	0
2	0,32	-2,11	0,55	0,09	0,05	0,03	0,02	0,01	0,01	0
3	0,14	1,48	-4,76	1,33	0,35	0,16	0,09	0,03	0,03	0,02
4	0,03	0,44	3,23	-9,00	3,00	0,59	0,25	0,08	0,06	0,05
5	0,02	0,24	0,77	3,33	-10,34	3,46	0,69	0,17	0,12	0,09
6	0,01	0,15	0,36	0,70	3,71	-11,52	3,87	0,49	0,29	0,19
7	0,01	0,10	0,20	0,31	0,77	4,05	-12,54	3,16	1,06	0,53
8	0,01	0,07	0,14	0,19	0,40	1,10	10,37	-26,35	8,21	2,06
9	0,01	0,06	0,12	0,15	0,28	0,64	2,50	8,93	-27,56	9,49
10	0,01	0,05	0,10	0,12	0,21	0,42	1,16	1,80	9,20	-27,94

TABELLA V.

Coefficienti A_{ni} $p = 2$ $\mu_0 = 2$										
$\begin{smallmatrix} n \\ i \end{smallmatrix}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	-1,30	0,27	0,02	0	0	0	0	0	0	0
2	0,29	-2,03	0,53	0,09	0,05	0,03	0,01	0,01	0	0
3	0,05	1,26	-4,11	1,16	0,31	0,24	0,07	0,03	0,01	0,01
4	0,02	0,30	2,46	-7,13	2,41	0,48	0,19	0,06	0,05	0,03
5	0,01	0,14	0,52	2,41	-7,74	2,63	0,52	0,13	0,09	0,06
6	0,01	0,08	0,12	0,54	2,56	-8,18	2,78	0,34	0,21	0,14
7	0	0,05	0,10	0,18	0,48	2,68	-8,52	2,14	0,75	0,36
8	0	0,03	0,07	0,10	0,23	0,68	6,76	-17,39	5,87	1,19
9	0	0,02	0,05	0,08	0,15	0,38	1,56	5,75	-17,62	5,95
10	0	0,02	0,04	0,05	0,11	0,24	0,70	1,12	5,82	-17,82

TABELLA VI.

Coefficienti A_{ni} $p = 2$ $\mu_0 = 3$										
$\begin{smallmatrix} n \\ i \end{smallmatrix}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	-1,24	0,22	0,01	0,01	0	0	0	0	0	0
2	0,24	-1,90	0,50	0,08	0,04	0,02	0,01	0	0	0
3	0,03	0,98	-3,44	1,00	0,22	0,10	0,05	0,02	0,01	0,01
4	0,01	0,20	1,86	-5,61	1,90	0,36	0,14	0,04	0,03	0,02
5	0,01	0,08	0,35	1,78	-5,88	1,99	0,38	0,09	0,05	0,04
6	0	0,04	0,12	0,31	1,86	-6,07	2,05	0,25	0,14	0,09
7	0	0,02	0,05	0,11	0,32	1,91	-6,21	1,57	0,52	0,25
8	0	0,01	0,03	0,06	0,14	0,46	4,81	12,48	4,21	0,84
9	0	0,01	0,02	0,04	0,09	0,25	1,08	4,07	-12,57	4,24
10	0	0,01	0,01	0,03	0,06	0,14	0,48	0,78	4,10	-12,64

TABELLA VII.

Coefficienti A_{ni} $p = 2$ $\mu_0 = 5$										
$\begin{smallmatrix} n \\ i \end{smallmatrix}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	-1,32	0,30	0,01	0	0	0	0	0	0	0
2	0,18	-1,64	0,38	0,05	0,02	0,01	0	0	0	0
3	0,01	0,60	-2,48	0,66	0,14	0,05	0,02	0	0	0
4	0	0,08	1,17	-3,80	1,24	0,21	0,06	0,01	0,01	0,01
5	0	0,03	0,18	1,11	-3,88	1,26	0,21	0,04	0,02	0,01
6	0	0,01	0,05	0,16	1,14	-3,93	1,27	0,14	0,07	0,04
7	0	0	0,02	0,05	0,17	1,16	-3,96	1,17	0,31	0,14
8	0	0	0,01	0,02	0,07	0,24	1,96	-7,84	2,62	0,50
9	0	0	0	0,01	0,03	0,12	0,83	2,51	-7,85	2,62
10	0	0	0	0,01	0,02	0,06	0,25	0,46	2,52	-7,88

TABELLA VIII.

Coefficienti A_{ni} $p = 3$ $\mu_0 = 0,5$										
$\begin{smallmatrix} n \\ i \end{smallmatrix}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	-1,20	0,20	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0,14	-1,57	0,32	0,05	0,02	0,01	0,01	0	0	0
3	0,02	1,00	-3,37	0,90	0,22	0,09	0,05	0,02	0,01	0,01
4	0,01	0,25	2,33	-7,53	2,35	0,18	0,16	0,05	0,04	0,03
5	0	0,13	0,55	2,49	-7,72	2,53	0,49	0,12	0,08	0,06
6	0	0,07	0,25	0,54	2,88	-8,86	2,92	0,36	0,21	0,14
7	0	0,05	0,14	0,24	0,61	3,24	-10,33	2,87	0,78	0,44
8	0	0,03	0,10	0,15	0,32	0,90	8,48	-21,41	7,13	1,42
9	0	0,03	0,08	0,12	0,23	0,54	1,09	8,41	-22,41	7,48
10	0	0,02	0,07	0,09	0,17	0,34	1,01	1,53	8,73	-23,39

TABELLA IX.

Coefficienti A_{ni} $p = 3$ $\mu_0 = 1$										
$n \backslash i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	-1,12	0,12	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0,14	-1,65	0,32	0,04	0,02	0,01	0,01	0	0	0
3	0,05	0,91	-3,23	0,86	0,21	0,09	0,04	0,01	0,01	0,01
4	0,01	0,22	2,11	-6,04	1,97	0,38	0,15	0,04	0,03	0,02
5	0	0,10	0,47	2,19	-6,93	2,29	0,44	0,11	0,07	0,05
6	0	0,06	0,20	0,44	2,45	-7,70	2,56	0,31	0,18	0,12
7	0	0,03	0,10	0,18	0,49	2,68	-8,38	2,10	0,70	0,34
8	0	0,02	0,07	0,11	0,24	0,71	6,90	-17,59	5,49	1,36
9	0	0,02	0,05	0,08	0,17	0,41	1,64	5,95	-18,37	6,32
10	0	0,01	0,04	0,06	0,12	0,26	0,76	1,19	6,12	18,64

TABELLA X.

Coefficienti A_{ni} $p = 3$ $\mu_0 = 2$										
$n \backslash i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	-1,13	0,13	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0,12	-1,49	0,30	0,04	0,02	0	0	0	0	0
3	0,01	0,75	-2,80	0,74	0,18	0,07	0,03	0,01	0	0
4	0	0,15	1,58	-4,79	1,57	0,29	0,10	0,03	0,02	0,02
5	0	0,06	0,30	1,57	-5,19	1,71	0,32	0,07	0,05	0,03
6	0	0,02	0,11	0,28	1,67	-5,48	1,82	0,22	0,12	0,08
7	0	0,01	0,05	0,09	0,29	1,76	-5,71	1,41	0,49	0,22
8	0	0	0,03	0,05	0,13	0,43	4,47	-11,62	3,90	0,78
9	0	0	0,02	0,03	0,09	0,22	1,02	3,81	-11,76	3,95
10	0	0	-0,01	0,03	0,05	0,14	0,44	0,73	3,86	-11,90

TABELLA XI.

Coefficienti A_{ni} $p = 3$ $\mu_0 = 3$										
$\begin{smallmatrix} n \\ i \end{smallmatrix}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	-1,14	0,14	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0,11	-1,44	0,28	0,03	0,01	0,01	0	0	0	0
3	0,01	0,56	-2,38	0,60	0,13	0,04	0,02	0	0	0
4	0	0,08	1,18	-3,80	1,22	0,21	0,06	0,01	0	0
5	0	0,03	0,19	1,15	-3,94	1,28	0,22	0,04	0,03	0,02
6	0	0,01	0,05	0,17	1,20	-4,09	1,32	0,15	0,08	0,04
7	0	0	0,02	0,05	0,18	1,23	-4,19	1,02	0,32	0,15
8	0	0	0,01	0,02	0,07	0,27	3,16	-8,34	2,79	0,54
9	0	0	0,01	0,01	0,04	0,14	0,68	2,69	-8,40	2,65
10	0	0	0	0,01	0,02	0,07	0,28	0,50	2,71	-8,45

TABELLA XII.

Coefficienti A_{ni} $p = 3$ $\mu_0 = 5$										
$\begin{smallmatrix} n \\ i \end{smallmatrix}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	-1,13	0,13	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0,07	-1,27	0,19	0,01	0	0	0	0	0	0
3	0	0,32	-1,78	0,38	0,06	0,01	0	0	0	0
4	0	0,03	0,70	-2,61	0,76	0,10	0,02	0	0	0
5	0	0	0,08	0,68	-2,66	0,77	0,10	0,01	0,01	0
6	0	0	0,01	0,07	0,70	-2,69	0,78	0,07	0,03	0,01
7	0	0	0	0,01	0,08	0,71	-2,72	0,61	0,17	0,07
8	0	0	0	0	0,02	0,17	1,86	-5,26	1,71	0,30
9	0	0	0	0	0,01	0,05	0,37	1,64	-5,27	1,71
10	0	0	0	0	0,01	0,02	0,13	0,28	1,65	-5,29

TABELLA XIII.

Coefficienti A_{ni} $p = 4$ $\mu_0 = 0,5$										
$\begin{smallmatrix} n \\ i \end{smallmatrix}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	-1,07	0,07	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0,07	-1,29	0,20	0,02	0,01	0	0	0	0	0
3	0	0,67	-2,59	0,65	0,15	0,06	0,03	0,01	0,01	0
4	0	0,14	1,69	-4,92	1,73	0,13	0,11	0,03	0,02	0,02
5	0	0,06	0,37	1,84	-5,80	1,88	0,35	0,08	0,05	0,04
6	0	0,03	0,15	0,38	2,13	-6,66	2,17	0,26	0,15	0,10
7	0	0,02	0,08	0,16	0,44	2,42	-7,78	2,14	0,58	0,32
8	0	0,01	0,05	0,09	0,22	0,66	6,34	-16,06	5,34	1,06
9	0	0,01	0,04	0,06	0,16	0,38	1,54	5,55	-16,81	5,60
10	0	0,01	0,03	0,05	0,11	0,24	0,74	1,14	5,80	-17,65

TABELLA XIV.

Coefficienti A_{ni} $p = 4$ $\mu_0 = 1$										
$\begin{smallmatrix} n \\ i \end{smallmatrix}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	-1,07	0,07	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0,06	-1,30	0,20	0,02	0,01	0	0	0	0	0
3	0,02	0,61	-2,48	0,62	0,14	0,05	0,02	0,01	0	0
4	0	0,12	1,53	-4,55	1,45	0,26	0,09	0,03	0,02	0,01
5	0	0,05	0,31	1,62	-5,22	1,69	0,31	0,07	0,05	0,03
6	0	0,02	0,12	0,31	1,81	-5,80	1,90	0,23	0,13	0,08
7	0	0,01	0,05	0,12	0,34	1,99	-6,31	1,56	0,51	0,25
8	0	0,01	0,03	0,06	0,16	0,51	5,15	-13,20	4,13	1,01
9	0	0	0,02	0,05	0,11	0,29	1,21	4,45	-13,79	4,73
10	0	0	0,02	0,03	0,07	0,18	0,55	0,88	4,58	-13,99

TABELLA XV.

Coefficienti A_{ni} $p = 4$ $\mu_0 = 2$										
$\begin{smallmatrix} n \\ i \end{smallmatrix}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	-1,04	0,04	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0,06	-1,26	0,18	0,02	0,01	0	0	0	0	0
3	0	0,49	-2,17	0,52	0,11	0,03	0,01	0	0	0
4	0	0,07	1,13	-3,63	1,14	0,19	0,06	0,01	0,01	0,01
5	0	0,02	0,19	1,17	-3,93	1,23	0,21	0,04	0,03	0,02
6	0	0,01	0,06	0,18	1,23	-4,15	1,33	0,15	0,08	0,05
7	0	0	0,02	0,05	0,20	1,29	-4,32	1,04	0,35	0,16
8	0	0	0,01	0,02	0,08	0,39	3,32	-8,72	2,91	0,57
9	0	0	0,01	0,01	0,05	0,15	0,73	2,84	-8,83	2,95
10	0	0	0	0,01	0,03	0,08	0,31	0,54	2,88	-8,94

TABELLA XVI.

Coefficienti A_{ni} $p = 4$ $\mu_0 = 3$										
$\begin{smallmatrix} n \\ i \end{smallmatrix}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	-1,07	0,06	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0,05	-1,22	0,16	0,01	0	0	0	0	0	0
3	0	0,36	-1,86	0,41	0,07	0,02	0	0	0	0
4	0	0,04	0,83	-2,90	0,87	0,12	0,03	0,01	0	0
5	0	0,01	0,11	0,82	-3,03	0,92	0,13	0,02	0,01	0,01
6	0	0	0,03	0,10	0,86	-3,12	0,95	0,09	0,04	0,02
7	0	0	0,01	0,02	0,11	0,89	-3,17	0,74	0,22	0,10
8	0	0	0	0,01	0,04	0,18	2,33	-6,28	2,07	0,38
9	0	0	0	0,01	0,02	0,08	0,48	2,00	-6,32	2,08
10	0	0	0	0	0,01	0,04	0,18	0,36	2,01	-6,36

TABELLA XVII.

Coefficienti A_{ni} $p = 4$ $\mu_0 = 5$										
$n \backslash i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	-1,06	0,06	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0,03	-1,12	0,09	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0,19	-1,45	0,23	0,02	0	0	0	0	0
4	0	0,01	0,46	-2,03	0,51	0,04	0,01	0	0	0
5	0	0	0,04	0,46	-2,07	0,52	0,05	0	0	0
6	0	0	0	0,04	0,47	-2,10	0,53	0,04	0,01	0
7	0	0	0	0	0,04	0,49	-2,12	0,43	0,10	0,03
8	0	0	0	0	0,01	0,07	1,37	-3,98	1,25	0,20
9	0	0	0	0	0	0,02	0,23	1,20	-4,00	1,25
10		0	0	0	0	0,01	0,07	0,18	1,20	-4,00

TABELLA XVIII.

Coefficienti J_i

	$p = 2$	$\mu_0 = 0,5$	Caso A
J_1	$= -0,0^266$	$+ 0,0^271$	$g_1 + 0,0^2862 g_2$
J_2	$= -0,02141$	$+ 0,0^2704$	$g_1 + 0,02968 g_2$
J_3	$= -0,04182$	$+ 0,01859$	$g_1 + 0,04693 g_2$
J_4	$= -0,04985$	$+ 0,02671$	$g_1 + 0,05336 g_2$
J_5	$= -0,05062$	$+ 0,03158$	$g_1 + 0,05340 g_2$
J_6	$= -0,04790$	$+ 0,03414$	$g_1 + 0,05041 g_2$
J_7	$= -0,04209$	$+ 0,03395$	$g_1 + 0,04455 g_2$
J_8	$= -0,03572$	$+ 0,03147$	$g_1 + 0,03814 g_2$
J_9	$= -0,02889$	$+ 0,02704$	$g_1 + 0,03099 g_2$
J_{10}	$= -0,01788$	$+ 0,01782$	$g_1 + 0,01937 g_2$

TABELLA XIX.

Coefficienti J_i

	$p = 2$	$\mu_0 = 0,5$	Caso B
J_1	$= -0,0^2325$	$+ 0,0^288$	$g_1 + 0,01039 g_2$
J_2	$= -0,02296$	$+ 0,0^2755$	$g_1 + 0,03187 g_2$
J_3	$= -0,04061$	$+ 0,01798$	$g_1 + 0,04554 g_2$
J_4	$= -0,04786$	$+ 0,02569$	$g_1 + 0,05104 g_2$
J_5	$= -0,04870$	$+ 0,03031$	$g_1 + 0,05113 g_2$
J_6	$= -0,04614$	$+ 0,03282$	$g_1 + 0,04826 g_2$
J_7	$= -0,04106$	$+ 0,03305$	$g_1 + 0,04326 g_2$
J_8	$= -0,03503$	$+ 0,03073$	$g_1 + 0,03711 g_2$
J_9	$= -0,02879$	$+ 0,02685$	$g_1 + 0,03071 g_2$
J_{10}	$= -0,01872$	$+ 0,01861$	$g_1 + 0,02021 g_2$

TABELLA XX.

Coefficienti J_i

	$p = 2$	$\mu_0 = 1$	Caso A
J_1	$= -0,02234$	$+ 0,0281$	$g_1 + 0,02867 g_2$
J_2	$= -0,01847$	$+ 0,02732$	$g_1 + 0,03030 g_2$
J_3	$= -0,03529$	$+ 0,01999$	$g_1 + 0,04950 g_2$
J_4	$= -0,04154$	$+ 0,02966$	$g_1 + 0,05787 g_2$
J_5	$= -0,04190$	$+ 0,03564$	$g_1 + 0,05941 g_2$
J_6	$= -0,03933$	$+ 0,03943$	$g_1 + 0,05745 g_2$
J_7	$= -0,03435$	$+ 0,04013$	$g_1 + 0,05201 g_2$
J_8	$= -0,02883$	$+ 0,03743$	$g_1 + 0,04493 g_2$
J_9	$= -0,02332$	$+ 0,03274$	$g_1 + 0,03719 g_2$
J_{10}	$= -0,01456$	$+ 0,02197$	$g_1 + 0,02374 g_2$

TABELLA XXI.

Coefficienti J_i

	$p = 2$	$\mu_0 = 1$	Caso B
J_1	$= -0,02286$	$+ 0,0298$	$g_1 + 0,01045 g_2$
J_2	$= -0,01977$	$+ 0,02778$	$g_1 + 0,03251 g_2$
J_3	$= -0,03402$	$+ 0,01916$	$g_1 + 0,04779 g_2$
J_4	$= -0,03953$	$+ 0,02814$	$g_1 + 0,05507 g_2$
J_5	$= -0,03989$	$+ 0,03391$	$g_1 + 0,05656 g_2$
J_6	$= -0,03750$	$+ 0,03764$	$g_1 + 0,05479 g_2$
J_7	$= -0,03323$	$+ 0,03891$	$g_1 + 0,05034 g_2$
J_8	$= -0,02801$	$+ 0,03647$	$g_1 + 0,04368 g_2$
J_9	$= -0,02306$	$+ 0,03247$	$g_1 + 0,03681 g_2$
J_{10}	$= -0,01516$	$+ 0,02293$	$g_1 + 0,02474 g_2$

TABELLA XXII.

Coefficienti J_i

	$p = 2$	$\mu_0 = 2$	Caso A
J_1	$= -0,02162$	$+ 0,0283$	$g_1 + 0,02872 g_2$
J_2	$= -0,01348$	$+ 0,02814$	$g_1 + 0,03275 g_2$
J_3	$= -0,02535$	$+ 0,02482$	$g_1 + 0,05957 g_2$
J_4	$= -0,02927$	$+ 0,03821$	$g_1 + 0,07316 g_2$
J_5	$= -0,02941$	$+ 0,04788$	$g_1 + 0,07858 g_2$
J_6	$= -0,02757$	$+ 0,05516$	$g_1 + 0,07930 g_2$
J_7	$= -0,02412$	$+ 0,05818$	$g_1 + 0,07455 g_2$
J_8	$= -0,02047$	$+ 0,05611$	$g_1 + 0,06660 g_2$
J_9	$= -0,01649$	$+ 0,04963$	$g_1 + 0,05583 g_2$
J_{10}	$= -0,01028$	$+ 0,03370$	$g_1 + 0,03607 g_2$

TABELLA XXIII.

Coefficienti J_i

$p = 2$	$\mu_0 = 2$	Caso B
$J_1 = -0,02198$	$+ 0,02101$	$g_1 + 0,01047 g_2$
$J_2 = -0,01443$	$+ 0,02864$	$g_1 + 0,03508 g_2$
$J_3 = -0,02447$	$+ 0,02379$	$g_1 + 0,05748 g_2$
$J_4 = -0,02799$	$+ 0,03634$	$g_1 + 0,06972 g_2$
$J_5 = -0,02807$	$+ 0,04568$	$g_1 + 0,07498 g_2$
$J_6 = -0,02635$	$+ 0,05280$	$g_1 + 0,07585 g_2$
$J_7 = -0,02338$	$+ 0,05654$	$g_1 + 0,07235 g_2$
$J_8 = -0,01994$	$+ 0,05481$	$g_1 + 0,06496 g_2$
$J_9 = -0,01635$	$+ 0,04932$	$g_1 + 0,05540 g_2$
$J_{10} = -0,01072$	$+ 0,03523$	$g_1 + 0,03768 g_2$

TABELLA XXIV.

Coefficienti J_i

$p = 2$	$\mu_0 = 3$	Caso A
$J_1 = -0,02107$	$+ 0,0285$	$g_1 + 0,02876 g_2$
$J_2 = -0,02889$	$+ 0,02899$	$g_1 + 0,03579 g_2$
$J_3 = -0,01619$	$+ 0,02912$	$g_1 + 0,07011 g_2$
$J_4 = -0,01895$	$+ 0,04799$	$g_1 + 0,09133 g_2$
$J_5 = -0,01892$	$+ 0,06199$	$g_1 + 0,10111 g_2$
$J_6 = -0,01776$	$+ 0,07317$	$g_1 + 0,10459 g_2$
$J_7 = -0,01549$	$+ 0,07882$	$g_1 + 0,10035 g_2$
$J_8 = -0,01327$	$+ 0,07693$	$g_1 + 0,09077 g_2$
$J_9 = -0,01074$	$+ 0,06855$	$g_1 + 0,07666 g_2$
$J_{10} = -0,00672$	$+ 0,04687$	$g_1 + 0,04989 g_2$

TABELLA XXV.

Coefficienti J_i

$p = 2$	$\mu_0 = 3$	Caso B
$J_1 = -0,02131$	$+ 0,0250$	$g_1 + 0,01056 g_2$
$J_2 = -0,02945$	$+ 0,02950$	$g_1 + 0,03828 g_2$
$J_3 = -0,01566$	$+ 0,02770$	$g_1 + 0,06806 g_2$
$J_4 = -0,01796$	$+ 0,04548$	$g_1 + 0,08686 g_2$
$J_5 = -0,01811$	$+ 0,05900$	$g_1 + 0,09628 g_2$
$J_6 = -0,01705$	$+ 0,06995$	$g_1 + 0,09988 g_2$
$J_7 = -0,01507$	$+ 0,07652$	$g_1 + 0,09727 g_2$
$J_8 = -0,01297$	$+ 0,07523$	$g_1 + 0,08834 g_2$
$J_9 = -0,01068$	$+ 0,06825$	$g_1 + 0,07597 g_2$
$J_{10} = -0,00703$	$+ 0,04894$	$g_1 + 0,05205 g_2$

TABELLA XXVI.

Coefficienti J_i

	$p = 2$	$\mu_0 = 5$	Caso A
J_1	$= -0,0^{\circ}2$	$+ 0,0^{\circ}96$	$g_1 + 0,0^{\circ}941 g_2$
J_2	$= -0,0^{\circ}40$	$+ 0,01041$	$g_1 + 0,04229 g_2$
J_3	$= -0,0^{\circ}53$	$+ 0,03829$	$g_1 + 0,09340 g_2$
J_4	$= -0,0^{\circ}71$	$+ 0,06712$	$g_1 + 0,12789 g_2$
J_5	$= -0,0^{\circ}71$	$+ 0,08978$	$g_1 + 0,14609 g_2$
J_6	$= -0,0^{\circ}66$	$+ 0,10914$	$g_1 + 0,15518 g_2$
J_7	$= -0,0^{\circ}58$	$+ 0,12195$	$g_1 + 0,15411 g_2$
J_8	$= -0,0^{\circ}44$	$+ 0,10934$	$g_1 + 0,12724 g_2$
J_9	$= -0,0^{\circ}39$	$+ 0,10685$	$g_1 + 0,11867 g_2$
J_{10}	$= -0,0^{\circ}24$	$+ 0,07333$	$g_1 + 0,07750 g_2$

TABELLA XXVII.

Coefficienti J_i

	$p = 2$	$\mu_0 = 5$	Caso B
J_1	$= -0,0^{\circ}2$	$+ 0,0^{\circ}118$	$g_1 + 0,01137 g_2$
J_2	$= -0,0^{\circ}40$	$+ 0,01100$	$g_1 + 0,04516 g_2$
J_3	$= -0,0^{\circ}49$	$+ 0,03669$	$g_1 + 0,08987 g_2$
J_4	$= -0,0^{\circ}68$	$+ 0,06375$	$g_1 + 0,12172 g_2$
J_5	$= -0,0^{\circ}68$	$+ 0,08567$	$g_1 + 0,13950 g_2$
J_6	$= -0,0^{\circ}64$	$+ 0,10456$	$g_1 + 0,14856 g_2$
J_7	$= -0,0^{\circ}57$	$+ 0,11856$	$g_1 + 0,14962 g_2$
J_8	$= -0,0^{\circ}43$	$+ 0,10696$	$g_1 + 0,12429 g_2$
J_9	$= -0,0^{\circ}39$	$+ 0,10620$	$g_1 + 0,11778 g_2$
J_{10}	$= -0,0^{\circ}26$	$+ 0,07683$	$g_1 + 0,08114 g_2$

TABELLA XXVIII.

Coefficienti J_i

	$p = 3$	$\mu_0 = 0,5$	Caso A
J_1	$= -0,0^{\circ}34$	$+ 0,0^{\circ}99$	$g_1 + 0,01181 g_2$
J_2	$= -0,02989$	$+ 0,0^{\circ}952$	$g_1 + 0,04161 g_2$
J_3	$= -0,06056$	$+ 0,02691$	$g_1 + 0,06775 g_2$
J_4	$= -0,07286$	$+ 0,03939$	$g_1 + 0,07773 g_2$
J_5	$= -0,07441$	$+ 0,04669$	$g_1 + 0,07820 g_2$
J_6	$= -0,07064$	$+ 0,05072$	$g_1 + 0,07409 g_2$
J_7	$= -0,06203$	$+ 0,05052$	$g_1 + 0,06549 g_2$
J_8	$= -0,05284$	$+ 0,04684$	$g_1 + 0,05623 g_2$
J_9	$= -0,04273$	$+ 0,04031$	$g_1 + 0,04573 g_2$
J_{10}	$= -0,02739$	$+ 0,02734$	$g_1 + 0,02961 g_2$

TABELLA XXXV.

Coefficienti J_i

	$p = 3$	$\mu_0 = 3$	Caso B
J_1	$= -0,0^2166 + 0,0^241$	$g_1 + 0,01396$	g_2
J_2	$= -0,01293 + 0,01198$	$g_1 + 0,05168$	g_2
J_3	$= -0,02189 + 0,03736$	$g_1 + 0,09324$	g_2
J_4	$= -0,02532 + 0,06313$	$g_1 + 0,12164$	g_2
J_5	$= -0,02573 + 0,08370$	$g_1 + 0,13678$	g_2
J_6	$= -0,02435 + 0,10038$	$g_1 + 0,14300$	g_2
J_7	$= -0,02164 + 0,11089$	$g_1 + 0,14038$	g_2
J_8	$= -0,01872 + 0,10972$	$g_1 + 0,12819$	g_2
J_9	$= -0,01539 + 0,09936$	$g_1 + 0,11010$	g_2
J_{10}	$= -0,01021 + 0,07192$	$g_1 + 0,07610$	g_2

TABELLA XXXVI.

Coefficienti J_i

	$p = 3$	$\mu_0 = 5$	Caso A
J_1	$= -0,0^2 + 0,0^297$	$g_1 + 0,01202$	g_2
J_2	$= -0,0^255 + 0,01232$	$g_1 + 0,05530$	g_2
J_3	$= -0,0^271 + 0,04925$	$g_1 + 0,12395$	g_2
J_4	$= -0,0^297 + 0,08894$	$g_1 + 0,17195$	g_2
J_5	$= -0,0^296 + 0,12132$	$g_1 + 0,19835$	g_2
J_6	$= -0,0^290 + 0,14989$	$g_1 + 0,21294$	g_2
J_7	$= -0,0^279 + 0,16822$	$g_1 + 0,21190$	g_2
J_8	$= -0,0^268 + 0,16889$	$g_1 + 0,19679$	g_2
J_9	$= -0,0^255 + 0,15377$	$g_1 + 0,16976$	g_2
J_{10}	$= -0,0^235 + 0,10696$	$g_1 + 0,11248$	g_2

TABELLA XXXVII.

Coefficienti J_i

	$p = 3$	$\mu_0 = 5$	Caso B
J_1	$= -0,0^2 + 0,00117$	$g_1 + 0,01431$	g_2
J_2	$= -0,0^255 + 0,01304$	$g_1 + 0,05903$	g_2
J_3	$= -0,0^265 + 0,04718$	$g_1 + 0,11939$	g_2
J_4	$= -0,0^293 + 0,08420$	$g_1 + 0,16349$	g_2
J_5	$= -0,0^293 + 0,11607$	$g_1 + 0,18991$	g_2
J_6	$= -0,0^287 + 0,14393$	$g_1 + 0,20434$	g_2
J_7	$= -0,0^278 + 0,16398$	$g_1 + 0,20634$	g_2
J_8	$= -0,0^267 + 0,16529$	$g_1 + 0,19235$	g_2
J_9	$= -0,0^258 + 0,15297$	$g_1 + 0,16868$	g_2
J_{10}	$= -0,0^237 + 0,11185$	$g_1 + 0,11753$	g_2

TABELLA XXXVIII.

Coefficienti J_i

$p = 4$	$\mu_0 = 0,5$	Caso A
$J_1 = -0,02351$	$+ 0,0298$	$g_1 + 0,01385 g_2$
$J_2 = -0,03673$	$+ 0,01131$	$g_1 + 0,05158 g_2$
$J_3 = -0,07754$	$+ 0,03428$	$g_1 + 0,08657 g_2$
$J_4 = -0,09422$	$+ 0,05092$	$g_1 + 0,10031 g_2$
$J_5 = -0,09675$	$+ 0,06082$	$g_1 + 0,10153 g_2$
$J_6 = -0,09217$	$+ 0,06638$	$g_1 + 0,09656 g_2$
$J_7 = -0,08130$	$+ 0,06646$	$g_1 + 0,08579 g_2$
$J_8 = -0,06939$	$+ 0,06171$	$g_1 + 0,07381 g_2$
$J_9 = -0,05626$	$+ 0,05314$	$g_1 + 0,06019 g_2$
$J_{10} = -0,03506$	$+ 0,03517$	$g_1 + 0,03790 g_2$

TABELLA XXXIX.

Coefficienti J_i

$p = 4$	$\mu_0 = 0,5$	Caso B
$J_1 = -0,02595$	$+ 0,02167$	$g_1 + 0,02332 g_2$
$J_2 = -0,03929$	$+ 0,01207$	$g_1 + 0,05533 g_2$
$J_3 = -0,07493$	$+ 0,03302$	$g_1 + 0,08378 g_2$
$J_4 = -0,08993$	$+ 0,04855$	$g_1 + 0,09576 g_2$
$J_5 = -0,09254$	$+ 0,05819$	$g_1 + 0,09710 g_2$
$J_6 = -0,08833$	$+ 0,06369$	$g_1 + 0,09254 g_2$
$J_7 = -0,07901$	$+ 0,06468$	$g_1 + 0,08338 g_2$
$J_8 = -0,06783$	$+ 0,06041$	$g_1 + 0,07216 g_2$
$J_9 = -0,05592$	$+ 0,05288$	$g_1 + 0,05983 g_2$
$J_{10} = -0,03667$	$+ 0,03682$	$g_1 + 0,03965 g_2$

TABELLA XL.

Coefficienti J_i

$p = 4$	$\mu_0 = 1$	Caso A
$J_1 = -0,02316$	$+ 0,0298$	$g_1 + 0,01387 g_2$
$J_2 = -0,03180$	$+ 0,01159$	$g_1 + 0,05253 g_2$
$J_3 = -0,06488$	$+ 0,03593$	$g_1 + 0,09045 g_2$
$J_4 = -0,07784$	$+ 0,05532$	$g_1 + 0,10796 g_2$
$J_5 = -0,07940$	$+ 0,06779$	$g_1 + 0,11233 g_2$
$J_6 = -0,07524$	$+ 0,07604$	$g_1 + 0,10986 g_2$
$J_7 = -0,06610$	$+ 0,07803$	$g_1 + 0,10017 g_2$
$J_8 = -0,05578$	$+ 0,07325$	$g_1 + 0,08709 g_2$
$J_9 = -0,04524$	$+ 0,06425$	$g_1 + 0,07233 g_2$
$J_{10} = -0,02829$	$+ 0,04321$	$g_1 + 0,04626 g_2$

TABELLA XLI.

Coefficienti J_i

	$p = 4$	$\mu_0 = 1$	Caso B
J_1	$= -0,0^2374$	$+ 0,0^2117$	$g_1 + 0,01629 g_2$
J_2	$= -0,03392$	$+ 0,01232$	$g_1 + 0,05610 g_2$
J_3	$= -0,06263$	$+ 0,03452$	$g_1 + 0,08738 g_2$
J_4	$= -0,07416$	$+ 0,05260$	$g_1 + 0,10285 g_2$
J_5	$= -0,07567$	$+ 0,06661$	$g_1 + 0,10705 g_2$
J_6	$= -0,07180$	$+ 0,07266$	$g_1 + 0,10485 g_2$
J_7	$= -0,06400$	$+ 0,07574$	$g_1 + 0,09705 g_2$
J_8	$= -0,05426$	$+ 0,07146$	$g_1 + 0,08477 g_2$
J_9	$= -0,04479$	$+ 0,06380$	$g_1 + 0,07167 g_2$
J_{10}	$= -0,02949$	$+ 0,04513$	$g_1 + 0,04825 g_2$

TABELLA XLII.

Coefficienti J_i

	$p = 4$	$\mu_0 = 2$	Caso A
J_1	$= -0,0^2207$	$+ 0,0^291$	$g_1 + 0,01363 g_2$
J_2	$= -0,02298$	$+ 0,01229$	$g_1 + 0,05334 g_2$
J_3	$= -0,04478$	$+ 0,04129$	$g_1 + 0,10352 g_2$
J_4	$= -0,05323$	$+ 0,06828$	$g_1 + 0,13198 g_2$
J_5	$= -0,05436$	$+ 0,08812$	$g_1 + 0,14465 g_2$
J_6	$= -0,05158$	$+ 0,10375$	$g_1 + 0,14838 g_2$
J_7	$= -0,04566$	$+ 0,11136$	$g_1 + 0,14151 g_2$
J_8	$= -0,03944$	$+ 0,10912$	$g_1 + 0,12856 g_2$
J_9	$= -0,03174$	$+ 0,09660$	$g_1 + 0,10776 g_2$
J_{10}	$= -0,01984$	$+ 0,06586$	$g_1 + 0,06991 g_2$

TABELLA XLIII.

Coefficienti J_i

	$p = 4$	$\mu_0 = 2$	Caso B
J_1	$= -0,00244$	$+ 0,00108$	$g_1 + 0,01601 g_2$
J_2	$= -0,02453$	$+ 0,01310$	$g_1 + 0,05912 g_2$
J_3	$= -0,04319$	$+ 0,03965$	$g_1 + 0,09989 g_2$
$J_{4\phi}$	$= -0,05065$	$+ 0,06495$	$g_1 + 0,12575 g_2$
J_5	$= -0,05177$	$+ 0,08409$	$g_1 + 0,13804 g_2$
J_6	$= -0,04916$	$+ 0,09927$	$g_1 + 0,14188 g_2$
J_7	$= -0,04413$	$+ 0,10811$	$g_1 + 0,13722 g_2$
J_8	$= -0,03821$	$+ 0,10641$	$g_1 + 0,12518 g_2$
J_9	$= -0,03130$	$+ 0,09587$	$g_1 + 0,10680 g_2$
J_{10}	$= -0,02062$	$+ 0,06877$	$g_1 + 0,07294 g_2$

TABELLA XLIV.

Coefficienti J_i

	$p = 4$	$\mu_0 = 3$	Caso A
J_1	$= -0,0^2153$	$+ 0,0^220$	$g_1 + 0,01394 g_2$
J_2	$= -0,01479$	$+ 0,01279$	$g_1 + 0,05855 g_2$
J_3	$= -0,02817$	$+ 0,04702$	$g_1 + 0,11908 g_2$
J_4	$= -0,03317$	$+ 0,08199$	$g_1 + 0,15871 g_2$
J_5	$= -0,03385$	$+ 0,10961$	$g_1 + 0,17945 g_2$
J_6	$= -0,03219$	$+ 0,13264$	$g_1 + 0,18886 g_2$
J_7	$= -0,02853$	$+ 0,14666$	$g_1 + 0,18522 g_2$
J_8	$= -0,02482$	$+ 0,14589$	$g_1 + 0,16997 g_2$
J_9	$= -0,02030$	$+ 0,13145$	$g_1 + 0,14517 g_2$
J_{10}	$= -0,01276$	$+ 0,09025$	$g_1 + 0,95190 g_2$

TABELLA XLV.

Coefficienti J_i

	$p = 4$	$\mu_0 = 3$	Caso B
J_1	$= -0,0^2181$	$+ 0,0^225$	$g_1 + 0,01638 g_2$
J_2	$= -0,01576$	$+ 0,01357$	$g_1 + 0,06236 g_2$
J_3	$= -0,02728$	$+ 0,04523$	$g_1 + 0,11507 g_2$
J_4	$= -0,03175$	$+ 0,07815$	$g_1 + 0,15158 g_2$
J_5	$= -0,03244$	$+ 0,10476$	$g_1 + 0,17157 g_2$
J_6	$= -0,03093$	$+ 0,12728$	$g_1 + 0,18114 g_2$
J_7	$= -0,02774$	$+ 0,14249$	$g_1 + 0,17976 g_2$
J_8	$= -0,02428$	$+ 0,14251$	$g_1 + 0,16578 g_2$
J_9	$= -0,02021$	$+ 0,13068$	$g_1 + 0,14410 g_2$
J_{10}	$= -0,01336$	$+ 0,09439$	$g_1 + 0,09947 g_2$

TABELLA XLVI.

Coefficienti J_i

	$p = 4$	$\mu_0 = 5$	Caso A
J_1	$= -0,0^21$	$+ 0,0^2101$	$g_1 + 0,01428 g_2$
J_2	$= -0,0^268$	$+ 0,01393$	$g_1 + 0,06599 g_2$
J_3	$= -0,0^286$	$+ 0,05760$	$g_1 + 0,14823 g_2$
J_4	$= -0,0^2116$	$+ 0,10580$	$g_1 + 0,20666 g_2$
J_5	$= -0,0^2116$	$+ 0,14612$	$g_1 + 0,24019 g_2$
J_6	$= -0,0^2109$	$+ 0,18351$	$g_1 + 0,26083 g_2$
J_7	$= -0,0^297$	$+ 0,20975$	$g_1 + 0,26357 g_2$
J_8	$= -0,0^285$	$+ 0,21427$	$g_1 + 0,24861 g_2$
J_9	$= -0,0^270$	$+ 0,19653$	$g_1 + 0,21598 g_2$
J_{10}	$= -0,0^244$	$+ 0,13801$	$g_1 + 0,14447 g_2$

TABELLA XLVII.

Coefficienti J_i

	$p = 4$	$\mu_0 = 5$	Caso B
J_1	$= -0,041$	$+ 0,03120 g_1$	$+ 0,01674 g_2$
J_2	$= -0,0363$	$+ 0,01488 g_1$	$+ 0,07042 g_2$
J_3	$= -0,0374$	$+ 0,05550 g_1$	$+ 0,14326 g_2$
J_4	$= -0,03116$	$+ 0,10118 g_1$	$+ 0,19792 g_2$
J_5	$= -0,03117$	$+ 0,14019 g_1$	$+ 0,23065 g_2$
J_6	$= -0,03110$	$+ 0,17633 g_1$	$+ 0,25050 g_2$
J_7	$= -0,03100$	$+ 0,20438 g_1$	$+ 0,25663 g_2$
J_8	$= -0,0387$	$+ 0,20959 g_1$	$+ 0,24290 g_2$
J_9	$= -0,0373$	$+ 0,19545 g_1$	$+ 0,21458 g_2$
J_{10}	$= -0,0349$	$+ 0,14443 g_1$	$+ 0,15112 g_2$

PARTE III.

C. POSSIO

1. — Per dare un esempio pratico di applicazione del metodo esposto nella parte I, si sceglie un'elica tripala, con una legge di variazione della larghezza corrispondente al caso B e degli

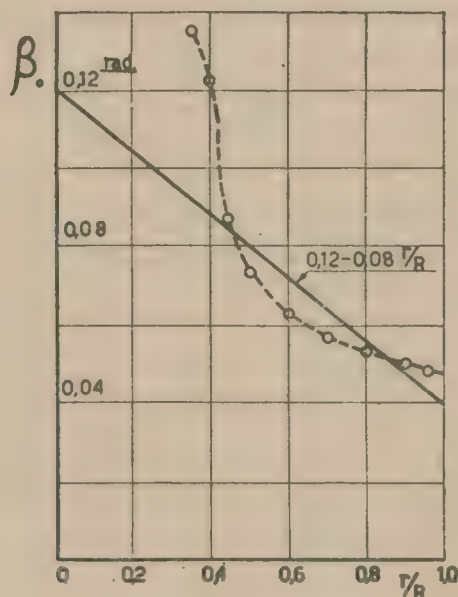


Fig. 4.

spessori corrispondente a quella della famiglia 28^a ⁽¹⁾ (profili Raf 6): si assume $\mu_0 = 3$ e un calettamento del profilo a $0,75 R$ di 35° .

Nella fig. 4 è tracciata la curva degli angoli β_0 (in rad.) di portanza nulla dei profili in funzione del raggio; la retta che meglio può rappresentare l'andamento della curva ha l'equazione:

$$\beta_0 = 0,12 - 0,08 \frac{r}{R}$$

⁽¹⁾ Cfr. Diagrammi logaritmici di eliche a passo variabile raccolti in 24 famiglie.

di modo che, avendosi una rotazione della pala rispetto al calettamento di passo uniforme di $20^\circ = 0,35^{\text{rad}}$, la legge di variazione lungo il raggio dell'incidenza assoluta ha l'espressione:

$$\alpha = \text{artg} \frac{0,197}{r/R} + 0,35 + 0,12 - 0,08 \frac{r}{R} - \text{artg} \frac{1}{3r/R}.$$

I due coefficienti g_1 e g_2 assumono così i valori:

$$g_1 = -0,08 \quad g_2 = 0,47$$

mediante i quali dalle tabelle della parte II si ricavano immediatamente i valori dei coefficienti J_i . Si possono pure calcolare le incidenze effettive α_e colla relazione:

$$\alpha_e^i = \frac{\Gamma^i}{c'_{p_\infty} l_i V_e^i} = \frac{R}{r_i} \beta_r J_i$$

e le incidenze indotte che si ottengono come differenze fra le incidenze assolute apparenti e quelle effettive. Nella tabella seguente sono riportati i valori delle grandezze J_i , α_e^i e α_i^i :

$\frac{r}{R} = 0,2$	$J_i = 0,0103$	$\alpha_e^i = 0,158$	$\alpha_i^i = 0,051$
0,375	0,0191	0,154	0,044
0,5	0,0253	0,150	0,080
0,6	0,0321	0,172	0,070
0,7	0,0347	0,180	0,065
0,8	0,0355	0,188	0,068
0,875	0,0326	0,189	0,071
0,925	0,0282	0,185	0,080
0,975	0,0201	0,202	0,065

Per fare un confronto coi dati sperimentali ed avere così un'idea dell'ordine di approssimazione che si può raggiungere con questo procedimento, si può calcolare il valore del coefficiente di trazione τ e confrontarlo col valore sperimentale. Su un elemento di pala di profondità dr agiscono, prescindendo dalla resistenza di profilo, la portanza dP e la resistenza indotta dR_i che hanno l'espressione

$$dP = \rho \cdot \Gamma \cdot V_e \cdot dr$$

$$dR_i = \rho \cdot \Gamma \cdot w \cdot dr$$

di modo che, avendosi una rotazione della pala rispetto al calettamento di passo uniforme di $20^\circ = 0,35^{\text{rad}}$, la legge di variazione lungo il raggio dell'incidenza assoluta ha l'espressione:

$$\alpha = \text{artg} \frac{0.197}{r/R} + 0,35 + 0,12 - 0,08 \frac{r}{R} - \text{artg} \frac{1}{3r/R}.$$

I due coefficienti g_1 e g_2 assumono così i valori:

$$g_1 = -0,08 \quad g_2 = 0,47$$

mediante i quali dalle tabelle della parte II si ricavano immediatamente i valori dei coefficienti J_i . Si possono pure calcolare le incidenze effettive α_e colla relazione:

$$\alpha_e^i = \frac{\Gamma^i}{c'_{p_\infty} l_i V_e^i} = \frac{R}{r_i} \beta_i J_i$$

e le incidenze indotte che si ottengono come differenze fra le incidenze assolute apparenti e quelle effettive. Nella tabella seguente sono riportati i valori delle grandezze J_i , α_e^i e α_i^i :

$\frac{r}{R} = 0,2$	$J_i = 0,0103$	$\alpha_e^i = 0,158$	$\alpha_i^i = 0,051$
0,375	0,0191	0,154	0,044
0,5	0,0253	0,150	0,080
0,6	0,0321	0,172	0,070
0,7	0,0347	0,180	0,065
0,8	0,0355	0,188	0,068
0,875	0,0326	0,189	0,071
0,925	0,0282	0,185	0,080
0,975	0,0201	0,202	0,065

Per fare un confronto coi dati sperimentali ed avere così un'idea dell'ordine di approssimazione che si può raggiungere con questo procedimento, si può calcolare il valore del coefficiente di trazione τ e confrontarlo col valore sperimentale. Su un elemento di pala di profondità dr agiscono, prescindendo dalla resistenza di profilo, la portanza dP e la resistenza indotta dR_i che hanno l'espressione

$$dP = \rho \cdot \Gamma \cdot V_e \cdot dr$$

$$dR_i = \rho \cdot \Gamma \cdot w \cdot dr$$

dove il significato dei simboli si ricava ovviamente dalla fig. 5. Si ha così una trazione

$$T = p_0 \int_0^R \Gamma (V_e \cos \varepsilon - w \sin \varepsilon) \cdot dr$$

da cui, essendo

$$V_e \cos \varepsilon = \omega r = \frac{r}{R} \mu_0 V_0$$

$$w \sin \varepsilon = \alpha_i V_e \sin \varepsilon = \alpha_i V_0$$

si ricava:

$$\frac{dT}{dr} = p_0 \Gamma V_0 \mu_0 \left(\frac{r}{R} - \frac{\alpha_i}{\mu_0} \right).$$

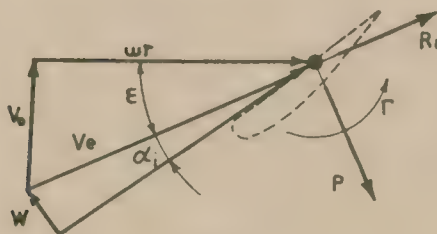


Fig. 5.

Introducendo il coefficiente di trazione τ che è definito dalla relazione:

$$T = \tau \mu_0^2 R^2 V_0^2$$

e tenendo presente che è:

$$p \Gamma = 4\pi R V_0 \cdot J$$

si ha infine:

$$\frac{d\tau}{dr/R} = \frac{4\pi J}{\mu_0} \left(\frac{r}{R} - \frac{\alpha_i}{\mu_0} \right).$$

Nella fig. 6 è segnato il diagramma della funzione $\frac{d\tau}{dr/R}$: integrando si è trovato il valore $\tau = 0,0529$. Dai diagrammi della 28ª famiglia si troverebbero, per $\beta = 35^\circ$ e $\gamma = \frac{1}{3}$, un rendimento $\eta = 0,77$ e un coefficiente di coppia $k = 0,023$ da cui risulta il valore 0,0531, leggermente superiore al valore calcolato. Si osservi che il procedimento che abbiamo applicato prescinde dalla resistenza di profilo, per cui si dovrebbe trovare un valore superiore a quello sperimentale: la ragione per cui in questo esempio

si è trovato un valore inferiore consiste nel fatto che i diagrammi sperimentali si riferiscono ad un'elica in presenza di gondola, la quale ha l'effetto di aumentare la trazione. Difatti, coi dati della famiglia 28^a bis, corrispondente alla stessa elica, ma in presenza

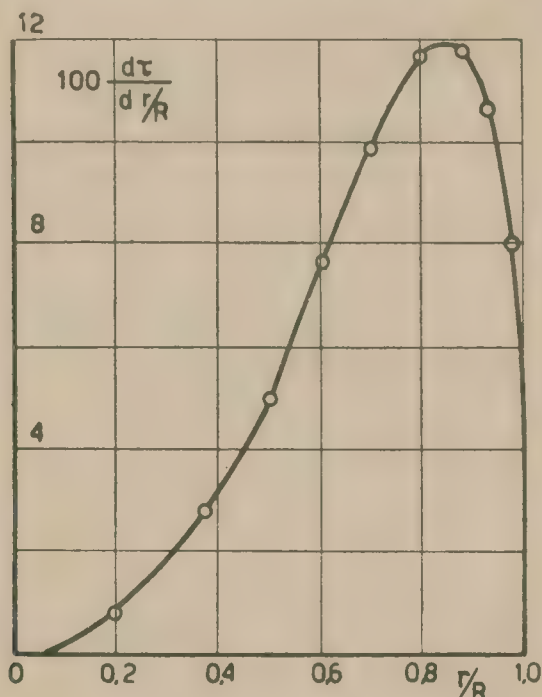


Fig. 6.

di una gondola di maggiori dimensioni, si troverebbe, sempre per $\beta = 35^\circ$ e $\gamma = \frac{1}{3}$, $\tau = 0,0545$, valore nettamente superiore a quello precedente.

2. — *Estensione dell'uso delle tabelle al caso di passo uniforme per un calettamento qualsiasi.* — L'uso delle tabelle allegate alla parte II può essere esteso, con una semplicissima modificazione e con risultati soddisfacenti, al caso in cui il passo è costante per un calettamento β_c del profilo a $0,75 R$ diverso da 15° . In questo caso, nell'espressione di α_0 data dalla formola (2) della parte I si dovrebbe introdurre per il coefficiente k , in luogo del valore 0,197, il valore $k^* = 0,75 \cdot \operatorname{tg} \beta_c$. Ora, la funzione

$$f = \operatorname{artg} \frac{k^*}{r/R} - \operatorname{artg} \frac{0,197}{r/R}$$

si può rappresentare, in modo sufficientemente approssimato, con l'espressione lineare:

$$g'_2 + g'_1 \frac{r}{R}$$

purchè si escluda l'intervallo che va sino a $\frac{r}{R} = 0,3$ circa, il quale non presenta interesse, in quanto corrisponde ad una parte

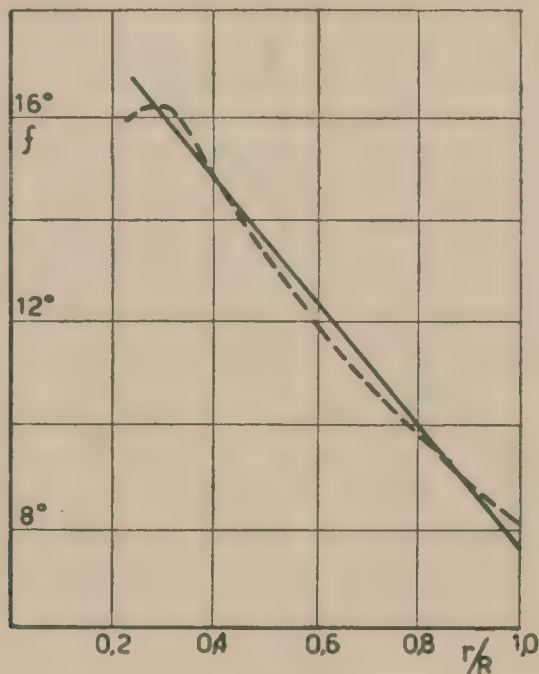


Fig. 7.

dell'elica che non ha praticamente efficacia: si possono quindi accettare per i coefficienti J i valori dati dalle tabelle, pur di assumere per i coefficienti g_1 e g_2 i valori:

$$g_2 = \bar{g}_2 + \bar{g}'_2 + (\beta - \beta_c)^{\text{rad}}$$

$$g_1 = \bar{g}_1 + g'_1$$

dove

$$\bar{g}_2 + \bar{g}'_1 \frac{r}{R}$$

è la retta che approssima la curva degli angoli di portanza nulla dei profili e β è l'angolo di calettamento del profilo a $0,75 R$.

Nella fig. 7 è riportato il diagramma della funzione f nel caso $\beta_c = 25^\circ$: si può rilevare come sia possibile rappresentarne bene l'andamento, escluso l'intervallo $0 < r < 0,25 R$, con una retta. Nella fig. 8 sono riportati i valori dei coefficienti $-g_1'$ e g_2' nel campo di variazione di β_c che può praticamente interessare.

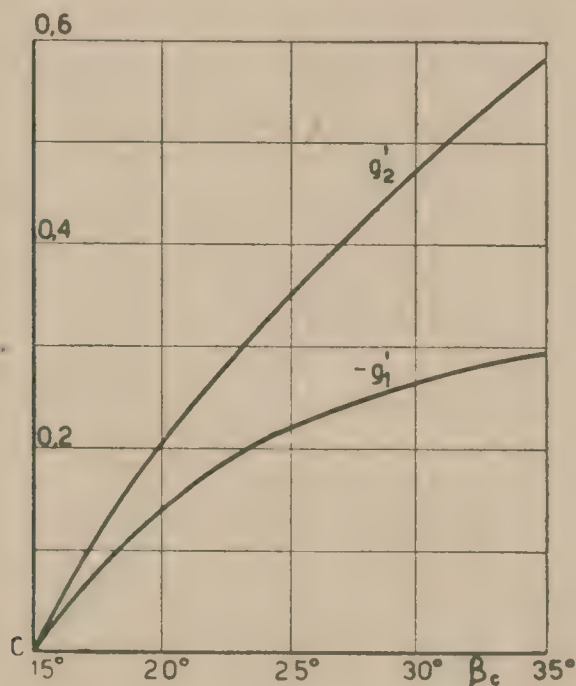


Fig. 8.

3. *Esempio di progetto di un'elica che realizzi una data distribuzione di circuitazione.* — Applichiamo il procedimento esposto nella parte I al calcolo di un'elica bipala che per un determinato valore di μ_0 abbia una distribuzione di circuitazione Γ di forma assegnata, e che realizzi un dato valore del coefficiente di trazione τ . Come forma del diagramma di Γ scegliamo quella che corrisponde alla minima perdita di energia indotta: si noti che questa scelta corrisponde alla più naturale esigenza del progetto dell'elica, in quanto esso dovrebbe logicamente essere fatto in vista della condizione di funzionamento per cui si desidera il massimo rendimento. La legge di distribuzione della circuitazione che dà luogo alla minima perdita di energia indotta è stata determinata dal Goldstein, e il risultato è riportato nel diagramma della fig. 253 a pag. 427 dell'*Aerodinamica* del prof. Pistolesi: scegliendo 3 come

valore di μ_0 ⁽¹⁾ per cui calcolare l'elica, dobbiamo assumere come forma del diagramma di Γ la curva che si annulla per $\mu = 3$. Indicando con $a\left(\frac{r}{R}\right)$ le ordinate di questa curva, che per maggior

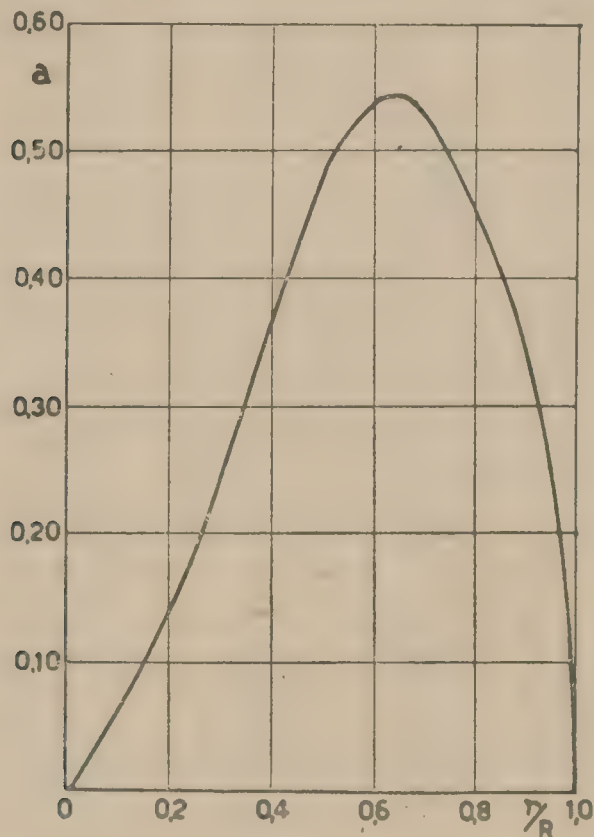


Fig. 9.

chiarezza è stata riportata nella fig. 9, e tenendo conto che i coefficienti J_i sono proporzionali ai valori della circuitazione Γ_i , possiamo scrivere:

$$J_i = k \cdot a\left(\frac{r_i}{R}\right)$$

(¹) La determinazione di μ_0 in ogni caso concreto può essere fatta nel modo più naturale come qui è indicato: la velocità V_0 di avanzo e da considerarsi nota, e così pure si può ammettere di conoscere ω , se si è fissato il tipo di motore che comanda l'elica. Scelto quindi il raggio R in modo che $\omega R \leq V_0$ (se V_0 è la velocità del suono nel fluido alla quota di adattamento), ne risulta $\mu_0 = \frac{V_0}{\omega R}$.

dove k è un coefficiente di proporzionalità che determineremo in modo da ottenere il valore prefissato del coefficiente di trazione, che in ogni problema concreto è dato da $\frac{R_r}{\rho R^4 \omega^2}$ (se R_r è la resistenza dell'apparecchio alla velocità V_0) e che assumiamo in questo esempio uguale a 0,025. Ricordando l'espressione trovata

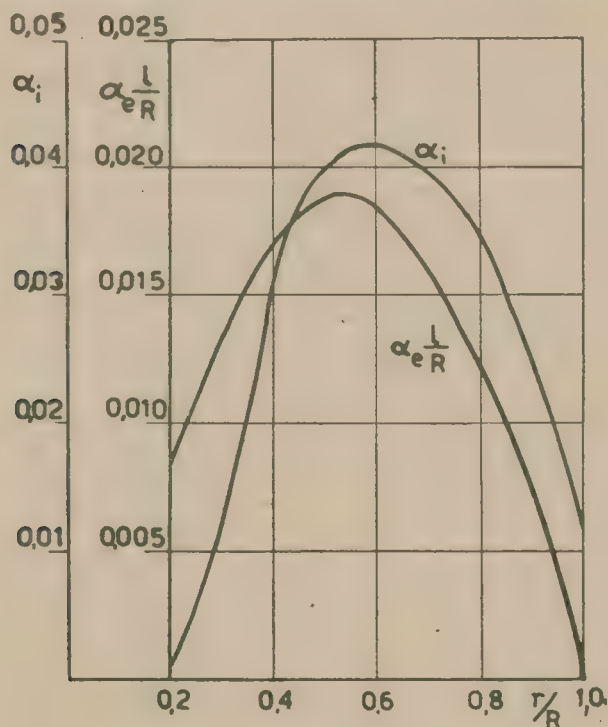


Fig. 10.

nel paragrafo 2 per $\frac{d\tau}{dr/R}$, nella quale possiamo per semplicità trascurare il termine corrispondente alla resistenza indotta, si ha:

$$\tau = \frac{4\pi}{\mu_0} k \int_0^1 a\left(\frac{r}{R}\right) \cdot \frac{r}{R} \cdot dr/R = 0,025$$

da cui, essendo nel nostro caso

$$\int_0^1 a\left(\frac{r}{R}\right) \cdot \frac{r}{R} \cdot dr/R = 0,189$$

si ottiene:

$$k = 0,0315.$$

Si possono così calcolare senz'altro i valori dei coefficienti J_i mediante i quali dalle relazioni

$$\alpha_i^i = - \frac{R}{r_i} \cdot \sum A_{nr} J_n$$

$$\alpha_e^i \frac{l_i}{R} = \frac{4\pi J_i}{pc'_p \sqrt{1 + \mu_i^2}}$$

si ricavano i valori delle incidenze indotte α_i^i e delle grandezze $\alpha_e^i \frac{l_i}{R}$. Nella fig. 10 sono tracciati i diagrammi delle α_i e $\alpha_e \frac{l}{R}$, i cui valori sono anche riportati, insieme a quelli dei coefficienti J_i , nella tabella seguente.

$\frac{r_i}{R}$	1000 J_i	1000 α_i^i	1000 $\alpha_e^i \frac{l_i}{R}$	$\frac{l_i}{R}$
0,05	0,76	—	—	—
0,2	4,35	1,2	9,2	0,053
0,375	10,7	26	16,2	0,108
0,5	15,1	41	19,1	0,142
0,6	17	42	18,7	0,140
0,7	16,7	39,5	15,8	0,117
0,8	14,3	36	12,5	0,09
0,875	12	28,3	9,2	0,0625
0,925	9,1	22	6,5	0,0425
0,975	5,6	15,2	3,3	0,0205

La conoscenza dei valori di α_i e di $\alpha_e \frac{l}{R}$ non è ancora sufficiente a determinare l'elica in modo completo, in quanto si può ancora fissare arbitrariamente o la legge di variazione della larghezza oppure quella del passo. Ora, è senz'altro ovvia la convenienza di assegnare questa anzichè quella, in quanto per rendere minima la perdita dovuta alla resistenza d'attrito, qui non considerata, è necessario che l'incidenza effettiva dei vari profili sia uguale a quella corrispondente alla massima efficienza η dei profili stessi. Fissata la serie dei profili che si intende adottare, il valore di α_e per $\left(\frac{c_p}{c_{ro}} \right)_{\max}$ (indicando con c_{ro} il coefficiente di resistenza per allungamento infinito corrispondente al coeffi-

ciente di portanza c_p) è da considerarsi noto, e allora le formole sopra scritte permettono subito il calcolo di $\frac{l}{R}$ e quindi la determinazione della forma della pala d'elica. Si deve tuttavia osservare che il valore di α_e per $\eta_{\max}$ non è critico, in quanto la curva della efficienza in funzione di α_e per allungamento infinito è in generale alquanto *piatta*, e poichè può essere spesso conveniente limitare il valore del coefficiente di portanza (tanto più se il numero

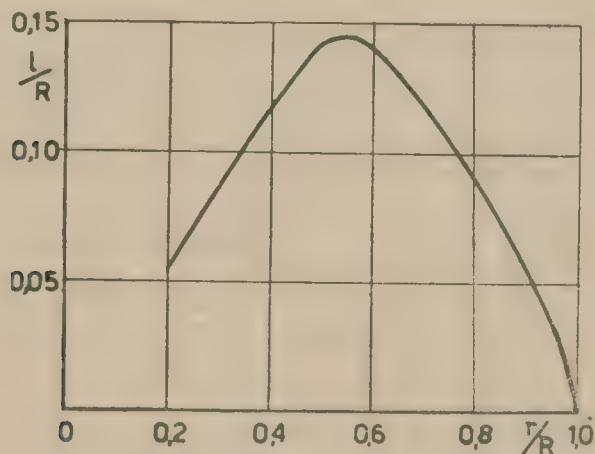


Fig. 11.

di Mach è notevole), così può essere opportuno tenere il valore medio di α_e lungo il raggio alquanto più piccolo di quello ottimo sopra definito.

Nel presente esempio si è assunta la legge di variazione dell'angolo di calettamento dei profili lungo il raggio data dall'espressione

$$\beta = \operatorname{arctg} \frac{1}{3 \frac{r}{R}} + \beta_0.$$

L'incidenza assoluta apparente viene ad avere così il valore costante β_0 che è stato fissato in modo che l'incidenza effettiva abbia il valor medio di 8° , prossimo all'angolo di massima efficienza dei profili generalmente adottati. Dal diagramma di fig. 10 si rileva che il valore medio dell'incidenza indotta nell'intervallo $0,2 \leq \frac{r}{R} \leq 1$ è di 2° circa, per cui si ottiene $\beta_0 = 10^\circ = 0,175^{\text{rad}}$.

La larghezza relativa delle pale risulta così determinata dalla relazione

$$\frac{l_i}{R} = \frac{0,175 - \alpha_i^i}{a_i \frac{l_i}{R}}.$$

Nella tabella precedente sono segnati anche i valori della larghezza relativa, il cui diagramma è riportato nella fig. 11.

II TEMA.

LA PROPULSIONE A REAZIONE

LORENZO POGGI

Principi dinamici e termodinamici della propulsione a reazione.

Riassunto. — *Si studiano con metodo prevalentemente sintetico i vari sistemi di propulsione a reazione con captazione di aria esterna finora proposti, se ne deducono criteri qualitativi circa la loro efficienza e si indicano le vie da seguirsi per renderla massima, giungendo in alcuni casi alle espressioni analitiche dei rendimenti e delle loro condizioni di massimo.*

Il tema che ci siamo proposti è tutt'altro che nuovo, chè vi sono sull'argomento diverse pubblicazioni, alcune delle quali notevoli per ampiezza e generalità di trattazione. Citiamo tra queste, appunto per la varietà degli argomenti trattati, uno studio del ROY, risalente al 1930, nel quale sono praticamente esaminate tutte le possibilità di propulsione a reazione.

Ma non ci proponiamo qui tanto di trattare argomenti o soluzioni nuove, quanto di esaminare con spirito critico le soluzioni già proposte e le relazioni già impostate, per dedurne soprattutto criteri qualitativi circa l'opportunità, o meno, dell'adozione dei vari accorgimenti escogitati in proposito.

Naturalmente, a tale scopo, è necessario, sia pure in forma sommaria, premettere alcune definizioni e soprattutto alcune precisazioni sulla materia da trattare e sui termini impiegati.

Non è una novità il dire che in senso lato tutte le forme di propulsione per aereo sono in fondo propulsioni a reazione, in quanto, alla trazione utile ottenuta, fa sempre riscontro una certa quantità di moto impressa all'aria o ad un altro fluido.

Nel caso delle normali eliche di propulsione la teoria classica di FROUDE ci insegna appunto a calcolare la spinta in base agli incrementi di velocità impressi all'aria.

Si può pensare ad una distinzione, consistente nel serbare il termine di propulsione a reazione in senso stretto a quei casi nei

È facile vedere che l'incremento di energia così definito non viene alterato se si aggiunge al sistema una velocità costante e, in particolare, diretta nel senso del moto (semprechè, naturalmente, ciò non porti ad una variazione del processo termodinamico).

Osserviamo infatti che può scriversi in genere (ponendo l'asse x nel senso del moto):

$$E_c = \sum \frac{1}{2} m(w_x^2 + w_y^2 + w_z^2)$$

mentre se si aggiunge una velocità V_0 costante nel senso del moto si ha una energia cinetica:

$$\begin{aligned} E'_c &= \frac{1}{2} \sum m(w_x + V_0)^2 + w_y^2 + w_z^2 \\ &= E_c + \frac{1}{2} V_0^2 \sum m + V_0 \sum m w_x \end{aligned}$$

e quindi (essendo V_0 costante):

$$\Delta E'_c = \Delta E_c + V_0 \Delta \sum m w_x.$$

Ma notoriamente il termine $\Delta \sum m \cdot w_x$ rappresenta la variazione della quantità di moto impressa al sistema, equivalente, a meno del segno, alla spinta T e quindi:

$$\Delta E'_c = \Delta E_c - T V_0.$$

Risulta quindi, in base alla (1), con notazioni evidenti:

$$L_1 = L'_1$$

e cioè il lavoro L_1 è determinato, come si è detto, in modo univoco, indipendentemente dalla velocità del sistema. Questa osservazione è fondamentale perchè per il computo di L_1 ci si può senz'altro riferire al caso in cui il corpo sia fermo.

Può allora senz'altro definirsi il rendimento termodinamico η , ponendo:

$$(2) \quad \eta = \overline{L_1}/Q$$

dove Q è il calore, espresso in unità meccaniche, immesso nel sistema per unità di peso dell'aria interessata.

Veniamo ora a definire il rendimento di propulsione.

La definizione di questo è immediata se il mobile considerato non varia durante il percorso la sua massa, essendo in questo caso il rendimento dato dalla espressione

$$(3) \quad TV/PL_1.$$

In realtà la suddetta condizione non si verifica mai in modo assoluto, perchè, se non altro, si ha un consumo di combustibile, senza pensare al caso in cui, come nel razzo ad esplosivo, tanto il combustibile quanto il comburente sono portati dal mobile.

Nel caso più generale bisognerà, nella definizione del rendimento di propulsione, tener presente il contributo dell'energia cinetica della massa persa durante il percorso. Questa, se si indica con m il peso di combustibile consumato per kg di aria introdotta, è data dall'espressione $\frac{1}{2} P \frac{m}{g} \cdot V^2$, e può essere considerata sotto un duplice aspetto, e cioè in addizione al lavoro speso o in sottrazione a quello ottenuto.

Nel primo caso l'energia suddetta è considerata come energia disponibile da conglobarsi col lavoro L_1 prima definito agli effetti della energia iniziale, mentre per energia in definitiva utile si considera al solito il prodotto TV . Il rendimento termodinamico sarebbe dato allora dalla espressione:

$$(3') \quad \frac{TV}{P \left(L_1 + m \frac{V^2}{2g} \right)}$$

Nel secondo caso invece si considera la variazione dell'energia cinetica del corpo per effetto della perdita di massa come lavoro utile negativo, cosicchè il lavoro utile netto risulta:

$$TV - Pm \frac{V^2}{2g}$$

e il rendimento di propulsione:

$$(3'') \quad \eta_p = \frac{TV - \frac{V^2}{2g} mP}{PL_1}.$$

Analogamente può definirsi il rendimento globale ponendo

$$(4) \quad \eta_g = \frac{TV}{Q_P}$$

se si trascura l'incremento negativo di energia cinetica del corpo, oppure

$$(4') \quad \eta_g = \frac{TV}{P \left(Q + m \frac{V^2}{2g} \right)}$$

o ancora

$$(4'') \quad \eta_g = \frac{TV - Pm \frac{V^2}{2g}}{PQ}$$

secondo che quest'incremento è considerato in aggiunta del lavoro speso o in sottrazione di quello utile.

Delle diverse definizioni prospettate, prescindendo dalle (3) e (4) che, come si è detto, non sono rigorose (potendo portare, come è facile mostrare, in casi particolari a rendimenti di propulsione maggiori di uno) quelle date dalla (3'') e dalla (4'') hanno il vantaggio che per esse risulta senz'altro:

$$(5) \quad \eta_g = \eta_p \eta_t$$

ciò che non capita adottando la (3') e la (4'). È poi da notare che la (4') non si presenta molto felice dal punto di vista della omogeneità, almeno fintanto che si vogliano considerare come cose diverse (se pur dimensionalmente omogenee) le energie di prima e di seconda specie.

In essa infatti una energia termica Q , non trasformabile in energia di prima specie che parzialmente e con aliquota dipendente da circostanze varie, è direttamente sommata ad una energia cinetica.

Non è detto che l'adottare uno dei rendimenti globali (4') e (4'') debba necessariamente portare all'adozione dell'analogo rendimento di propulsione quale definito dalle (3') e (3'').

Il ROY propone, ad es., di definire il rendimento globale secondo la (4'), deducendone poi il rendimento di propulsione, conosciuto che sia quello termico, in base alla (5).

Espressione del rendimento di propulsione quando il fluido propulsivo coincide col fluido termodinamicamente attivo.

Sia:

P = la portata di aria introdotta;

m = il peso di combustibile consumato per kg di aria;

V = la velocità di traslazione del corpo;

w = la velocità relativa di uscita del fluido dal corpo nel senso del moto;

ε = un coefficiente che esprime il rapporto tra l'energia cinetica del fluido di scarico corrispondente alla velocità secondo il moto e l'energia totale.

Abbiamo facilmente, con le solite notazioni (ricordiamo che L_1 è il lavoro del ciclo riferito all'unità di peso di aria):

$$(6) \quad w^2(1 + m) = \varepsilon(2gL_1 + V^2)$$

e d'altra parte, per il principio della quantità di moto:

$$(7) \quad T = P \frac{w(1 + m) - V}{g},$$

da cui, adottando per il rendimento di propulsione l'espressione (3''):

$$\eta_p = 2\varepsilon \frac{w(1 + m)V - V^2(1 + m/2)}{w^2(1 + m) - V^2\varepsilon}$$

e, in base alla (6), posto:

$$(8) \quad \frac{L_1}{\frac{V^2}{2g}} = h$$

$$(8') \quad \eta_p = \frac{2}{\sqrt{h}} \left\{ \sqrt{1 + m} \cdot \sqrt{\varepsilon} \sqrt{1 + \frac{1}{h}} - \frac{1}{\sqrt{h}} \left(1 + \frac{m}{2} \right) \right\}$$

o anche, con approssimazione fortissima, essendo m piccolo dinanzi a 1 e quindi $\sqrt{1 + m} \approx 1 + m/2$; e per ε unitario (ciò che può in pratica sempre farsi con una opportuna valutazione del lavoro L_1)

$$(8'') \quad \eta_p = \frac{2 + m}{\sqrt{h}} \left\{ \sqrt{1 + \frac{1}{h}} - \frac{1}{\sqrt{h}} \right\}.$$

Se, anzichè considerare il fenomeno propulsivo nel suo complesso, ci si limita a considerare il lavoro di trazione dipendente dalla velocità relativa impressa al fluido rispetto al solido, prescindendo dal modo con cui il fluido è stato portato sul solido stesso e già si trova su questo, si può, anzichè un rendimento vero e proprio, definire un *coefficiente di utilizzazione* pari a:

$$(9) \quad \tau_p = \frac{T'V}{P L_r}$$

dove T' è la forza di reazione corrispondente alla quantità di moto del fluido uscente, nel moto relativo, e L_r è la corrispondente energia. Col procedimento già prima adottato si ottiene facilmente (posto al solito $\varepsilon = 1$):

$$\tau_p = 2\sqrt{1+m} \frac{1}{Vh} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{h}}}$$

o anche

$$(9') \quad \tau_p = 2\sqrt{1+m} \frac{1}{Vh_r}$$

se si pone

$$h_r = \frac{L_r}{\frac{V^2}{2g}} = h + 1.$$

Il parametro h_r ha un chiaro significato, essendo il rapporto tra l'energia impressa al fluido nel processo termodinamico per kg del fluido stesso e l'energia cinetica corrispondente alla velocità di traslazione V .

Dalla (8'') (valida sempre che si possa trascurare il valore di m^2 rispetto all'unità, ciò che in pratica sempre avviene) appare con semplici calcoli che per valori di h piuttosto grandi rispetto all'unità il rendimento propulsivo può ritenersi approssimativamente proporzionale a $\sqrt{1/h}$.

La (8'') può modificarsi, facendovi comparire il rendimento termodinamico e il grado di diluizione della miscela combustibile, definito questo come rapporto tra il combustibile effettivamente bruciato per kg di aria e quello corrispondente alla completa utilizzazione dell'aria comburente.

Osserviamo infatti che, detto m_0 il peso del combustibile corrispondente alla combustione completa, q il suo potere calorifico, α il rapporto di diluizione, η_t il rendimento termodinamico, abbiamo:

$$m = \alpha m_0$$

$$L_1 = \eta_t q m = \eta_t q m_0 \alpha$$

e quindi, posto:

$$h_0 = \frac{q \cdot m_0}{V^2 / 2g},$$

risulta:

$$h = h_0 \cdot \alpha \cdot \eta_t$$

e la (8'') diventa:

$$(8''') \quad \eta_s = \frac{2+m}{\sqrt{h_0 a \eta_t}} \left\{ \sqrt{1 + \frac{1}{h_0 a \eta_t}} - \frac{1}{\sqrt{h_0 a \eta_t}} \right\}.$$

Il rendimento globale sarà allora:

$$(10) \quad \eta_s = \eta_t \eta_p = \frac{2+m}{\sqrt{h_0 a}} \sqrt{\eta_t} \left\{ \sqrt{1 + \frac{1}{h_0 a \eta_t}} - \frac{1}{\sqrt{h_0 a \eta_t}} \right\}.$$

La (10) permette di dedurre l'influenza sul rendimento globale del rendimento termodinamico e del coefficiente di diluizione a .

In prima approssimazione, se ci si limita a valori di h piuttosto grandi, poichè, come si è detto, in tal caso il rendimento propulsivo può ritenersi all'incirca proporzionale alla radice quadra dell'inverso di h , il rendimento globale risulterebbe all'incirca (sempre nel campo di variazione considerato) proporzionale alla radice quadrata del rendimento termodinamico e inversamente proporzionale a quella del rapporto di diluizione a .

Ciò non deve indurre nell'errore di credere che il rendimento aumenti indefinitivamente al diminuire di a perchè, a prescindere dal fatto che per valori troppo piccoli di a vien meno la premessa della relativa grandezza di h , sta il fatto che il valore del rendimento termodinamico non è in genere indipendente dal rapporto di diluizione a , ma ne dipende secondo una legge che, nel problema qui considerato, può praticamente ritenersi lineare in $1/a$ e decrescente con l'aumentare di tale parametro.

Osserviamo infatti che, nei processi termodinamici del tipo che si pensa realizzare, le perdite che si verificano rispetto al ciclo ideale possono, almeno in linea di approssimazione, classificarsi in due categorie distinte, e cioè: perdite che non dipendono dalla quantità di calore introdotto (ad es. le perdite che si verificano nella compressione) e perdite proporzionali al calore introdotto.

Dette L_p le perdite totali, l_1 ed l_2 due opportuni coefficienti, si può cioè porre, ricordando che la quantità di calore introdotta per kg di fluido è uguale a $q m_0 a$:

$$L_p = l_1 + l_2 \cdot q m_0 a$$

e poichè d'altra parte, detto η_{t0} il rendimento termico del processo ideale, il lavoro utile è dato da:

$$L_u = q m_0 a \eta_{t0} - L_p$$

il rendimento termico effettivo diventa

$$\eta_t = \eta_{t_0} - L_p/qm_0a = (\eta_{t_0} - l_2) - \left(\frac{l_1}{q \cdot m_0} \right) / a$$

od anche, con notazioni opportune:

$$(11) \quad \eta_t = n - k/a \quad (1).$$

(1) Il valore dei coefficienti n e k può dedursi ad es. per via sperimentale, ove si tratti di un processo realmente effettuato, determinando il valore del rendimento che si verifica per $a = 1$ (combustione col massimo di combustibile), nonché il valore di a corrispondente al funzionamento a vuoto (rendimento nullo).

Nel caso del ciclo Brayton generalizzato, composto da due politropiche e da due isobare, i coefficienti n e k possono dedursi analiticamente, conosciuti che siano gli esponenti delle politropiche, limitatamente al realizzarsi di alcune ipotesi semplificative circa le quantità di calore perdute nel raffreddamento.

Supporremo che nelle due politropiche e nella isobara di combustione le quantità di calore cedute al raffreddamento siano aliquote costanti dei rispettivi salti entalpici. Riferendoci alle notazioni della fig. 1 i lavori di compressione ed espansione possono esser messi nella forma:

$$\begin{aligned} L_c &= I_2 \xi_c (1 + d_c) \\ L_e &= I_3 \xi_e (1 - d_e) \end{aligned}$$

dove in genere:

$$\xi = 1 - (p_1/p_2)^{\frac{K-1}{K}}$$

essendo K l'esponente della corrispondente politropica (diverso in genere per la compressione e per l'espansione) e d_c e d_e sono coefficienti di perdita termica. Inoltre per la fase di combustione si ha in genere, indicando con s l'aliquota del calore introdotto che viene dispersa nella fase di combustione:

$$I_3 - I_2 = m_0 a q / (1 + s).$$

Il rendimento risulta:

$$(12) \quad \eta = \frac{L_e - L_c}{m_0 m q} = \frac{I_3 \xi_e (1 - d_e) - I_2 \xi_c (1 + d_c)}{m_0 a q}$$

o anche, essendo $I_2 = I_1 / (1 - \xi_c)$:

$$(12') \quad \eta = \frac{1}{1+s} \xi_e (1 - d_e) - \frac{1}{a} I_1 \frac{\xi_c (1 + d_c) - \xi_c (1 - d_e)}{(1 - \xi_c) m q}$$

da cui, confrontando con la (11)

$$n = \frac{1}{1+s} \xi_e (1 - d_e)$$

$$k = \frac{I_1}{m q} \frac{\xi_c (1 + d_c) - \xi_c (1 - d_e)}{1 - \xi_c}$$

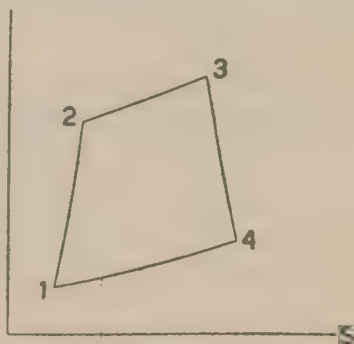


Fig. 1.

Posta la (11) nella (10), l'espressione del rendimento globale diventa:

$$(13) \quad \eta_g = (2 + m) \left\{ \sqrt{\frac{n}{h_0 a} + \left(\frac{1}{h_0^2} - \frac{k}{h_0} \right) \frac{1}{a^2}} - \frac{1}{a h_0} \right\}$$

espressione che ammette un massimo positivo per

$$(14) \quad a = \bar{a} = \frac{2k}{n} (1 + \sqrt{1/k h_0})$$

cui corrisponde un rendimento termico pari a:

$$(15) \quad \eta_t = n \left(1 - \frac{1}{2(1 + \sqrt{1/k h_0})} \right).$$

Per renderci conto dell'ordine di grandezza dei valori conseguenti alle soprascritte formule riportiamo i valori calcolati per tre diverse velocità e in due ipotesi diverse circa i valori dei coefficienti n e k .

Considereremo in questi esempi un combustibile con potere calorifico di 11500 calorie/kg, richiedente per la combustione completa 14,65 kg di aria per kg. Per tale combustibile risulta:

$$m_0 = 0,069$$

$$q \cdot m_0 = 785 \text{ cal/kg.} = 319500 \text{ kgm/kg.}$$

Ciò posto si ha:

per $n = 0,4$; $k = 0,05$ (corrispondente a un rendimento a pieno carico di 0,35 e un consumo a potenza nulla di 1/8 del consumo a pieno carico):

$V_{(m/s)}$	h_0	$\bar{a}$	h	m	η_t	η_p	η_g
100	626	0,294	184	0,02	0,231	0,138	0,0318
200	151	0,338	61	0,023	0,254	0,228	0,0553
300	70	0,384	26,7	0,026	0,273	0,324	0,0885

per $n = 0,4$; $k = 0,02$ (corrispondente a un rendimento termico a pieno carico di 0,38 e un consumo a potenza nulla del 5% di quello a pieno carico):

$V_{(m/s)}$	h_0	a	h	m	η_t	η_p	η_g
100	626	0,139	87,2	0,0096	0,344	0,193	0,0664
200	151	0,157	23,75	0,0109	0,349	0,340	0,1187
300	70	0,184	12,89	0,0129	0,356	0,425	0,151

Dal confronto delle due tabelle si vede quale notevole importanza abbia, fermo restando il coefficiente n , e quindi all'incirca il rendimento a pieno carico, il valore del coefficiente k che individua le perdite a vuoto.

Da notare che in pratica sarà più facile che si verifichi per k un valore vicino a quello della prima tabella che quello considerato nella seconda.

Propulsione mista con elica ed a reazione.

Rientrano in questa categoria tutti quei sistemi in cui una parte dell'energia meccanica (o più propriamente di prima specie) generata nel processo termodinamico è solo in parte comunicata al fluido sotto forma di energia cinetica, utile per la reazione, mentre la rimanente è comunicata ad una normale elica di propulsione. Ad essa appartiene, come caso particolare, il sistema dell'utilizzazione dei gas di scarico per ottenere un aumento di forza propulsiva per reazione.

Detti rispettivamente L_e ed L_r il lavoro comunicato all'elica per unità di peso di fluido agente, e quello somministrato al fluido stesso (e al combustibile con esso combinato) sotto forma di energia cinetica, P la portata in peso di fluido agente, e detti inoltre η_e il rendimento dell'elica e τ_p il coefficiente di utilizzazione propulsiva dell'energia sfruttata per reazione difetta, la potenza di trazione risulta:

$$(16) \quad TV = P(L_e\eta_e + L_r\tau_p - V^2/g).$$

Il problema che primo si presenta è quello della ripartizione tra i lavori L_e ed L_r che permette di ottenere il massimo di lavoro trattativo TV .

Il problema è relativamente semplice quando, per la natura del procedimento termico adottato, possa ammettersi che il lavoro complessivamente ottenuto per kg di fluido e cioè il lavoro $L_e + L_r$ sia indipendente dal modo di ripartizione e cioè dal rapporto L_e/L_r .

In questo caso, posto

$$\tau_1 = L_e + L_r - \frac{V^2}{2g}$$

la (16) può scriversi:

$$TV = P \left\{ L_1\eta_e - \frac{V^2}{2g} [2 - \eta_e] + L_r(\tau_p - \eta_e) \right\}$$

e la miglior condizione è quindi quella che rende massima l'espressione

$$L_r(\tau_p - \eta_e)$$

Ponendo per τ_p la sua espressione data dalla (9'), tale massimo risulta aversi per

$$L_r = \frac{V^2}{2g} (1 + m) \frac{1}{\eta_e^2}$$

e cioè:

$$(17) \quad h_r = \frac{L_r}{\frac{V^2}{2g}} = (1 + m) \frac{1}{\eta_e^2}.$$

Nel caso generale però, l'ipotesi sopra ammessa della costanza del lavoro totale L_1 non è verificata, a causa sia dei diversi rendimenti organici con cui si raccolgono il lavoro meccanico e l'altra parte di energia di prima specie sotto forma di energia cinetica (indipendentemente dal rendimento di propulsione), sia per le alterazioni al ciclo che sopravvengono in pratica quando si varia la ripartizione tra i due lavori.

Se, ad esempio, disponendo di un normale motore a scoppio, si pensa di fare avvenire lo scarico a pressione costante in un ambiente a pressione e di utilizzare il salto di pressione ancora disponibile per dare una energia cinetica ai gas di scarico, è evidente che il ciclo realmente effettuato dal fluido risulta alterato, rispetto a quello del motore originario. Questo infatti presupponeva uno scarico a volume costante, mentre il nuovo ciclo presuppone uno scarico a pressione costante.

Nel caso pratico poi le alterazioni sono anche più notevoli, oltre che per le perdite di travasamento, per l'influenza dello spazio nocivo costituito dalla camera di combustione del motore.

Minori variazioni si avrebbero invece se, anzichè usare un motore a scoppio, si usasse un gruppo compressore-turbina-scarico in pressione o anche un gruppo compressore-motore-turbina.

Di tutte queste variazioni può tenersi conto attribuendo all'energia che teoricamente rimane disponibile nei gas per effetto della contropressione introdotta allo scarico del motore (o per procedimenti analoghi) un *coefficiente di utilizzazione* rappresentante il rapporto tra la diminuzione di lavoro causata al motore per effetto della detta causa e la suddetta energia disponibile nei gas, alla quale poi dovrà d'altra parte attribuirsi un certo *rendi-*

mento di efflusso per ottenere l'energia effettivamente disponibile sotto forma cinetica nel moto relativo, e che abbiamo finora convenuto di indicare con L_r .

Detti η_u ed η_f questi coefficienti, possiamo scrivere, indicando con L_{m0} il lavoro fornito dal motore indisturbato, con L_m quello effettivamente raccolto dal motore, con L_r quello comunicato ai gas sotto forma di energia cinetica:

$$L_{m0} = L_m + L_r \frac{\eta_u}{\eta_f}.$$

D'altra parte:

$$TV = P(L_m \eta_e + L_r \tau_p - V^2/g)$$

o anche, per la precedente:

$$TV = P \left\{ L_{m0} \eta_e + L_r \left(\tau_p - \frac{\eta_u \eta_e}{\eta_f} \right) - V^2/g \right\}$$

e quindi, essendo gli altri termini costanti, la ripartizione più opportuna è quella che rende massimo il termine:

$$(18) \quad L_r \left(\tau_p - \frac{\eta_u \eta_e}{\eta_f} \right).$$

La determinazione della suddetta condizione di massimo richiede naturalmente (oltre la conoscenza della legge di variazione di τ_p in funzione di L_r , quale risulta dalla (9')) la conoscenza dei diversi rendimenti che compaiono nell'espressione, e in particolare della legge di variazione del coefficiente η_u , gli altri potendosi approssimativamente ritenere costanti.

Se poi anche η_u può ritenersi costante, come potrebbe ammettersi praticamente se il motore fosse del tipo a turbina o in ogni modo l'ultimo tratto dell'evoluzione fosse eseguito in una turbina, si ricade praticamente nel caso già trattato (sostituendo $\frac{\eta_u \eta_e}{\eta_f}$ al semplice η_e prima considerato) e la condizione di massimo si avrebbe per

$$(17') \quad h_r = \frac{L_r}{V^2} - (1 + m) \left[\frac{\eta_f}{\eta_r \eta_u} \right]^2.$$

Eietttore.

Uno dei sistemi proposti per aumentare il rendimento di propulsione è notoriamente quello che si basa sull'uso di un eietttore nel quale il fluido, cui in un primo tempo è comunicata tutta o in parte l'energia del processo termodinamico, comunica a sua volta per azione di trascinamento parte di questa energia ad un'altra massa di fluido, che diremo secondaria, e che contribuisce al fenomeno di reazione.

Concetto fondamentale, per quanto solo in modo qualitativo e impreciso di questo procedimento, è che, a parità di energia totale, la quantità di moto di una corrente fluida è tanto maggiore quanto maggiore ne è la portata, e in conseguenza minore la velocità.

Come si è detto, ciò si applica nell'eietttore solo in modo qualitativo e imperfetto, perchè l'energia complessiva del fluido dopo il trascinamento non uguaglia, ma è anzi sensibilmente minore, dell'energia iniziale dei due fluidi trascinante e trascinato, ed inoltre intervengono altri fatti di carattere termodinamico che complicano il fenomeno.

Cercheremo di analizzare questi fatti, per dedurne l'importanza relativa dei vari fattori, soprattutto allo scopo di mettere in chiaro su quali elementi si può operare, e in qual senso, per avere una massima efficienza del sistema.

Per questo prenderemo innanzitutto in considerazione le equazioni del miscelatore, quelle, cioè, che regolano il fenomeno del trascinamento di un fluido da parte di un altro di velocità maggiore. Queste non sono le sole equazioni dell'eietttore, preso nel suo complesso, ma certo quelle che lo caratterizzano, essendo le altre, come vedremo, semplici equazioni di espansione e compressione dinamica.

Le equazioni del miscelatore sono essenzialmente due, una che si riferisce all'equilibrio delle forze e delle quantità di moto, l'altra che si riferisce al bilancio energetico.

Se si fa l'ipotesi, abituale in questi casi, che le caratteristiche di pressione e velocità siano costanti in tutta l'estensione delle sezioni di ingresso e di uscita, e che queste sezioni siano parallele tra loro e normali alla velocità del fluido, l'equazione delle forze e delle quantità di moto (che nel caso più generale è una equazione vettoriale) si riduce alla seguente:

$$(19) \quad M[w_1 + rw'_1 - w_2(1 + r)] + S_1p_1 - S_2p_2 + F = 0$$

dove:

- M - è la portata in peso del fluido trascinante;
 r - è il rapporto tra le portate in peso del fluido trascinato e del fluido trascinante;
 w_1 e w'_1 - sono le velocità iniziali del fluido trascinante e di quello trascinato;
 w_2 - è la velocità finale del miscuglio;
 S_1 , S'_1 ed S_2 sono le corrispondenti sezioni di ingresso e di uscita;
 p_1 e p_2 sono le corrispondenti pressioni;
 F - è la risultante delle pressioni e delle forze di attrito sulle pareti del miscelatore.

L'equazione si semplifica notevolmente se, come supporremo sempre in quanto segue, il miscelamento si ammette avvenire a pressione costante, e se si prescinde dalle forze di attrito sulle pareti del miscelatore (¹).

In questo caso infatti la risultante delle pressioni sulle pareti del miscelatore e sulle sezioni di ingresso e di uscita risulta ovviamente nulla e quindi l'equazione (19) si riduce alla seguente:

$$(19') \quad w_1 + rw' = w_2(1 + r).$$

La seconda equazione del miscelatore esprime, in assenza di dispersioni termiche, l'eguaglianza delle energie totali di ingresso e di uscita e cioè:

$$(20) \quad \frac{w_1^2}{2g} + I_1 + r\left(\frac{w'^2_1}{2g} + I'_1\right) = (1 + r)\left(\frac{w_2^2}{2g} + I_2\right),$$

dove le w sono al solito le velocità come sopra definite, I sono le corrispondenti entalpie.

Posto nella (20) per w_2 il valore dedotto dalla (19'), si ottiene, indicando con E_1 ed E_2 le energie cinetiche iniziale e finale:

$$(21) \quad E_1 - E_2 = (1 + r)I_2 - (I_1 + rI'_1) = \frac{r}{r + 1} \frac{(w_1 - w'_1)^2}{2g}$$

(¹) La prima di tali ipotesi non è da considerare come una semplice ipotesi semplificativa più o meno aderente alla realtà, ma piuttosto come una condizione che può rendersi soddisfatta con opportuno dimensionamento del condotto e delle sezioni. In particolare, date che siano le portate di ingresso, bisognerà dimensionare la sezione di uscita in base alla velocità e alla densità che risulteranno, in base all'ipotesi fatta, dalle equazioni del miscelatore.

e cioè, come è notorio, a parità di rapporto di miscelamento r , si ha una perdita di energia cinetica proporzionale al quadrato della differenza delle velocità iniziali dei due fluidi.

Ciò posto, prima di passare all'esame del funzionamento dell'eiettore nella sua forma più completa, consistente, come è notorio, nel far subire ai fluidi trascinante e trascinato, prima del miscelamento, una espansione dinamica, e successivamente al fluido miscelato una compressione dinamica, vogliamo mostrare per quale processo logico può pensarsi di giungere a tale forma.

Premettiamo per questo alcune semplici, ma importanti considerazioni, sul comportamento che si avrebbe nel caso della propulsione a reazione che funzionasse senza tali fasi, ma semplicemente con la fase di miscelamento a pressione atmosferica.

In questo caso la velocità w_1 del fluido trascinante coinciderebbe con la velocità relativa w che avrebbe il fluido allo sbocco dell'ugello nell'ordinario sistema di propulsione a reazione, mentre la velocità w'_1 coinciderebbe, a meno del segno, con la velocità V di avanzamento del corpo.

Osserviamo ora che, stabilito il solito bilancio delle quantità di moto e della forza trattiva (se si prescinde per semplicità dal peso di combustibile, la cui considerazione d'altronde non altererebbe affatto le conclusioni cui giungeremo), la forza trattiva risulta data da:

$$T = \frac{P}{g} [w_2(1 + r) - V(1 + r)]$$

essendo P la portata in peso di fluido trascinante.

Ma se si pone per w_2 l'espressione data dalla (19') avendo posto per w_1 e w'_1 i valori detti, risulta:

$$T = \frac{P}{g} (w - V)$$

e cioè la trazione risulta uguale a quella che si avrebbe per semplice reazione. In altre parole, essendo la trazione uguale alla differenza delle quantità di moto complessive dei fluidi trascinante e trascinato dopo e prima di aver partecipato al processo, e poichè il processo di miscelamento dell'eiettore lascia inalterata la quantità di moto del complesso dei fluidi trascinante e trascinato, è indifferente, agli effetti della trazione, che il miscelamento avvenga o meno (sempre, naturalmente, se fatto a pressione atmosferica).

Del resto ciò è intuitivo, perchè in definitiva il miscelamento a pressione atmosferica tra il fluido di scappamento e l'aria circo-

stante avviene in ogni modo senza che si veda come ciò potrebbe influenzare la forza di propulsione.

Per dedurre gli eventuali vantaggi che un sistema con eiettore nella sua forma più generale, con un certo rapporto di miscelamento, presenta rispetto al sistema a reazione semplice, potremo, per quanto si è detto, compararlo con un sistema comportante eiettore a pressione atmosferica e con lo stesso rapporto di miscelamento (in quanto questo, per quanto si è detto, qualunque sia il rapporto di miscelamento, ha lo stesso rendimento del sistema a reazione semplice).

Ora è evidente, che essendo nei due casi uguale (e precisamente pari a $P(1 + r)$) il peso di fluido che effluisce, il miglior sistema sarà quello che permetterà una maggior velocità relativa di uscita del miscuglio:

Da ciò può immediatamente dedursi, almeno in modo qualitativo, l'importanza che può avere il far eseguire il miscelamento a pressione inferiore all'atmosferica, ciò che comporta, come si è accennato, una espansione dinamica dei fluidi trascinante e trascinata e successiva compressione dinamica del miscelato.

Osserviamo infatti che, se si prescinde da fenomeni di indole termodinamica di cui diremo tra poco, la velocità di uscita del miscuglio sarà tanto maggiore quanto minori sono state le perdite energetiche nel miscelatore, le quali, come risulta dalla (21), sono tanto più forti quanto più forte è la differenza tra le velocità di ingresso dei due fluidi.

Osserviamo ora che, ammesso in un primo tempo che i due fluidi abbiano alla pressione atmosferica la stessa temperatura, facendo ad essi subire una espansione adiabatica fino ad una stessa pressione (inferiore alla atmosferica), le loro energie cinetiche per unità di peso, e quindi i quadrati delle loro velocità, risultano egualmente incrementati, e quindi risulta costante la differenza tra i quadrati delle velocità.

Ma poichè, come è facile vedere, a parità di differenza dei quadrati delle velocità la differenza delle velocità stesse è tanto minore quanto più alte sono le velocità stesse (più propriamente anzi tale differenza risulta inversamente proporzionale alla media delle velocità stesse), ne risulta, sia pure in modo intuitivo, la convenienza della preventiva espansione agli effetti della diminuzione delle perdite di miscelamento.

In realtà la cosa non è così semplice come ora si è detta. Innanzitutto bisogna osservare, che, anche ammesse le espansioni e la compressione perfettamente adiabatiche e isoentalpiche, le perdite energetiche non si limitano a quelle del miscelatore.

Osserviamo infatti che l'energia corrispondente a dette perdite viene comunicata sotto forma di calore al fluido stesso; e questo calore, entrando nel processo termodinamico, vi sarà sfruttato con un certo rendimento; ed è facile vedere che questo rendimento è negativo, cosicchè l'introduzione di questo calore rappresenta una ulteriore perdita energetica.

Nel caso in cui tanto la compressione quanto l'espansione siano adiabatiche questo rendimento negativo risulta senz'altro uguale a quello di un ciclo Brayton invertito.

Osserviamo infatti che in questo processo, tanto il fluido trascinante quanto quello trascinato (che idealmente, almeno fin quando si tratta di fluidi della stessa natura, possono considerarsi sempre separati) percorrono le trasformazioni caratteristiche di un ciclo Brayton invertito. Le quantità di calore assorbite dai due cicli ideali che possono sostituirsi al processo sono diverse, potendosi i fenomeni termici che avvengono durante l'isobara inferiore (fase di miscelamento) idealmente scindersi in due fenomeni diversi e cioè: primo, la cessione di tutto il calore corrispondente alle perdite cinetiche ad uno dei fluidi (p. es. il trascinato); secondo, lo scambio di calore tra l'uno e l'altro fluido.

Ma di questi due fenomeni il primo solo ha influenza sulle perdite finali di energia cinetica, perchè il secondo (dato che il rendimento di un ciclo Brayton è indipendente dal calore introdotto e quindi il lavoro è funzione di questo) introduce nei due processi paralleli due lavori uguali e di segno opposto.

Ora il rendimento di un ciclo Brayton invertito, cioè il lavoro assorbito per unità di calore introdotto nell'isobara inferiore è pari a:

$$\eta_i = (p_0/p_1)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1$$

dove p_0 è la pressione dell'isobara superiore, p_1 quella dell'isobara inferiore, γ è la esponente della adiabatica.

Per quanto si è detto la perdita cinetica complessiva di tutto il fenomeno risulta uguale a:

$$(22) \quad (\Delta E)_m (1 + \eta_i) = (\Delta E)_m (p_0/p_1)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

dove $(\Delta E)_m = \frac{r}{1+r} \frac{(w_1 - w_1')^2}{2g}$ è la perdita energetica che si ha nel miscelatore.

Per quanto riguarda poi il termine $(\Delta E)_m$ e le sue variazioni in funzione della depressione nel miscelatore, dobbiamo osservare che mentre, come si è visto, almeno per espansione adiabatica, esso tende a diminuire all'aumentare di questa depressione quando le temperature e quindi le entalpie iniziali dei due fluidi (supposti della stessa natura) siano uguali, non è detto che ciò sia vero quando i due fluidi hanno temperature diverse, e in particolare quando il fluido trascinante ha una temperatura iniziale maggiore di quella del fluido trascinato.

L'aumento di energia cinetica che subisce ognuno dei due fluidi nell'espansione è infatti, a parità di salto di pressione, sensibilmente proporzionale alla sua temperatura iniziale. Ne risulta quindi un fattore che tende a far diminuire la convenienza dell'eiettore all'aumentare della temperatura del fluido trascinante, ferma restando quella del fluido trascinato.

È interessante notare come di questo fatto, già messo in evidenza da altri autori ⁽¹⁾, si possa essere portati a dare un'altra interpretazione, e cioè che l'influenza dannosa che sul rendimento dell'eiettore ha l'aumento della temperatura del fluido trascinante sia dovuta all'aumentata temperatura che ne consegue per il miscuglio a valle del miscelatore, da cui conseguirebbe una maggior spesa di lavoro per la susseguente compressione dinamica.

Ciò non è esatto, perchè è facile mostrare, ricorrendo al solito artificio di considerare sempre come distinti il fluido trascinante e quello trascinato anche dopo il miscelamento, che lo scambio di calore conseguente al miscelamento, mentre aumenta il lavoro necessario per la compressione del fluido trascinato, dato il suo riscaldamento, diminuisce in ugual misura quello corrispondente al fluido trascinante, che viene invece ad essere raffreddato. Ciò può a prima vista apparire in contrasto con i principi fondamentali della termodinamica, per i quali ad un fenomeno nettamente irreversibile come quello del miscelamento di fluidi a diversa temperatura deve spettare una degradazione di energia; ma in realtà il contrasto è solo apparente, perchè questa degradazione di energia appare effettivamente a valle del diffusore; che ad essa non consegua una diminuzione del lavoro utile dipende dal fatto che non si fa eseguire al fluido una trasformazione di massimo rendimento.

(1) V. ad es. LUIGI CROCCO, *Gallerie aerodinamiche ad alta velocità*.
«L'Aerotecnica», N. 3 e 7-8. 1935.

È infine da osservare che le espansioni e la compressione prima e dopo del miscelamento, non sono in genere, come si è finora supposto, adiabatiche isoentropiche, ma in genere trasformazioni ad entropia crescente che rappresentano nuove fonti di perdite tendenti a ridurre la convenienza della depressione al miscelatore.

Quanto finora si è detto in modo prevalentemente qualitativo, allo scopo di inquadrare il fenomeno nel quadro dei concetti fondamentali della termodinamica e della dinamica, può essere studiato analiticamente, aggiungendo alla già vista equazione del miscelatore le equazioni delle due espansioni e della compressione. Dette al solito p_0 la pressione atmosferica e p_1 la pressione nel miscelatore (supposto sempre a pressione costante), e posto in genere:

$$(23) \quad \tau_n = (p_0/p_1)^{\frac{n-1}{n}}$$

si ha per l'espansione del fluido trascinante limitatamente al salto tra p_0 e p_1 (esponente della politropica n_1):

$$(24) \quad I_0 = I_1 \tau_{n_1}$$

$$(25) \quad \frac{w_0^2}{2g} = \frac{w_1^2}{2g} + I_1(1 - \tau_{n_1})$$

e per l'espansione del fluido trascinato (ammettiamo per semplicità che l'esponente sia ancora n_1):

$$(24') \quad I'_0 = I'_1 \tau_{n_1}$$

$$(25') \quad \frac{V^2}{2g} = \frac{w_1'^2}{2g} + I'_1(1 - \tau_{n_1})$$

mentre per la compressione (esponente n_2) si ha:

$$(26) \quad I_3 = I_2 \tau_{n_2}$$

$$(27) \quad \frac{w_3^2}{2g} = \frac{w_2^2}{2g} + I_2(1 - \tau_{n_2}).$$

Dalle (25) e (25') e dalla (27) si ha, indicando con E_0 l'energia cinetica iniziale riferita a un kg di fluido trascinante, e con E_1 , E_2 , E_3 le corrispondenti energie cinetiche a monte e a valle del miscelatore e dopo la compressione dinamica:

$$(28) \quad E_0 = E_1 + (I_1 + rI'_1)(1 - \tau_{n_1})$$

$$(29) \quad E_3 = E_2 + (1 + r)I_2(1 - \tau_{n_2})$$

da cui la perdita complessiva di energia cinetica risulta:

$$(30) \quad E_0 - E_3 = (E_1 - E_2) + [I_1 + rI'_1 - (1 + r)I_2](1 - \tau_{n_1}) + \\ + (I_1 + rI'_1)(\tau_{n_2} - \tau_{n_1}).$$

Od anche, osservando che per la seconda equazione del miscelamento nell'eiettoe (che esprime il fatto che le perdite cinetiche vanno in calore) risulta $I_1 + rI'_1 - (1 + r)I_2 = -(E_1 - E_2)$ e tenendo conto della (24) e (24'):

$$(31) \quad \Delta E = E_0 - E_3 = (E_1 - E_2)\tau_{n_2} + (I_0 + rI'_0)(\tau_{n_2}/\tau_{n_1} - 1).$$

È interessante osservare il significato dei vari termini nella (31).

Il primo termine a destra rappresenta evidentemente la perdita di energia cinetica conseguente al processo che si avrebbe nel caso in cui gli esponenti delle politropiche di compressione ed espansione fossero uguali tra loro e uguali ad n_2 . Si osservi inoltre che se per τ_{n_2} si pone il suo valore si ritrova semplicemente l'espressione (22) della perdita di energia già trovata per via sintetica per il caso di trasformazioni ideali, salvo la sostituzione dell'esponente n_2 a quello dell'adiabatica. E poichè, come è facile vedere, trattandosi di compressione risulta in genere $\tau_{n_2} > \tau_\gamma$ dove τ_γ è il valore di τ corrispondente all'adiabatica, questo termine di perdita risulta già di per sè maggiore di quello che si avrebbe nel ciclo ideale. Questo termine, come si è già notato, rappresenta la perdita cinetica nel miscelamento addizionata a quella derivante dal fatto che questa energia va in calore a pressione inferiore all'ambiente.

Il secondo termine poi, indipendente dalle perdite di miscelamento, è sempre positivo essendo in genere, come è facile vedersi, il τ_{n_2} corrispondente ad una compressione effettiva maggiore del τ_{n_1} che corrisponde invece ad una espansione, e rappresenta la perdita che si ha per il fatto che al fluido si fa subire prima una espansione, poi una compressione, non isoentropiche.

Ciò detto siamo in grado di mostrare come possa determinarsi analiticamente, a prescindere dalle difficoltà di calcolo, il valore che conviene dare alla depressione nella camera di miscelamento per ottenere la massima efficienza dell'eiettoe.

Questo valore, per ciò che si è detto avanti, sarà quello che renderà minimo il valore della perdita cinetica $E_0 - E_3$ e cioè quello che annulla la derivata rispetto a p_1 del secondo membro della (31).

Naturalmente, per eseguire tale derivata, sarà necessario porre al posto della espressione $E_1 - E_2 = (\Delta E)_m$ che dà la perdita

cinetica nel miscelatore, il suo valore dato dalla (21), nella quale, a loro volta, i valori di w_1 e w'_1 possono dedursi dalle (25) e (25') come funzioni di p_1 .

Eseguita la derivata $\frac{d}{dp_1} (E_0 - E_3)$, il segno di questa fornisce il modo di giudicare se, per un determinato funzionamento dell'eiettore, caratterizzato da una certa pressione di funzionamento, si sia al disopra o al disotto della pressione di miscelamento più conveniente, e quindi se convenga o meno diminuirla.

In particolare il segno della derivata eseguita per il caso $p_1 = p_0$ e cioè, per quanto si è detto, per il caso della semplice reazione, può indicarci se convenga o meno l'applicazione dell'eiettore vero e proprio, e precisamente tale convenienza si avrà se la derivata sarà negativa, non si avrà nel caso opposto. Naturalmente per l'effettiva pratica convenienza non ci si potrà contentare di un vantaggio limitato, ma dovrà richiedersi un vantaggio sensibile, tale almeno da compensare gli inconvenienti di altra natura (peso, ecc.) dati dall'introduzione di nuovi organi.

Volendo, in base ai concetti precedenti, dedurre un criterio di larga massima per giudicare della convenienza o meno dell'uso dell'eiettore, potremo, anziché alle perdite totali prodotte dall'eiettore, riferirci alle sole perdite della camera di miscelamento. Con ciò, venendosi a trascurare altre cause di perdita, quali sono quelle dovute al calore introdotto e alla non isoentropia delle trasformazioni dinamiche, il criterio che verrà dedotto potrà dirsi sempre quando l'eiettore *non è* conveniente, senza peraltro definire esattamente quando invece *è* conveniente.

Possiamo quindi senz'altro dire che l'uso dell'eiettore non è conveniente quando, per $p_1 = p_0$, risulti:

$$(32) \quad \frac{d}{dp_1} (E_1 - E_2) > 0$$

ciò che, posta per $E_1 - E_2$ la sua espressione in base alla (21), equivale alla condizione:

$$\frac{d}{dp_1} (w_1 - w'_1) > 0.$$

Ponendo per w_1 e w'_1 le loro espressioni in base alle (25) e (25'), dalla condizione suddetta si ricava con semplici calcoli, posto $p_1 = p_0$ (essendo per tale valore $w'_1 = V$, $T_1 = T_0$, $I_1 = I_0$):

$$\frac{T_1}{T_0} \quad \frac{I_1}{I_0} < \frac{u_1}{V}$$

e cioè: condizione necessaria (ma non sufficiente) perchè sia conveniente l'uso dell'eiettore è che il rapporto tra velocità relativa di uscita del fluido e la velocità di avanzamento sia maggiore del rapporto tra la temperatura del fluido uscente (dopo l'espansione dinamica) e la temperatura ambiente, o anche, poichè il rapporto tra i quadrati delle suddette velocità coincide col parametro h , che detto parametro sia maggiore del rapporto dei quadrati delle dette temperature.

Sistemi a evoluzione ripartita (Campini).

In quanto abbiamo prima esposto abbiamo implicitamente ammesso che il fluido partecipante al fenomeno della reazione partecipasse tutto in ugual maniera al fenomeno termodinamico per il quale si viene a produrre energia cinetica.

Se quindi, come capita sempre in processi del genere, in una parte del processo vi è un assorbimento di energia meccanica, questa è prelevata dal lavoro utile realizzato con lo stesso fluido agente in altre parti del processo.

Più particolarmente, ad es., in un ciclo Brayton o simile l'energia necessaria per la compressione del fluido è ottenuta prelevando parte dell'energia ricavata dall'espansione. In altri termini il compressore è mosso dalla motrice che raccoglie il lavoro di espansione (caso del turbocompressore) o addirittura si identifica con essa (caso di un motore a cilindri funzionante a coppia nulla e scarico in pressione).

Ma si può pensare anche (metodo Campini) a trascinare il compressore con un motore separato, riservando così tutta l'energia di espansione per l'aumento di velocità del fluido; in tal modo, poichè praticamente il motore trascinante il compressore non può essere che del tipo termico, avremo in pratica due evoluzioni termodinamiche distinte («*évolution partagée*» del ROY) e cioè l'evoluzione del fluido agente nel motore e quella del fluido partecipante al processo di reazione vero e proprio.

In pratica, secondo lo schema realizzato dal CAMPINI (ma già precedentemente noto) l'aria captata da una bocca di presa subisce una prima compressione dinamica in un diffusore e quindi una compressione meccanica a mezzo di un compressore trascinato da un motore separato, dopo di che gli viene comunicata, a pressione costante ⁽¹⁾, una certa quantità di calore, ed infine è fatta

⁽¹⁾ In realtà la pressione durante la fase di assorbimento di calore è solo approssimativamente costante, perchè, come fa notare il Campini nella sua

espandere in un effusore, così da raccogliere sotto forma di energia cinetica il lavoro disponibile. Chiameremo *ciclo principale* il ciclo termodinamico seguito dal fluido che partecipa al fenomeno della reazione, per distinguerlo da quello seguito nel motore.

Nel calore introdotto può essere compreso parte del calore perduto dal motore sotto forma di calore di raffreddamento o di calore residuo nei gas di scarico. Si dice parte perchè, anche prescindendo da esigenze di ordine pratico (superficie riscaldanti limitate, ecc.) non è in linea teorica possibile raffreddare i gas di scarico al disotto di una certa temperatura, che non potrà, anche nel caso più favorevole, essere minore di quella assunta dall'aria alla fine della compressione. Nè può pensarsi di girare la questione immettendo direttamente i gas di scarico nell'aria (facendo cioè il riscaldamento per miscela), perchè in tal modo si introduce una compressione allo scarico del motore, diminuendone il rendimento. Su tale argomento avremo da ritornare.

In pratica il limite di temperatura è ancora superiore, perchè le esigenze del raffreddamento del motore imporranno che questo sia effettuato con l'aria più fresca possibile, e quindi non si potrà pensare ad introdurre calore tolto ai gas di scarico se non dopo che l'aria ha già assorbito tutto il calore di raffreddamento e la sua temperatura è aumentata in conseguenza. Inoltre (non volendo eseguire il riscaldamento a miscela che presenta l'inconveniente già visto), sarà necessario avere tra i gas di scappamento e l'aria un salto di temperatura che dovrebbe essere assai notevole, dato che tanto da una parte che dall'altra si hanno gas (e quindi coefficienti di trasmissioni limitati), se non si vuole incorrere in superficie di scambio proibitive.

In pratica l'aliquota di calore perduto dal motore recuperabile nel ciclo principale si limiterà a quella corrispondente al raffreddamento o poco più.

Se si prescinde dall'effetto di reazione proprio dovuto ai gas di scarico del motore e da quello (negativo) dell'aria di alimentazione di questo, ammettendo cioè praticamente che i gas di scarico siano

memoria, se la camera di riscaldamento è a sezione costante, dato che in essa la velocità, che anche se piccola non può essere nulla, deve aumentare dall'ingresso all'uscita in conseguenza dell'aumento del volume specifico, dovrà aversi, in dipendenza della legge delle quantità di moto, un certo gradiente di pressione. Questo peraltro è in genere assai piccolo, e del resto potrebbe teoricamente eliminarsi conformando in modo tale la camera che le sezioni varino proporzionalmente ai volumi specifici assunti in esse dal fluido, cosicchè le velocità risultino costanti.

espulsi con una velocità pari a quella di traslazione dell'aereo, lo studio di un sistema a «evoluzione ripartita» può ricondursi al caso generale già trattato, purchè si definiscano un rendimento termico, e un grado di diluizione «equivalenti», tali cioè che alla stessa massa d'aria interessata nel ciclo principale ed alla stessa energia ad essa in definitiva comunicata sotto forma di variazione di energia cinetica dall'ingresso all'uscita, corrisponda una stessa quantità di combustibile consumato.

Il grado di diluizione equivalente è di computo immediato essendo dato senz'altro dal rapporto tra il combustibile complessivamente consumato e quello che corrisponderebbe alla combustione completa nel ciclo principale (o meglio al consumo completo di comburente). Questo grado di diluizione, che seguiranno a chiamare α , può, anche in caso di eccesso di aria nel ciclo principale, essere superiore all'unità, in quanto al combustibile effettivamente immesso nella camera di combustione di questo bisogna aggiungere quello consumato nel motore.

In quanto al rendimento termico, esso può, con l'approssimazione lecita in questi casi, valutarsi in base alle considerazioni seguenti.

L'evoluzione termodinamica subita dal fluido è già descritta e rappresentata nel piano entalpico in fig. 2, nella

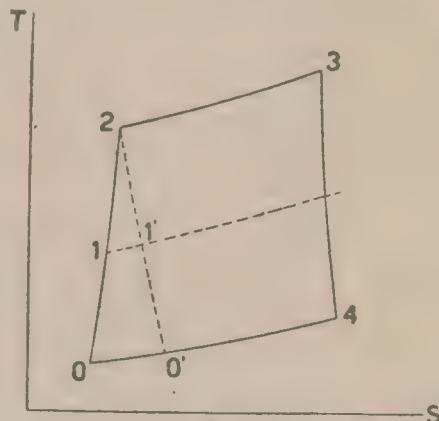


Fig. 2.

quale il tratto 0-1 rappresenta la compressione dinamica, il tratto 1-2 la compressione meccanica, il tratto 2-3 l'isobara (la considereremo almeno tale, dato che le cause di perdita di pressione in questo tratto hanno importanza minima) a introduzione di calore, il tratto 3-4 l'espansione finale.

Il lavoro fornito dall'evoluzione (quello che abbiamo sempre indicato con L_1) è dato dalla differenza tra il lavoro dell'espansione 3-4 e il termine $V^2/2g$, che, a meno di un coefficiente di rendimento, è rappresentato, come diremo meglio, dal lavoro della compressione dinamica 0-1.

Sarà cioè:

$$L_1 = L_{3-4} - \frac{V^2}{2g}.$$

Osserviamo ora, che ammettendo al solito che l'espansione avvenga secondo una politropica di esponente n_e , il lavoro di espansione, posto in generale $\xi_e = 1 - (p_3/p_4)^{1/n_e}$ è dato dall'espressione:

$$L_{3-4} = I_3 \xi_e$$

dove al solito con I si indica l'entalpia.

Ma d'altra parte, detta Q_2 la quantità di calore introdotta lungo l'isobara, si ha:

$$I_3 = I_2 + Q_2$$

e quindi:

$$(33) \quad L_{3-4} = I_2 \xi_e + Q_2 \xi_e.$$

La (33) ci dice che il lavoro di espansione può considerarsi come somma di due termini, uno dei quali costante, e dipendente unicamente dalle compressioni preventivamente operate, l'altro proporzionale al calore introdotto Q_2 secondo il coefficiente di proporzionalità ξ_e , che può quindi considerarsi come un coefficiente di rendimento col quale viene ad essere sfruttato il calore introdotto (considerando naturalmente l'operazione come isolata e non nel suo complesso).

Il termine $I_2 \xi_e$ si riconosce poi facilmente essere uguale al lavoro che si avrebbe lungo l'espansione 2-1'-0' partente dal punto 2 e giungente fino all'isobara inferiore, secondo una politropica che abbia lo stesso esponente della 3-4.

A sua volta tale lavoro può considerarsi scisso in due parti: quello corrispondente al tratto 2-1' (dove 1' è sulla stessa isobara di 1) e quello corrispondente al tratto 1'-0'.

Il primo tratto può considerarsi come lavoro utile derivante dal lavoro di compressione meccanica, e come tale può porsi uguale al lavoro eseguito dal motore, L_m , moltiplicato per un coefficiente di rendimento η_v del compressore, o meglio del ventilatore (in quanto comprende i rendimenti delle due operazioni successive di compressione e di espansione), rendimento perfettamente analogo a quello di ventilazione di un'elica.

Il secondo tratto corrisponde all'incirca al lavoro di compressione dinamica e può porsi uguale al termine $V^2/2g$ moltiplicato al solito per un coefficiente η_d che tien conto dei rendimenti di espansione e compressione (¹).

(¹) In realtà ciò non è completamente esatto perchè il detto tratto di espansione si inizia in un punto diverso di quello della fine della compressione

In complesso quindi il lavoro L_1 può mettersi nella forma:

$$(34) \quad L_1 = \xi_e Q_2 + L_m \eta_v - (1 - \eta_d) \frac{V^2}{2g}.$$

D'altra parte il lavoro L_m può mettersi nella forma:

$$(35) \quad L_m = \eta_m Q_1$$

essendo η_m il rendimento del motore, Q_1 il calore fornito dal peso di combustibile in esso impiegato.

Inoltre, indicando con $1 - z$ l'aliquota del calore Q_1 che viene recuperata dai gas di scarico e dal raffreddamento del motore e immessa nel ciclo principale insieme al calore introdotto col nuovo combustibile, e indicando con Q la quantità complessiva di calore introdotta, abbiamo:

$$(36) \quad Q_2 = Q - Q_1 + Q_1(1 - z) = Q - zQ_1.$$

Tenendo conto della (35) e della (36), la (34) diventa:

$$(34') \quad L_1 = \xi_e Q + \eta_m Q_1 \left(\eta_v - z \frac{\xi_e}{\eta_m} \right) - (1 - \eta_d) \frac{V^2}{2g} =$$

$$(34'') \quad = \xi_e Q + L_m \left(\eta_v - z \frac{\xi_e}{\eta_m} \right) - (1 - \eta_d) \frac{V^2}{2g},$$

da cui l'espressione del rendimento termodinamico del complesso risulta (ponendo al solito $Q = m_0 a q$; $\frac{2gm_0 q}{V^2} = h_0$):

$$(37) \quad \eta_t = \xi_e + \frac{1}{a} \frac{L_m \eta_v}{q m_0} \left[1 - \frac{z}{\eta_v} \frac{\xi_e}{\eta_m} \right] - \frac{1}{a h_0} (1 - \eta_d).$$

dinamica e precisamente ad entalpia un po' maggiore. A ciò corrisponde un lieve aumento del lavoro di espansione corrispondente ad un parziale recupero (con rendimento peraltro assai basso) delle perdite corrispondenti alla compressione ed espansione meccanica. Ciò però ha praticamente una importanza affatto trascurabile. In ogni modo, volendone tener conto, basterebbe aggiungere a destra nella (34) un termine pari a detto lavoro, che risulta essere con grandissima approssimazione uguale a:

$$(1 - \eta_v) L_m \frac{T_1 - T_0}{T_0} = (1 - \eta_v) L_m \frac{V^2 / 2g}{I_0}.$$

Nella suddetta espressione è da notare che i termini ξ_e e L_m non sono indipendenti tra loro. Infatti il termine ξ_e , come risulta dalla sua espressione, e come del resto è notorio, dipende dal rapporto di compressione totale p_2/p_0 , il quale è evidentemente funzione del lavoro di compressione L_m .

Più precisamente osserviamo che, essendo n_1 il coefficiente della politropica di espansione, tenuto conto della definizione del rendimento, η_v risulta (sempre con le notazioni della fig. 2 e derivate):

$$(38) \quad L_m \eta_v = I_{1'} \left(\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{n_1-1}{n_1}} - 1 \right) = I_{0'} \left(\left(\frac{p_2}{p_0} \right)^{\frac{n_1-1}{n_1}} - \left(\frac{p_1}{p_0} \right)^{\frac{n_1-1}{n_1}} \right).$$

Osserviamo ora che dalla definizione del coefficiente ξ_e risulta:

$$(p_2/p_0)^{\frac{n_1-1}{n_1}} = \frac{1}{1-\xi_e}.$$

Se quindi nella (38) si sostituisce per approssimazione l'entalpia $I_{0'}$ nel punto $0'$ con quella corrispondente al punto 0 , commettendo con ciò un lieve errore, e posto per semplicità

$$\tau = \left(\frac{p_1}{p_0} \right)^{\frac{n-1}{n}}, \text{ si ottiene:}$$

$$(39) \quad L_m \eta_v = I_0 \left[\frac{1}{1-\xi_e} - \tau \right]$$

e l'espressione del rendimento diventa allora:

$$(40) \quad \eta_t = \xi_e + \frac{1}{a} \frac{I_0}{q m_0} \left[1 - \frac{z}{\eta_v} \frac{\xi_e}{\eta_m} \right] \left[\frac{1}{1-\xi_e} - \tau \right] - (1 - \eta_a) \frac{1}{a h_0}.$$

Fermo restante il valore della velocità di avanzamento e quello del rapporto di diluizione, la (40) ci dà quindi il rendimento termodinamico in funzione del coefficiente ξ_e e quindi del rapporto di pressione ottenuto complessivamente (tra compressione dinamica e meccanica).

È di evidente interesse conoscere quale valore di ξ_e risulta caso per caso più conveniente. Poichè, a parità di rapporto di diluizione, il massimo rendimento globale corrisponde al massimo rendimento termodinamico, il valore più conveniente, a condizioni di velocità e di diluizione costanti, sarà quello che rende

massima l'espressione (40). Eseguite le operazioni si trova questo massimo avverarsi per:

$$(41) \quad 1 - \xi_s = \sqrt{\frac{1 - \frac{\eta_v \eta_m}{z}}{\frac{a q m_0}{I_0} \frac{\eta_v \eta_m}{z} + \tau}}.$$

Da notare che essendo z per sua natura maggiore di η_m e η_v , sempre per sua natura, minore d'uno, il numeratore della frazione sotto radice nella (41) sarà sempre positivo e quindi il radicale sarà sempre reale. D'altra parte, poichè τ è per sua natura maggiore d'uno, il radicale stesso risulterà sempre minore d'uno.

Non è detto peraltro che sempre i valori di $1 - \xi_s$ calcolati in base alla (41) possano corrispondere ad un regime reale.

È necessario per questo che i valori di Q_1/Q che vi corrispondono siano compresi tra zero ed uno.

Se infatti risultasse $Q_1/Q < 0$, anzichè una compressione meccanica si avrebbe una espansione, con ricupero di lavoro anzichè spesa: il caso di per sè non è idealmente impossibile, ma le formule trovate non sono certo ad esso applicabili, perchè i rendimenti considerati per la trasformazione di lavoro in calore non sono applicabili alla trasformazione inversa.

Se invece risultasse Q_1 maggiore di Q risulterebbe negativa la quantità di calore fornita lungo l'isobara superiore, e ciò al solito non è di per sè un controsenso fisico, ma praticamente, essendo il calore recuperato a basso potenziale termico, non potrebbe considerarsi come in detrazione al calore fornito al motore, come implicitamente si ammetterebbe computando il rendimento in base al calore Q .

In ogni modo, per accertare che la condizione imposta sia soddisfatta, basterà introdurre nella (39) il valore dato per $1 - \xi_s$ dalla condizione di massimo espressa nella (41) e verificare che il valore che ne deriva per L_m sia minore di $Q\eta_m$. Ciò significa che per detto valore deve risultare:

$$\frac{Q_1}{Q} = \frac{I_0}{q m_0 a \eta_v \eta_m} \left(\frac{1}{1 - \xi_s} - \tau \right) < 1.$$

Qualora il valore trovato per Q_1/Q nella condizione di massimo rendimento termodinamico espressa dalla (41) risultasse negativo o maggior d'uno, si intende che il valore effettivo da mettersi in conto sarebbe zero nel primo caso (compressione meccanica nulla) e uno nel secondo (combustione nulla).

Nel primo caso il sistema si riduce alla più semplice espressione del corpo aerotermodinamico; nel secondo caso, se si prescinde dalla quantità di calore recuperata dal motore e introdotta nel cielo, si ha un sistema che differisce dalla normale propulsione ad elica praticamente per il modo di funzionamento del propulsore, il quale, anzichè imprimere all'aria direttamente un incremento di velocità come nelle normali eliche, gli imprime prima un certo incremento di pressione, che poi si converte in velocità, ciò che del resto avviene anche nelle eliche intubate. Se poi si considera la parte del calore recuperata dal motore e introdotta nell'aria dopo la compressione, il sistema assume il carattere di uno dei tanti procedimenti per il recupero parziale dell'energia contenuta nei gas di scarico.

Caso del semplice corpo aerotermodinamico.

Come è noto, il termine di «corpo aerotermodinamico» è stato dato ad un sistema nel quale la propulsione è ottenuta con semplice processo di compressione ed espansione dinamica intermezzate da una fase di combustione a pressione costante.

Questo processo si può considerare come caso limite del precedente nel quale sia posto $L_m = 0$.

Il rendimento termico è allora senz'altro, in base alla (37):

$$(37') \quad \eta_t = \xi_e - \frac{1}{ah_0} (1 - \eta_d)$$

e cioè ha una espressione del tipo (11), come del resto può dedursi dal fatto che il fluido percorre un ciclo Brayton generalizzato, come è il caso trattato nella nota a pag. 201. Naturalmente la diluizione di massimo rendimento sarà data sempre dalla (14) e il rendimento relativo dalla (15), dove siano posti per n e k i valori derivanti dal confronto tra la (37') e la (11) e cioè: $n = \xi_e$, $k = \frac{1 - \eta_d}{h_0}$.

Elica mossa a reazione.

L'idea fondamentale che ha condotto diversi inventori all'ideazione dell'elica mossa per reazione, e cioè a mezzo di un opportuno getto fluido uscente da uno o più effusori posti alle estremità delle pale dell'elica stessa, è essenzialmente connessa al fatto che il rendimento propulsivo di un sistema a reazione aumenta in genere con la velocità dell'effusore, e quindi, dato che le estremità delle pale d'elica hanno in genere una velocità assai maggiore di quella di traslazione dell'aereo, si può sperare con questo mezzo un rendimento migliore di quello ottenibile con la propulsione a reazione. In realtà ciò è vero solo in parte, dovendosi,

oltre al rendimento del dispositivo agente a reazione, tener conto di quello dell'elica.

Naturalmente, come già nel caso della reazione diretta, oltre ad un sistema mosso esclusivamente per reazione, si può considerare un sistema misto, in cui parte dell'energia sia comunicata all'elica direttamente sotto forma meccanica, parte sotto forma di energia di reazione.

Lo studio di un dispositivo di questo tipo è semplificato dal fatto che, come vedremo, per la parte a reazione il sistema può essere ricondotto a quello di un corpo mosso a reazione con velocità uguale a quella risultante dell'estremità della pala d'elica dove è alloggiato l'effusore. Ciò almeno fin quando la direzione del getto coincida con quella di detta velocità risultante.

Se infatti si prescinde per ora dal modo con cui avvengono le varie trasformazioni termodinamiche nel fluido agente, limitandoci ad ammettere che questo, prima di giungere all'effusore, abbia subita una certa trasformazione termodinamica non meglio definita, cui corrisponda al solito un certo lavoro netto L_1 (comprendente, per la parte negativa, quello corrispondente alle varie trasformazioni termodinamiche) osserviamo che nel bilancio delle forze e delle quantità di moto compaiono:

1) la quantità di moto dell'aria entrante, avente per grandezza, come al solito $\frac{PV}{g}$ e direzione (in quanto entrante) contraria al moto (P portata in peso dell'aria entrante);

2) la quantità di moto del fluido uscente, avente per grandezza $\frac{Pw}{g} (1 + m)$ (dove w è la velocità relativa di scarico) e diretta secondo la direzione della velocità relativa di scarico, coincidente (per ipotesi) con quella dell'estremità della pala;

3) la risultante delle azioni provocate sulla pala rotante, o in genere sul sistema di pale ruotanti, per effetto del passaggio del fluido all'interno di esse. Tale azione, almeno finchè le pale sono in numero maggiore d'uno e uniformemente ripartite, si riduce, come è notorio, ad una coppia di grandezza uguale al momento delle quantità di moto impressa al fluido e cioè pari a: $\frac{R \cdot UP}{g}$ dove U è la velocità periferica delle pale, R ne è il raggio.

Ciò corrisponde ad avere all'estremità della pala una forza pari ad UP/g ;

4) le azioni aerodinamiche sulla pala d'elica;

5) l'azione aerodinamica sul corpo dell'effusore.

Osserviamo ora che la forza 3) è perfettamente equivalente ad una quantità di moto diretta tangenzialmente al moto dell'estremità della pala e corrispondente ad una velocità U con una portata P (ove almeno si prescinda dalla lieve differenza dovuta al peso di combustibile).

Composta questa con la quantità di moto 1) ne risulta una quantità di moto entrante corrispondente sempre alla portata P e diretta secondo la risultante delle velocità V ed U , e cioè secondo la velocità risultante dell'estremo della pala, nella stessa direzione, quindi, in cui si è considerato l'efflusso del fluido dall'effusore.

Con ciò viene dimostrato che, dal punto di vista dinamico, tutto avviene come se tutto il sistema (compressore compreso) fosse concentrato all'estremità della pala e si comportasse come un corpo aerodinamico muoventesi con la velocità di questa.

Non è esattamente così dal punto di vista termodinamico, in quanto la rotazione produce una compressione (che assorbe una energia uguale all'energia cinetica corrispondente all'incremento di velocità, e cioè pari alla metà di quella assorbita nel complesso dei due fenomeni: compressione e aumento di energia cinetica, costituenti l'evoluzione completa), ma nulla vieta di conglobare questa compressione nel complesso del fenomeno termodinamico ⁽¹⁾.

⁽¹⁾ Ciò non esclude, naturalmente, che, a parità di altri dispositivi e di trasformazioni in essi eseguite, il processo termodinamico nel caso di sistema con braccio ruotante sia leggermente diverso da quello di analogo sistema muoventesi di moto traslatorio.

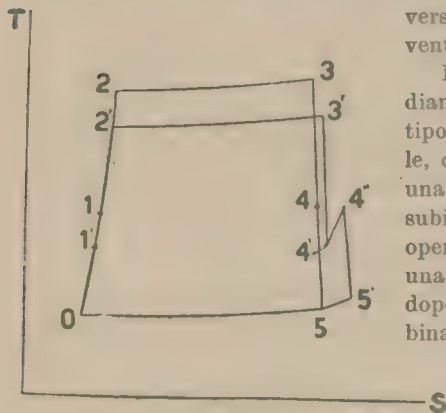


Fig. 3.

Per vedere questa differenza prendiamo in esame il caso di propulsore del tipo compressore-turbina-effusore, nel quale, come mostra la fig. 3, il fluido, subita una prima compressione dinamica 0-1, ne subisce una seconda meccanica 1-2, ad opera di un compressore, quindi percorre una isobara ad assorbimento di calore 2-3 dopo di che è fatto espandere in una turbina che trascina il compressore (tratto 3-4) ed infine subisce un'ultima espansione dinamica 4-5 nell'effusore.

Nel caso dell'elica a reazione, a parità di velocità di avanzamento risultante, questo sistema si modifica come segue.

Innanzitutto la prima compressione dinamica è ridotta, in quanto eseguita con la sola velocità di avanzamento V minore di quella periferica, e quindi essa terminerà in un punto $1'$ meno alto di 1. Di conseguenza, se si

Ciò posto, potremo considerare che sull'estremità della pala d'elica vi sia un propulsore ideale, la cui trazione, che indicheremo con T_i , potrà essere calcolata, in base alla velocità risultante di avanzamento $W = \sqrt{U^2 + V^2}$, come nei casi già visti.

Al propulsore potremo ancora attribuire una certa resistenza R_i , cosicchè in definitiva avremo sull'estremità della pala d'elica disponibile una forza $T_i - R_i$ nella direzione della velocità risultante.

Questa forza può essere scomposta in due componenti: la prima parallela al moto dell'aereo ha per grandezza $(T_i - R_i) \frac{V}{W}$ e contribuisce direttamente alla propulsione dell'aereo.

La seconda, invece, pari a $(T_i - R_i) \frac{U}{W}$, in direzione tangenziale, fornisce all'elica una potenza propulsiva $(T_i - R_i) \frac{U^2}{W}$, cui, ammesso un rendimento η_e dell'elica, corrisponde una trazione dell'elica pari a: $\eta_e(T_i - R_i) \frac{U^2}{V \cdot W}$.

In complesso quindi avremo una forza propulsiva pari a:

$$(T_i - R_i) \left(\frac{V}{W} + \eta_e \frac{U^2}{V \cdot W} \right)$$

mantiene lo stesso rapporto di compressione meccanica, anche il punto 2', e analogamente i punti 3' e 4' riferentisi rispettivamente alla fine compressione, fine combustione, fine espansione meccanica, sono più bassi dei corrispondenti.

Dopo il punto 4', anzichè iniziarsi l'espansione, si inizia la compressione dovuta alla rotazione, nella quale si comunica al fluido una energia uguale alla differenza tra l'energia corrispondente alla compressione dinamica completa (dovuta cioè alla velocità risultante) e quella prima operata. Senonchè, essendo tale energia comunicata partendo da una entalpia iniziale maggiore di quella corrispondente al punto 1, e, d'altra parte, essendo il rendimento con cui si è comunicato calore leggermente inferiore a causa della minor pressione, il punto finale 4'' di questa compressione risulterà ad entalpia minore ed entropia maggiore del punto 4 e quindi sarà leggermente minore il lavoro ottenibile nell'espansione.

Per rimettere le cose a posto bisognerà supporre una compressione meccanica maggiore di quella prima operata, così da raggiungere la stessa compressione totale, e corrispondentemente verrà aumentato il lavoro richiesto dal compressore e quello uguale fornito dalla turbina. Resterà sempre il fatto che la compressione dovuta alla rotazione rappresenterà, in un certo senso, una operazione viziosa, in quanto susseguente ad un corrispondente tratto di espansione.

corrispondente ad una potenza propulsiva utile pari a:

$$(T_i - R_i) \frac{V^2 + \eta_e U^2}{W}.$$

La potenza disponibile per effetto di reazione, pari a $T_i W$, è quindi sfruttata con un rendimento:

$$\eta'_e = \left(1 - \frac{R_i}{T_i}\right) \left[1 - (1 - \eta_e) \frac{U^2}{W^2}\right].$$

Caso in cui il getto dell'effusore non sia diretto secondo la direzione del moto risultante.

Abbiamo finora supposto che il getto uscente dall'effusore sia diretto secondo la velocità relativa. In realtà questa sarebbe la direzione ottima nel caso in cui l'elica avesse rendimento unitario. In questo caso, infatti, la miglior direzione del getto è evidentemente quella che dà la massima forza nella direzione del moto del punto in cui è applicato il razzo.

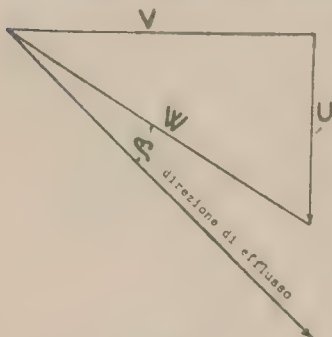


Fig. 4.

Tenendo conto invece del rendimento non unitario dell'elica, si comprende facilmente che, dato che la componente della forza di reazione parallela al moto dell'aereo partecipa

direttamente alla trazione, senza quindi essere influenzata dal rendimento dell'elica, mentre quella tangenziale è in definitiva sfruttata solo in parte, nasce la convenienza ad aumentare (entro certi limiti) la prima componente a scapito della seconda. Ciò può essere espresso analiticamente nel seguente modo (v. fig. 4).

Detta F la forza dovuta alla reazione (e cioè l'equivalente della quantità di moto uscente) e β l'angolo che essa fa con la direzione del moto risultante, potremo scomporla nelle due componenti secondo il moto ed ortogonalmente a questo, componenti che valgono rispettivamente $F \cos \beta$ ed $F \sin \beta$.

Applicando alle due componenti ragionamenti perfettamente analoghi a quelli precedentemente fatti, si mostra facilmente che la forza di trazione che viene in definitiva prodotta ha per espressione:

$$F \left\{ \cos \beta \left(\frac{V}{W} + \eta_e \frac{U^2}{VW} \right) + \sin \beta \left(\frac{U}{W} (1 - \eta_e) \right) \right\}$$

espressione che ha un massimo per:

$$\tan \bar{\beta} = \frac{1 - \eta_e}{V/U - \eta_e} \cdot \frac{V}{V}.$$

In particolare, come si è detto, se η_e fosse unitario, sarebbe $\beta = 0$.

Il valore del suddetto massimo risulta pari a:

$$\frac{F \left(\frac{V}{W} + \eta_e \frac{U^2}{VW} \right)}{\cos \beta}.$$

ossia è uguale al valore che si avrebbe per $\beta = 0$ (e cioè per getto diretto secondo il moto relativo) diviso per $\cos \beta$.

Osserviamo che, per i valori normalmente ammissibili del rendimento dell'elica, il valore di $\cos \beta$ risulta praticamente unitario. Ad es. se fosse $\eta_e = 0,8$ e $V/U = 1$ risulterebbe: $\tan \beta = 0,111$ e quindi $1/\cos \beta = 1,006$.

In pratica, quindi, la condizione di massimo non differisce sensibilmente da quella che si ha con getto diretto secondo la direzione della velocità risultante. Se si tien conto del fatto che, orientando l'effusore in una direzione diversa da quella del moto risultante, si aumenta probabilmente la resistenza propria di avanzamento dell'ugello, ne risulta la pratica convenienza ad orientare il getto secondo detta direzione.

Casi particolari di propulsione con elica a reazione.

La trattazione sopra esposta ha carattere affatto generale, in quanto riporta il caso dell'elica a reazione ai casi già trattati per la reazione semplice.

Vediamo brevemente alcuni schemi con cui potrebbe essere realizzato il principio dell'elica a reazione ed i corrispondenti schemi della reazione semplice:

1) Elica autorotante con presa dinamica sull'asse. In questo caso mancano il motore e il compressore: la compressione è ottenuta esclusivamente con un primo salto dinamico ed un secondo salto per forza centrifuga nella pala.

Per avere il rendimento massimo la combustione deve avvenire al termine della compressione totale, e cioè immediatamente prima dell'effusore, all'estremità della pala. In questo caso il sistema è paragonabile al sistema di reazione con sola compressione dinamica corrispondente alla velocità periferica della pala.

2) Elica come sopra, ma nella quale l'aria, anzichè passare attraverso il braccio, è direttamente captata da una presa dinamica posta all'estremità di questo. Questo caso equivale al precedente.

3) Elica autorotante alimentata con gas prodotti da gruppo moto-compressore a coppia equilibrata. Ha, salvo le differenze già accennate, il suo analogo nel sistema Campini, specie se il calore direttamente fornito e quello proveniente dai gas di scarico del motore sono introdotti subito a monte dell'effusore.

4) Elica autorotante alimentata da gas di scarico in pressione di motore a coppia nulla. Trova il suo analogo, salvo le differenze già accennate, nel sistema a reazione semplice alimentato nello stesso modo.

Il motore può essere costituito da un solo motore a stantuffo o da un gruppo di un compressore centrifugo e di una turbina meccanicamente connessi, con l'interposizione di una camera di combustione.

5) Ai suddetti sistemi può poi essere applicato il principio dell'eiettore, disponendo una presa dinamica per l'aria secondaria all'estremità della pala d'elica.

6) Infine i sistemi 1, 2 e 3 possono essere modificati nel senso che l'elica, anzichè essere autorotante, assorba una certa coppia dal gruppo motore. In questo caso, naturalmente, il rendimento è intermedio tra quello del gruppo motore-elica e quello trovato per l'elica a reazione.

Questo caso trova il suo analogo nella propulsione mista con elica e reazione assiale.

Il sistema a reazione come metodo di utilizzazione dei gas di scarico.

Per quanto non abbiamo intenzione di trattare qui estesamente le possibilità offerte dal sistema a reazione per l'utilizzazione dei gas di scarico, argomento questo che fa oggetto di una nota di un altro Autore, pure riteniamo opportuno dare alcuni cenni del come questo problema si inquadri nei problemi più generali della propulsione a reazione fin qui trattati.

Il più semplice modo di utilizzare, mediante il fenomeno della reazione, l'energia residua dei gas di scarico è certamente quello di piegare semplicemente i tubi di scarico del motore nella direzione del moto dell'aereo, cosicchè la velocità dei gas di scarico risulti in tal senso diretta.

Per quanto riguarda l'energia effettivamente utilizzabile in questo modo è al solito necessario distinguere il fenomeno in due fasi, e cioè nel fenomeno dinamico della trasformazione in energia cinetica dei gas (computata rispetto al mobile ritenuto come fermo) dell'energia meccanica competente ai gas di scarico quale risulta dal ciclo (area tratteggiata della fig. 5), e nel fenomeno pro-

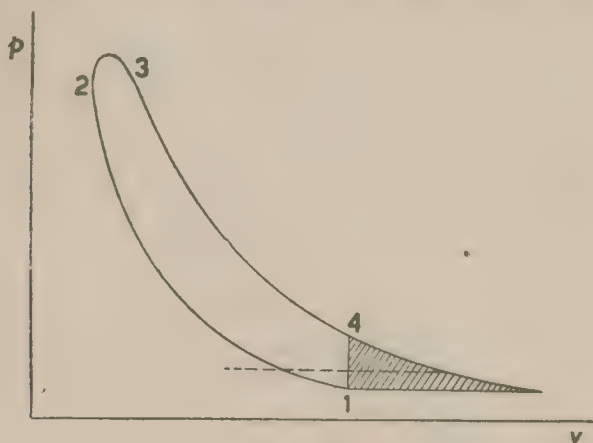


Fig. 5.

pulsivo relativo all'ottenimento di energia propulsiva. Al primo fenomeno corrisponde un rendimento dinamico, al secondo un rendimento propulsivo, o meglio (per le ragioni già viste) un coefficiente di utilizzazione propulsiva (v. formula 9).

Senza volere entrare in particolari, osserviamo, per quanto riguarda il rendimento dinamico, che, oltre alle inevitabili perdite attraverso valvole, tubazioni, ecc., vi è da considerare un fatto che può influire notevolmente su questo rendimento. Il fenomeno dello scarico a volume costante, di tipo evidentemente non permanente, avviene con salti di pressione variabili tra quello corrispondente all'inizio dello scarico e lo zero, e corrispondentemente (almeno ove si prescinda dalla velocità dello stantuffo) variano le velocità di efflusso.

Ora, con i valori normali dei salti di pressione, si vede facilmente che, in un primo tratto dello scarico, la velocità di efflusso teorica supererebbe quella del suono, ciò che in pratica non può aversi, non essendo possibile, data anche la variabilità del fenomeno, conformare il condotto di efflusso nel modo che sarebbe a ciò richiesto.

In pratica, quindi, la velocità di efflusso sarà superiormente limitata dalla velocità del suono, ciò che dà una causa di perdita

che può in prima approssimazione valutarsi, nel diagramma della figura 5, come data dalla porzione di area limitata inferiormente dalla isobara tratteggiata in figura, cui corrisponde la velocità del suono, e cioè all'incirca una pressione doppia di quella esterna.

Il coefficiente di utilizzazione poi dovrà essere calcolato tenendo conto, naturalmente, della variabilità della velocità di efflusso.

La causa di perdita suaccennata fa sorgere la questione se sia o meno conveniente regolarizzare l'efflusso in modo che esso sia non più a velocità variabile, bensì a velocità costante.

Ciò potrà farsi convogliando i gas di scarico in un recipiente di sufficiente grandezza perchè non si risentano le pulsazioni dovute all'intermittenza dello scarico, e da questo recipiente, munito di bocca opportunamente sagomata, fare avvenire l'efflusso.

Si verrebbe così a realizzare in sostanza il metodo già precedentemente studiato della propulsione mista ad elica ed a reazione. Naturalmente, come già si è visto, applicando questo metodo, il lavoro utilizzabile sotto forma di energia meccanica risulterebbe minore, causa la contropressione allo scarico, e corrispondentemente incrementato risulterebbe il lavoro utilizzato sotto forma di reazione. Per giudicare della convenienza del procedimento bisognerebbe calcolare, con i concetti già esposti per la propulsione mista, la condizione di massima convenienza ed il vantaggio ottenibile rispetto alla sola propulsione ad elica senza utilizzazione di gas di scarico.

Se il vantaggio così computato risultasse maggiore di quello apportato dalla utilizzazione dei gas di scarico a velocità variabile, potrebbe convenire adottare il suddetto dispositivo.

Può anche pensarsi, adottando un criterio già da altri esposto e ripreso dall'autore, a proposito dell'utilizzazione dei gas di scarico nelle motrici terrestri ⁽¹⁾, ad ottenere un efflusso di gas a pressione costante senza imporre contropressioni allo scarico, raccogliendo parte dei gas in un collettore a pressione inferiore di quella iniziale di scarico e lasciando sfuggire, attraverso ad un'altra valvola, la parte dei gas che rimarrebbe nel cilindro a pressione inferiore a quella del collettore.

La convenienza di questo sistema però appare assai dubbia nel caso attuale, sia perchè in aviazione gli inconvenienti relativi alle necessarie modifiche che esso richiederebbe nella distribuzione

(1) POGGI, *Idee e calcoli sull'utilizzazione dei calori perduti nei motori a combustione interna*. «L'energia termica», novembre 1940.

avrebbero relativamente un peso maggiore che non in un inpianto a terra, sia perchè in questo caso è variata la base di confronto tra il valore della variazione di potenza fornita dal motore e quello dell'energia utilizzabile nei gas.

A terra, infatti, ogni variazione di potenza del motore è integralmente da mettersi in conto, mentre la corrispondente variazione di energia utilizzabile nel gas deve essere moltiplicata per il rendimento della motrice che la utilizza. Qui invece la variazione di potenza del motore deve essere moltiplicata per il rendimento dell'elica, mentre il rendimento della trasformazione termodinamica dell'energia teoricamente utilizzabile dei gas in energia cinetica è presumibilmente assai maggiore di quello di una turbina.

Vogliamo infine accennare all'eventuale utilizzazione termodinamica dei gas di scarico, che ne sfrutti, cioè, il calore in un ciclo di fluido indipendente, utilizzato poi in un processo di propulsione a reazione.

Come si è già detto, questo modo di utilizzazione sarebbe realizzato nel sistema Campini, già studiato, ove fosse nullo il calore direttamente introdotto. La domanda che sorge immediatamente in proposito è se conviene fare questa utilizzazione, o se conviene invece utilizzare i gas di scarico per ottenere direttamente una reazione.

Premesso che, come già si è accennato, per ragioni di spazio e di peso non è il caso di pensare in aeronautica a scambiatori di calore a superficie tra i gas di scarico e il fluido che percorre l'evoluzione Campini, dovendo quindi il calore essere ceduto (subito dopo la compressione meccanica) per miscelamento, è evidente che la pressione dell'aria dopo la compressione meccanica non potrà superare quella dei gas di scarico. La condizione di massima utilizzazione dei gas sarà ovviamente quella in cui queste due pressioni sono uguali.

Orbene, in base alle solite espressioni sull'espansione dinamica, può immediatamente verificarsi che l'energia cinetica massima ottenibile nell'efflusso del miscuglio è in questo caso perfettamente uguale a quella che si otterrebbe facendo espandere separatamente il gas di scarico e l'aria previamente compressa ⁽¹⁾. Dal punto di vista termodinamico quindi l'eseguire il miscuglio non porta alcuna variazione.

(1) Infatti, indicando con P_1 e P_2 i pesi dei due fluidi, con I_1 e $\bar{I}_2$ le entalpie corrispondenti prima del miscelamento e con I_m l'entalpia dopo il miscelamento, l'energia cinetica ottenibile facendo effluire separatamente i

Dal punto di vista del rendimento di propulsione ciò può portare invece un piccolo vantaggio, come può dedursi dal fatto che i gas di scarico, se fatti espandere a sè, a parità di pressione iniziale, acquisterebbero per unità di massa una maggior energia cinetica che non l'aria del ciclo, a cagione della loro maggior temperatura iniziale. Se si riflette che, a parità di energia cinetica totale, la quantità di moto di un sistema di corpi muoventisi nella stessa direzione è massima quando le velocità sono eguali, segue appunto che facendo effluire i gas miscelati, mantenendosi, come si è detto, costante l'energia cinetica totale, se ne aumenta la quantità di moto complessiva.

Eseguire il miscelamento prima dell'espansione, quindi, dati che siano i gas e l'aria compressa alla stessa pressione, sarebbe di per sè conveniente; non è detto però che sia conveniente comprimere l'aria per unirli ai gas di scarico, poichè le perdite inevitabili nella compressione e quelle legate al rendimento di propulsione dell'aria stessa sarebbero presumibilmente assai maggiori di quanto non sia il lieve vantaggio sopraaccennato. Il sistema a evoluzione ripartita, applicato come metodo di recupero dei gas di scarico, appare quindi di dubbia convenienza rispetto alla semplice utilizzazione di questi a pressione costante.

due fluidi, ammesso che le pressioni iniziali siano uguali, può mettersi nella forma:

$$P_1 I_1 \xi + P_2 I_2 \xi$$

dove ξ è la solita funzione delle pressioni iniziale e finale, mentre l'altra parte l'efflusso del fluido miscelato darebbe una energia cinetica:

$$(P_1 + P_2) I_m \xi.$$

Ma poichè

$$I_m = \frac{P_1 I_1 + P_2 I_2}{P_1 + P_2},$$

le due energie sono uguali.

ANTONIO CAPETTI

Della spinta dei gas scaricati dai motori a combustione interna a quattro tempi.

Riassunto. — Nella grande maggioranza delle esperienze, di cui qui si rende conto, la spinta misurata è stata quella esercitata dai gas di scarico dei motori in prova contro una piastra piana opposta normalmente alla direzione dei getti. Però dai controlli eseguiti misurando direttamente in qualche caso la reazione contro il motore, è risultata avvalorata la presunzione che questa sia eguale e contraria alla spinta misurata nelle altre prove.

Nel corso di queste sono state ricercate specialmente le influenze della velocità del motore, della lunghezza dei tubi di scarico, dell'area degli sbocchi e del modo come i gas sono convogliati, cioè con tubi separati per ciascun cilindro o con collettori variamente combinati.

È risultata l'esistenza di condizioni di massima spinta per velocità di motore e lunghezze di tubo corrispondenti alla coincidenza del periodo d'oscillazione propria della colonna gasosa che riempie i tubi col periodo degli impulsi di scarico e coi suoi multipli intieri.

Sono state anche fotografate le forme che assume il getto di gas combusti nelle varie fasi del ciclo.

Premesse.

I gas combusti scaricati con velocità elevatissime, prossime a quelle del suono, esercitano sul motore una reazione, la cui utilizzazione per la propulsione si presenta tanto più interessante quanto più alta è la velocità del veicolo. Alla velocità di 540 km/ora (150 m/s), che oggi può esser quasi considerata modesta per gli aeroplani, il contributo della reazione alla propulsione può raggiungere probabilmente il 15 % della spinta dell'elica. D'altra parte non occorrono meccanismi supplementari, ma solo opportune disposizioni di tubi.

L'origine dell'energia recuperata in questo modo è duplice: si tratta in parte del lavoro perduto per incompleta espansione dei gas nel cilindro ed in parte dell'energia cinetica che era stata comunicata all'aria all'atto della sua captazione nel carburatore ed al carburante durante l'acceleramento dell'intero apparecchio.

La prima forma costituisce un ricupero netto solo se le pressioni nell'interno del cilindro non risultano modificate dalla presenza dell'apposito apparato di scarico; in caso diverso, nel bilancio dell'energia occorre introdurre, opportunamente corretta col rendimento dell'elica, la perdita, ovvero, se ne fosse il caso, il guadagno, di potenza subito dal motore.

Allo scopo di confrontare i valori della reazione ottenibile praticamente con quelli prevedibili con teorie più o meno approssimate, e di accertare come vadano conformati e dimensionati gli apparati di scarico in vista della migliore realizzazione della reazione, abbiamo eseguito nei laboratori di Aeronautica e di Motori a combustione interna del R. Politecnico di Torino, colla valida collaborazione del Dott. Ing. Giorgio Vigo, lunghe serie di esperienze su di un motore da automobile Fiat 120 a sei cilindri in linea e valvole laterali e sul noto monocilindro C. F. R. a valvole in testa. Altre esperienze su motori da aeromobili sono in corso od in programma.

Notiamo come i risultati di queste ricerche servano a far luce non solo sul problema della realizzazione della reazione di scarico ma anche su quello ad esso strettamente affine della utilizzazione dell'energia cinetica di scarico in una turbina, senza creare contropressioni apprezzabili sul motore.

1. *Previsioni teoriche.*

Una previsione sommaria dell'entità della reazione può esser fatta addirittura a mente, pensando che una parte variabile dalla metà ad un terzo circa del peso totale di gas è scaricata colla velocità del suono e quindi, date le temperature in gioco, dà luogo ad una reazione pari a circa 60 volte la portata al secondo, mentre la parte rimanente è espulsa con una velocità che scende rapidamente a valori molto inferiori e perciò, in questo calcolo di grande massima, trascurabili. Si arriva così alla previsione di reazioni dell'ordine di $35 \div 45$ volte il peso medio scaricato in ogni secondo, valori che di fatto rappresentano una media dei risultati praticamente misurati nel corso delle nostre esperienze.

Una calcolazione più minuziosa può essere eseguita in base alla legge degli efflussi, seguendo il fenomeno dello svuotamento del cilindro. Scriviamo allora che la reazione media R vale:

$$(1) \quad R = \frac{1}{gZ} \int w dG,$$

(indicando con Z il periodo con cui si succedono gli scarichi, con w la velocità istantanea di efflusso dal cilindro, e con G il peso di gas in esso contenuto).

Schematizziamo poi lo scarico, distinguendo in esso, per i motori a 4 tempi, due fasi: una prima, che chiameremo più propriamente di *scarico*, a volume costante, dalla pressione iniziale p_1 (« pressione di scarico ») fino ad un valore p_2 , diverso ed in particolare maggiore della pressione atmosferica esterna, p_e ; una seconda, che chiameremo di *espulsione*, a pressione e velocità costanti p_2 e w_2 (« pressione e velocità di espulsione »). Conformemente a questa ipotesi scindiamo in due parti l'integrale della (1); scrivendo:

$$(2) \quad R = \frac{1}{gZ} \left[\int_{G_1}^{G_2} w dG + w_2(G_2 - G_3) \right].$$

Introducendo ancora l'ipotesi dell'assenza di perdite sia termiche sia meccaniche e quindi ammettendo la possibilità di sorpassare all'efflusso la velocità del suono, quando l'espansione sorpassa il rapporto critico, dalle equazioni:

$$w dG = V_1 w d\gamma$$

$$w = \sqrt{2gCT_1 \frac{k}{k-1}} \sqrt{1 - (p_e/p)^{\frac{k-1}{k}}};$$

(essendo k l'esponente dell'adiabatica e C la costante del gas), posto

$$x = \gamma'/\gamma_e,$$

abbiamo:

$$w d\gamma = \gamma_1 \sqrt{2gCT_1 \frac{k}{k-1}} (p_e/p_1)^{\frac{k+1}{2k}} \sqrt{x^{k-1} - 1} dx$$

$$R = \frac{G_1}{gZ} \sqrt{2gCT_1 \frac{k}{k-1}} (p_e/p_1)^{\frac{k+1}{2k}} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{x^{k-1} - 1} dx + w_2 \frac{G_2 - G_3}{gZ}.$$

L'integrale contenuto in questa formula viene calcolato graficamente (cfr. fig. 1); ne indicheremo con F il valore definito fra i limiti 1 e x .

Tra il peso G di gas contenuto nel cilindro in un dato istante e la portata media, in kg al secondo, uscente dal motore, Q , corrono le relazioni:

$$G_1 = V_1 \gamma_1 ; \quad G_2 = V_1 \gamma_2 \quad ; \quad G_3 = \frac{V_1}{\varrho} \gamma_2 \quad ; \quad QZ = G_1 - G_3$$

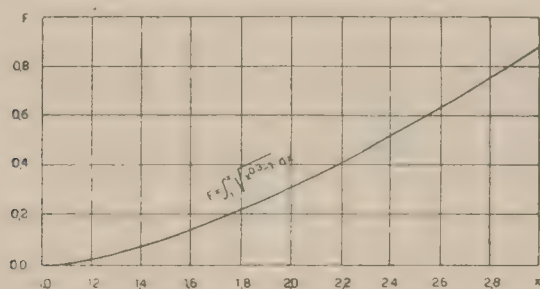


Fig. 1.

(dove ϱ è il rapporto di compressione del motore); di qui si ha:

$$G_1 \left(1 - \frac{x_2}{\varrho x_1} \right) = QZ \quad ; \quad G_2 - G_3 = G_1 \frac{x_2}{x_1} \frac{\varrho - 1}{\varrho}$$

Infine:

$$(3) \quad R = \frac{Q}{1 - x_2 \varrho x_1} \left[\sqrt{\frac{2kCT_1}{g(k-1)}} (p_e/p_1)^{\frac{k+1}{2k}} (F_1 - F_2) + w_2 \frac{\varrho - 1}{\varrho} \frac{\gamma_2}{g} \right]$$

Volendo poi tener conto della impossibilità di sagomare i condotti di efflusso dal cilindro (ossia lo spazio attorno alle valvole) come ugelli di De Laval, il ragionamento che ha condotto alla (3) può essere modificato, supponendo che, pur continuando ad essere adiabatica l'espansione nell'interno del cilindro, l'espansione nelle valvole sia limitata al rapporto critico, in modo che si abbia all'efflusso solo la velocità del suono.

Allora l'integrale della (2) si scinde in due, uno esteso dalla pressione p_1 alla pressione critica p_c , l'altro dalla p_c alla p_2 .

Abbiamo così, trascurando la differenza di pressione tra la bocca di scarico e l'esterno:

$$R = \frac{G_1}{gZ} \left[\sqrt{gkCT_1} (2/k + 1)^{\frac{3}{2}} (1 - \{\gamma_c/\gamma_1\}^{\frac{k+1}{2}}) + \right. \\ \left. - \frac{\gamma_c}{\gamma_1} \sqrt{\frac{2}{k-1}} gkCT_1 \left(\frac{k+1}{2} \right)^{\frac{k}{k-1}} (p_e/p_1)^{\frac{k-1}{2k}} (F_c - F_2) + w_2 \frac{G_2 - G_3}{G_1} \right], \\ (1) \quad R = \frac{Q}{1 - x_2/Qx_1} \left[\sqrt{\frac{k}{g}} CT_1 \left\{ \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{3}{2}} (1 - [\gamma_c/\gamma_1]^{\frac{k+1}{2}}) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\gamma_c}{\gamma_1} \sqrt{\frac{2}{k-1}} (p_e/p_1)^{\frac{k-1}{k^2}} (F_c - F_2) \right\} + w_2 \frac{Q-1}{Q} \frac{\gamma_2}{g} \right].$$

Esempio:

$$p_1 = 4 \quad ; \quad T_1 = 1250 \quad ; \quad p_2 = \sim p_e = 1 \quad ; \quad \gamma_c = \sim \gamma_2 = 0,414 \quad ; \quad k = 1,3$$

$$Q = 6 \quad ; \quad w_2 = 50 \quad ; \quad x_1 = 2,9 \quad ; \quad F_1 - F_2 = 0,82.$$

Dalla formula (3) si ricava

$$R = 50 Q.$$

Invece dalla (4), in cui $x_c = 1,6$ e quindi $F_c = 0,15$, si trova:

$$R = 45,8 Q,$$

valore, come si vede, poco diverso dal precedente.

Queste teorie suppongono che la velocità nella bocca di scarico sia eguale a quella di uscita dal cilindro e quindi trascurano:

1° lo smorzamento prodotto dalle resistenze passive e dal raffreddamento nel tubo di scarico;

2° l'attenuazione degli scarti periodici della velocità dal suo valor medio, prodotta dalla capacità dell'apparato di scarico, considerato come «ricevitore»;

3° le alterazioni, che possono essere sia diminuzioni sia aumenti, prodotte dai fenomeni oscillatori delle colonne gasee che riempiono tutto il sistema cilindri-apparato di scarico.

Lo smorzamento dovuto alle resistenze passive, almeno per quanto riguarda la parte *continua* (attrito), sembra trascurabile, poichè nelle nostre esperienze si sono misurati i massimi valori della reazione proprio in tubi lunghissimi, fino oltre 12 metri.

Quanto all'effetto della *capacità* della tubazione di scarico, si richiama una formula dedotta dal Lutz ⁽¹⁾ in un caso che presenta qualche analogia coll'attuale. Ammettendo che nel «ricevitore» la velocità sia trascurabile (cosa veramente alquanto inesatta nel nostro caso) e che gli scarti Δw della velocità di scarico dal valor medio w_m siano piccoli, indicando con K una costante d'integrazione, con ζ la frazione variabile del periodo Z , con Δq gli scarti della portata scaricata dal motore rispetto alla loro media q , con S l'area di efflusso, con V la capacità del ricevitore e con w la velocità che il suono avrebbe in esso, si trova:

$$S\Delta w = e^{-\alpha\zeta} \left(K + \alpha \int_0^\zeta \Delta q e^{\alpha\zeta} d\zeta \right),$$

dove:

$$\alpha \approx \frac{w_s^2 SZ}{w_m V}.$$

Di qui si vede che l'attenuazione delle pulsazioni della velocità di efflusso espressa dal parametro α cresce rapidamente al diminuire dell'area S , al crescere della velocità del motore, a cui w_m è quasi proporzionale e al diminuire della irregolarità degli scarichi, ossia all'aumentare del numero dei cilindri che scaricano nello stesso collettore.

Che poi da tale attenuazione delle fluttuazioni della velocità di efflusso derivi una diminuzione della reazione, ci si può facilmente persuadere, pensando che la reazione media è proporzionale alla media dei quadrati della velocità ⁽²⁾, cioè al quadrato del cosiddetto «valore efficace» della velocità. Ora è noto che in generale il valore efficace di una grandezza periodicamente variabile è superiore al valore medio.

Assai più ardua appare la previsione analitica, anche soltanto approssimata, del comportamento del sistema oscillante cilindro-tubazione durante una fase come quella di scarico, la cui parte più importante si svolge in regime sonoro e si inizia con fenomeni d'urto. D'altra parte dalle esperienze fatte, specialmente con ugelli di grande sezione, risulta che questa, delle tre cause di imperfezione delle calcolazioni esposte, è la maggiore; e non solo

⁽¹⁾ O. LUTZ, *Über Gasmengenmessung bei Kolbenmaschinen mittels Dusen und Blenden*. «Ingenieur Archiv», 1932, pag. 138.

⁽²⁾ Infatti nella formula (1) dG è proporzionale a w .

nei casi in cui la complessità è più evidente, come quando fra il cilindro e la bocca di scarico è interposta una lunga tubazione, e in essa scaricano parecchi cilindri dello stesso motore, ma anche nel caso di tubi singoli e cortissimi.

Ad ogni modo tutte e tre le cause elencate fanno sì che sul valore della reazione non si esercitino solo le influenze delle variabili che dipendono dal modo di funzionare del motore (pressione e temperatura iniziali di scarico, velocità di espulsione, ecc.) e quella della contropressione alla bocca di scarico, che dipende a sua volta dalla pressione ambiente e dalla posizione che la bocca ha sul veicolo, ma ancora le influenze delle lunghezze e disposizioni dei tubi; della forma dell'ugello con cui essi terminano e dell'area della sua sezione di sbocco; del modo come i gas sono convogliati, cioè con tubi separati per ciascun cilindro o con collettori variamente combinati.

2. Metodi di misura.

Per la determinazione della reazione dello scarico si è ricorso dapprima ad un metodo diretto, consistente nell'impiantare il motore insieme colla macchina dinamometrica che lo frena, su di un banco oscillante intorno ad un asse ortogonale a quello dei tubi di scarico.

In questo modo, prese le ordinarie precauzioni per quanto concerne la libertà d'oscillazione del banco e l'assenza di momenti perturbatori per le quantità di moto di ingresso e di uscita di altri fluidi (aria aspirata, acqua refrigerante del motore e del freno), essendo eguali e contrarie le coppie di reazione del motore e del freno, il banco oscillante dovrebbe essere soggetto solo al momento della reazione di scarico. Che se la bilancia del freno dinamometrico è equilibrata da pesi variabili o spostabili, ovvero, come nel nostro caso, ha il suo sopporto all'esterno del banco, basterà apportare alle letture eseguite colla bilancia del banco oscillante le correzioni derivanti dalle letture contemporaneamente eseguite colla bilancia del freno.

Come freno dinamometrico si era dapprima usato un tipo idraulico a laminazione (Ranzi); si sono però riscontrati errori dovuti allo spostamento del baricentro dell'acqua racchiusa nella carcassa.

Migliori risultati si sono ottenuti coll'uso di una dinamo a statore oscillante capace di funzionare anche come motore di trascinamento.

Anche così affinato però, il metodo della misura diretta della reazione si è rivelato di scarsa approssimazione, poichè nell'imperniamento del banco oscillante, che oltre ad esser di per se stesso pesante è gravato dal peso del motore e del freno, si sviluppano attriti che per quanto ridotti a valori tollerabili per le misure della potenza, risultano relativamente gravi per la misura della rea-

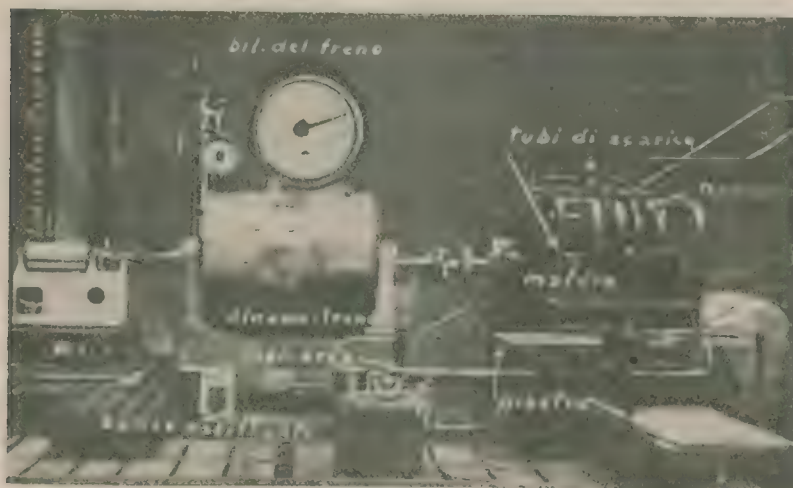


Fig. 2. — Prove col motore Fiat 120.

zione; questa infatti nel maggiore dei motori provati raramente tocca i 2 kg. e talora scende a poche decine di grammi.

Si è allora fatto ricorso ad un metodo indiretto, misurando, anzichè la reazione, la *spinta* esercitata dai gas di scarico contro una piastra piana presentata a breve distanza davanti allo sbocco dei tubi di scarico.

Con questo metodo è stato possibile raggiungere sensibilità di pesate assai superiori al necessario, data l'instabilità che si manifesta nella maggior parte delle misure e la ben nota irriproducibilità esatta delle prove motoristiche.

È stato eseguito qualche confronto fra le misure indirette e quelle dirette, assumendo per queste ultime la media di due letture, nelle quali il momento della reazione di scarico veniva cambiato di segno invertendo l'inclinazione dei tubi, una volta diretti verticalmente verso il basso ed una volta verticalmente verso l'alto, senza arrestare il motore. I punti rappresentativi delle misurazioni dirette risultano sufficientemente prossimi a quelli delle misurazioni indirette, sicchè la presunzione dell'eguaglianza

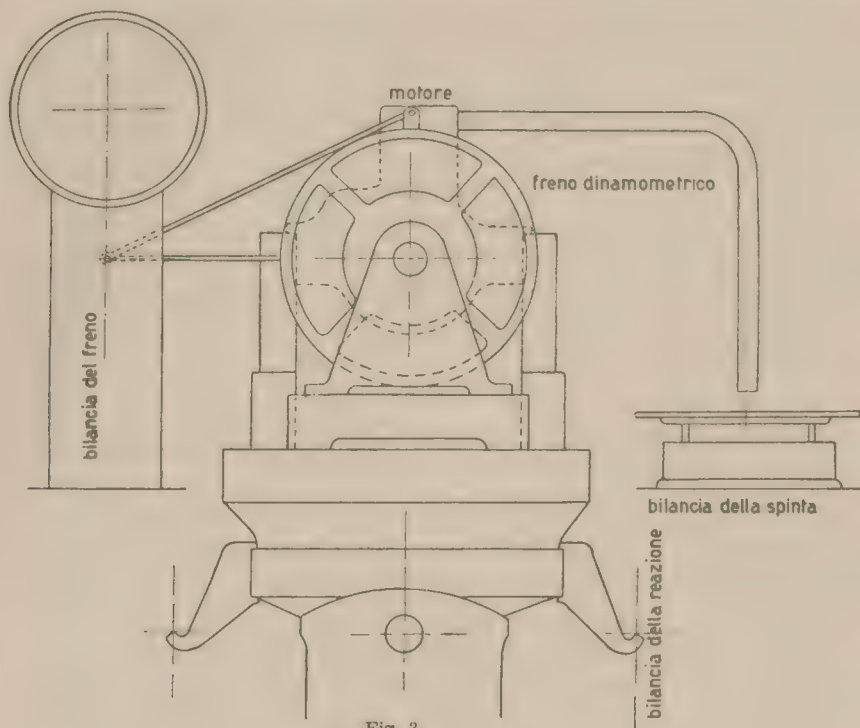


Fig. 3.

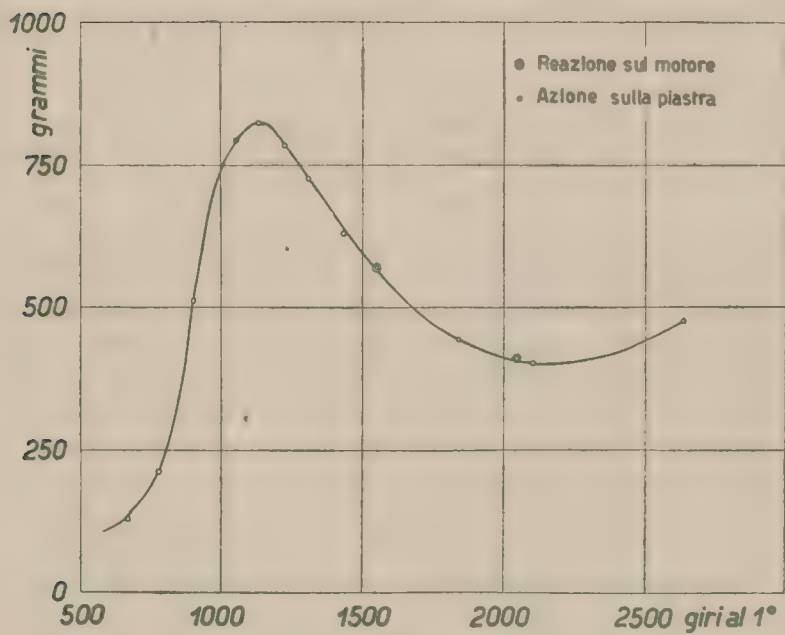


Fig. 4.

dell'azione sulla piastra e della reazione sul basamento del motore può esser ritenuta ammissibile (cfr. fig. 4). Si è anche verificato che la distanza fra lo sbocco dei tubi e la piastra non esercitava un'influenza apprezzabile entro limiti abbastanza vasti ($20 \div 100$ mm.).

Un altro metodo, non ancora sufficientemente a punto, ma già dimostratosi promettente, consiste nel far portare dalla bilancia di misura della reazione solo l'ultimo tratto della tubazione di scarico, reso libero di oscillare insieme col giogo della bilancia, mediante un collegamento flessibile col motore.

3. Condotta delle prove sul motore Fiat 120 (cilindrata 2244 cm³).

Gli apparati di scarico provati sono descritti nella tabella 1^a e nelle figure 12 ÷ 14. La lunghezza del tubo segnata nella tabella è computata a partire dal centro della valvola di scarico del cilindro più lontano dallo sbocco.

Per l'area del tubo sono segnati nella tabella in alcuni casi due o tre valori, poichè il tubo medesimo era composto di più tronchi infilati l'uno nell'altro. Per aver un'idea del valore relativo di queste aree e di quelle di efflusso, si tengano presenti le seguenti aree caratteristiche del motore provato:

Sezione retta del cilindro	cm ² 36
» valvola di scarico	» 6
» bocca di scarico dal monoblocco	» 10

Alcune serie di prove sono state fatte trascinando il motore spento, a velocità e con aperture di carburatore variabili, altre col motore in funzione e a gas ridotti. La grande maggioranza però delle prove di cui qui si riferisce è stata eseguita a pieni gas, a dosatura di miscela costante (una miscela ricca del 30% circa) con l'anticipo d'accensione ottimo, facendo variare quindi solo il numero di giri al minuto per mezzo del freno.

Nelle prove sono stati misurati, oltre alla spinta sulla piastra ed al numero di giri, la potenza del motore ed i suoi consumi di aria e di carburante. Saltuariamente, sono state misurate le temperature medie dei gas di scarico all'imbocco ed allo sbocco dai tubi e sono stati pure rilevati alcuni diagrammi delle pressioni interne al cilindro, coll'indicatore Farnboro.

TABELLA I.

Lunghezza	Area sezioni tubi	Tipo del boccaglio di scarico	Area bocca scarico
m	cm ²		cm ²

a) Un tubo separato per ciascun cilindro:

0,26	10,8	—	10,8
0,56	10,8-14,6	—	14,6
0,92	10,8-14,6	—	14,6
1,27	10,8-14,6	—	14,6
2,40	10,8-14,6	—	14,6
2,72	10,8-14,6	—	14,6
3,67	10,8-14,6	—	14,6
4,61	10,8-11,4-14,6	—	14,6
5,35	10,8-14,6	—	14,6
6,53	10,8-11,4	—	11,4
6,72	10,8-11,4-14,6	—	14,6
1,39	10,8-14,6	Divergente	39,0
1,37	10,8-14,6	Convergente	5,0
0,26	10,8	»	2,5
0,66	10,8-14,6	»	2,6
1,02	10,8-14,6	»	2,6
1,37	10,8-14,6	»	2,6
4,71	10,8-11,4-14,6	»	2,6
6,82	10,8-11,4-14,6	»	2,6
0,26	10,8	»	1,1

b) Due collettori, uno per ciascuna terna di cilindri, con scarico all'estremità (fig. 14 a destra):

0,96	17	—	17
1,64	17	—	17
2,38	17	—	17

c) Due collettori, uno per ciascuna terna di cilindri, con scarico trasversale (fig. 14 a sinistra):

0,94	14,6		14,6
1,25	14,6	—	14,6
1,61	14,6	—	14,6
1,03	14,6	Convergente	2,6
1,34	14,6	»	2,6

Segue: TABELLA I.

Lunghezza	Area sezioni tubi	Tipo del boccaglio di scarico	Area bocca scarico
m	cm ²		cm ²

d) Un collettore comune a tutti i cilindri, con scarico laterale assiale (fig. 13):

0,64	17	—	17
1,18	17	—	17
1,88	17	—	17
2,10	17	Divergente	60
2,03	17	Convergente	10
2,03	17	"	7,4
1,33	17	"	5
2,03	17	"	5
2,03	17	"	3,7
2,03	17	"	2,3
2,03	17	"	1
1,96	17	"	4,2
1,99	17	Converg. fino a 4,2 cm ² , poi diverg.	8,4
2,01	17	" " "	12
2,03	17	" " "	16,5
2,05	17	" " "	24,5

e) Un collettore comune a tutti i cilindri, con scarico centrale, trasversale (fig. 13):

0,96	17	—	17
1,11	17	—	5

4. Risultati delle prove sul motore Fiat 120.

Le figure 5 ÷ 8 si riferiscono al caso in cui ciascun cilindro scarica in un tubo separato.

La fig. 5 presenta l'andamento della spinta specifica R_s , cioè della spinta divisa per la portata media al secondo, in funzione della velocità per dieci diverse lunghezze di tubazione: da m. 0,26, che corrisponde quasi alla bocca libera, fino a ben 6,72 m. Tutte le tubazioni hanno sezione sensibilmente costante e area di sbocco

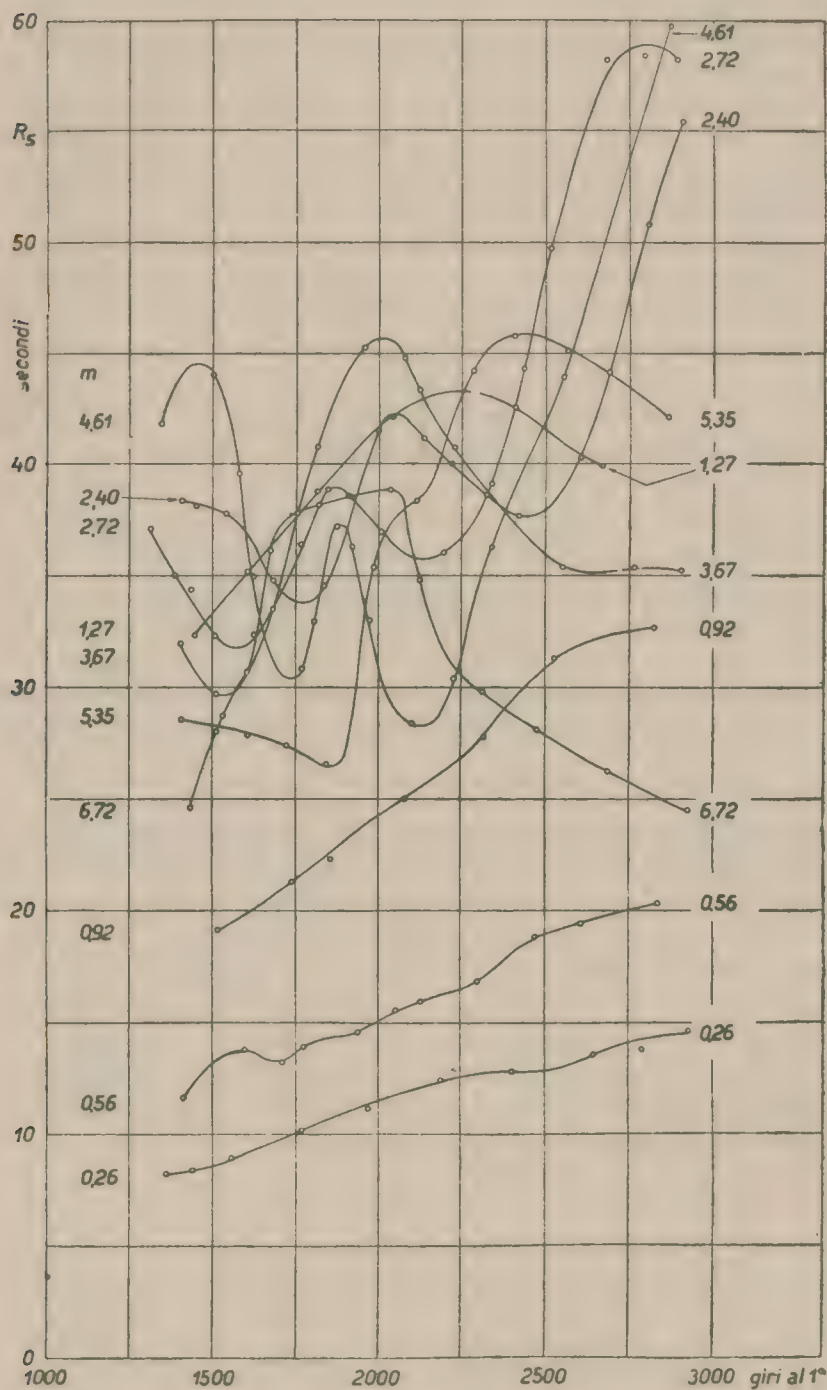


Fig. 5.

pari a circa una volta e mezza quella delle finestre aperte nel monoblocco, tranne la tubazione più corta che ha un'area di sbocco pari a quelle del monoblocco.

Degno di nota è anzitutto il grande distacco fra le varie curve, che denota la grande influenza della lunghezza sulla reazione: alla stessa velocità di 2800 giri al minuto, per esempio, la reazione specifica varia da quasi 60 a meno di 15 secondi.

Nelle condizioni che dovrebbero essere più prossime a quelle della teoria che abbiamo esposto, ossia di tubi cortissimi indipendenti l'uno dall'altro e di sezione costante, si ha la reazione più scarsa, ciò che significa che le velocità prossime o superiori a quella del suono, che abbiamo visto essere quelle che danno il maggior contributo alla reazione, sono fortemente smorzate nel passaggio dalla sede della valvola alla bocca di efflusso del tubo.

In queste stesse condizioni, la reazione specifica appare nettamente crescente colla velocità del motore, anzi quasi proporzionale ad essa. Il fatto può essere spiegato pensando che nel valore della spinta prevalga nel caso di tubi cortissimi la parte che deriva dalla « espulsione », la cui velocità media w_2 è precisamente proporzionale alla velocità angolare del motore.

Nelle tubazioni più lunghe cominciano ad apparire massimi di spinta specifica. Essi corrispondono a velocità per cui il periodo con cui si succedono gli scarichi (pari a $\frac{120}{n}$ sec.) è multiplo intero del periodo di oscillazione propria della colonna di gas caldi che riempie il tubo di scarico, considerato come una canna chiusa ad un estremo ed aperta all'altro (pari a $4 \frac{l}{w_s}$ sec., indicando con l la lunghezza del tubo in metri e con w_s la velocità del suono in m/s). Chiamando « critiche » le velocità corrispondenti ai massimi di spinta specifica, fra il numero di giri critico n_c e la lunghezza l risulta abbastanza verificata sperimentalmente una relazione del genere della seguente:

$$(5) \quad n_c = \frac{30w_s}{kl}$$

essendo k un intero qualunque che definisce l'« ordine » della n_c .

La tabella II mostra quali dovrebbero essere le temperature medie dei gas nei tubi di scarico perchè le velocità critiche osservate fossero conformi alla formula (5).

TABELLA II.

l	k	n_c	w_c	T_c, K
0,92	5	3000	500	670
1,27	5	2250	480	620
2,40	3	2000	480	620
2,72	3	1830	500	670
	2	2750		
3,67	2	2000	488	640
	2	1450	460	560
4,61	—	1895		
	1	3000	430	500
5,35	1	2400		
6,72	1	1875	420	470

I valori della temperatura così calcolata sono in verità minori di quelli osservati (cfr. fig. 17); però è notevole che le temperature medie ipotetiche vadano decrescendo al crescere della lunghezza del tubo, come effettivamente accade in seguito alla maggior dispersione di calore.

Non rientra nel quadro delle giustificazioni riassunte nella formula (5) la velocità critica di 1895 giri misurata colla tubazione lunga 4,61 m.

Sempre sulla fig. 5 si può osservare che nelle condizioni di massimo si raggiungono spinte specifiche tanto maggiori quanto minore è l'ordine della velocità critica e quanto maggiore è tale velocità.

Aggiungiamo che nelle condizioni critiche (nelle quali evidentemente viene esaltata la parte di spinta dovuta allo « scarico » e quindi a velocità parasonore) il rumore del motore diventava particolarmente assordante.

Analoghe osservazioni potrebbero essere fatte sulla fig. 6, in cui gli stessi risultati sperimentali della fig. 5 sono invece raccolti in 3 diagrammi di funzionamento a velocità costante, aventi per ascisse le lunghezze dei tubi. A tratti sono segnati quegli elementi delle linee, per il cui tracciamento sicuro non si avevano dati sperimentali sufficienti.

Invece di velocità critiche possiamo ora parlare, collo stesso significato, di « lunghezze critiche l_c », legate al numero di giri del motore dalla relazione:

$$(6) \quad l_c = \frac{30w_c}{kn}$$

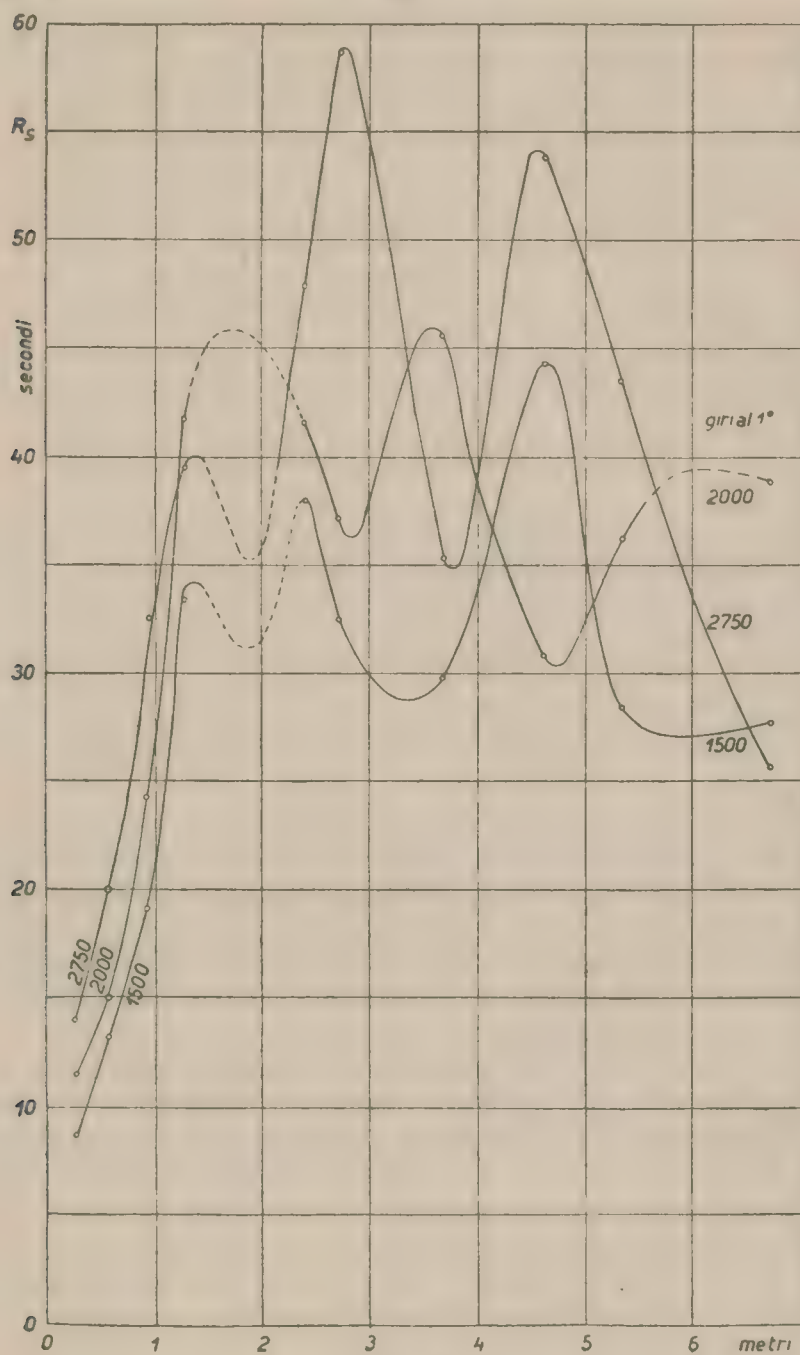


Fig. 6

La tabella III mostra i risultati dell'applicazione di questa formula ai casi segnalati dalla fig. 6.

TABELLA III.

n	k	l_c	w_s	$T_s^{\circ}K$
1500	2	4,6	460	560
	4	2,4	480	600
	8	1,3	520	720
2000	1	6,0	400	430
	2	3,6	480	620
	4	1,8	480	620
2750	1	4,5	410	450
	2	2,8	510	700
	4	1,4	510	700

Nella fig. 7 sono presentati i risultati di prove effettuate cogli stessi tubi separati di varie lunghezze considerati nelle figure 5 e 6, ma colla sezione di efflusso ristretta a 2,6 cm² mediante un ugello convergente.

Appare nettamente che la riduzione della sezione di efflusso diminuisce l'influenza della lunghezza delle tubazioni. Le varie linee appaiono di fatto meno distaccate l'una dall'altra in seguito all'appianamento delle ondulazioni delle linee rappresentative della spinta specifica per le tubazioni lunghe, dove queste ondulazioni erano più pronunziate, e all'innalzamento delle stesse linee per le tubazioni corte, innalzamento tanto maggiore quanto più corta è la tubazione: ad esempio col tubo di lunghezza minima (0,26) a 2500 giri al minuto la spinta passa da 13 a 43 secondi.

Quest'ultimo fenomeno può essere spiegato concordemente con quanto si è detto circa l'influenza della velocità, poichè se nelle tubazioni corte la spinta è data in buona parte dalla velocità di efflusso durante la fase di espulsione, è naturale che riducendo l'area della sezione di sbocco della tubazione la velocità stessa sia aumentata.

L'influenza dell'area della sezione di efflusso è mostrata anche dalla fig. 8, relativa a tubi separati aventi 4 diverse aree di sbocco, delle quali due date da ugelli convergenti, una dalla sezione libera del tubo ed una da un ugello conico divergente. Per la lunghezza

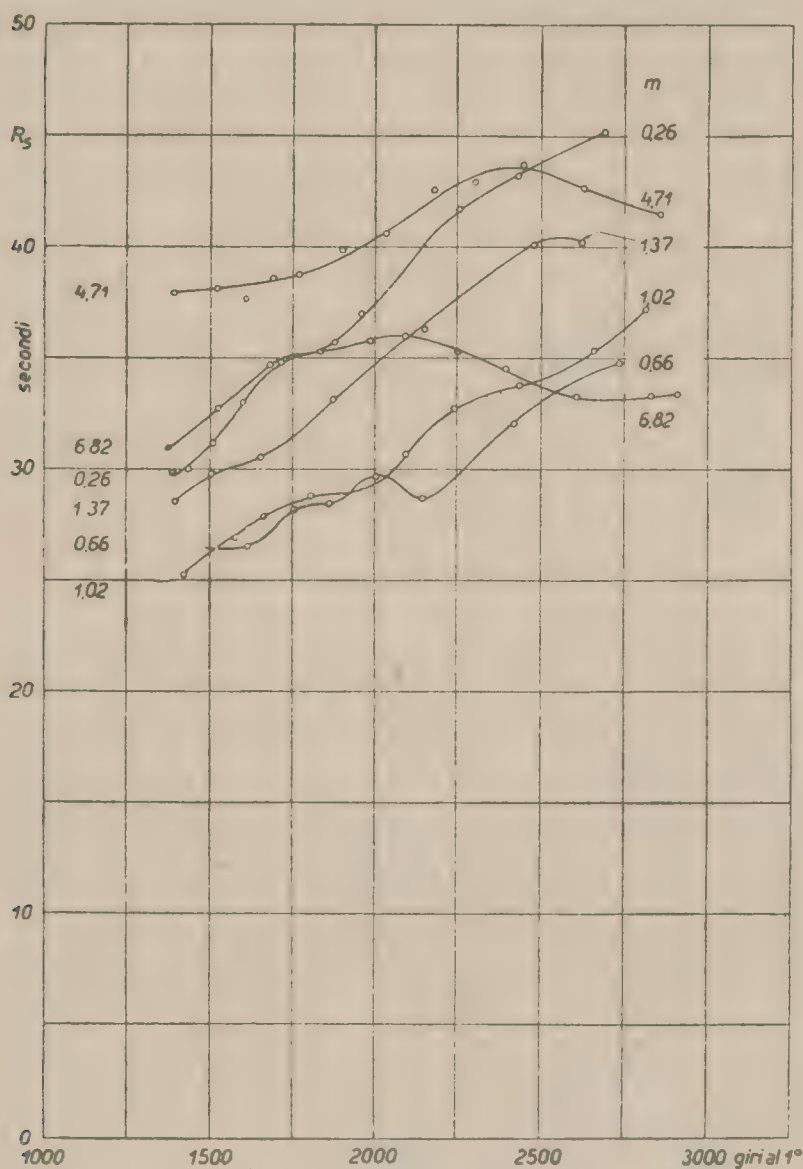


Fig. 7.

prescelta ($1,27 \div 1,39$) le spinte maggiori sono date dall'ugello cilindrico, le minime dal divergente.

Nello stesso diagramma sono mostrati anche i valori del rendimento volumetrico η_v e della pressione media effettiva (p. m. e.). Nè l'uno nè l'altra appaiono molto influenzati dalle variazioni apportate alla bocca di scarico.

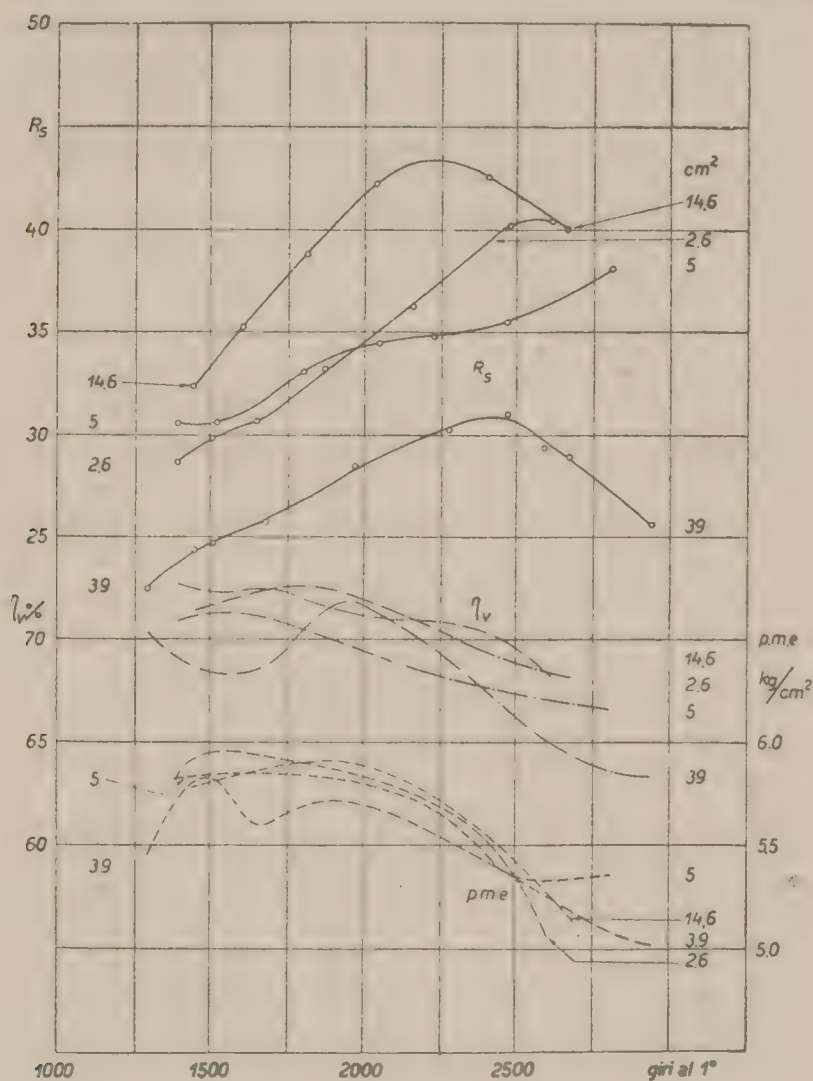


Fig. 8.

Nelle figure 9 ÷ 12 sono raccolti i risultati avuti convogliando i gas scaricati da tutti i cilindri in un unico tubo attraverso il collettore normale del motore.

La fig. 9 mostra l'influenza della lunghezza per tubi aventi sezione costante fino allo sbocco (area di uscita 17 cm^2). Anche qui si notano massimi di spinta specifica ed ancora più salienti che nel caso dei tubi separati. Le velocità corrispondenti ai massimi sembrano obbedire a leggi analoghe a quelle enunciate per

i tubi separati. Però le condizioni qui sono assai più complesse, perchè le aperture delle valvole di scarico dei vari cilindri si succedono bensì ad intervalli di tempo regolari ed eguali alla sesta

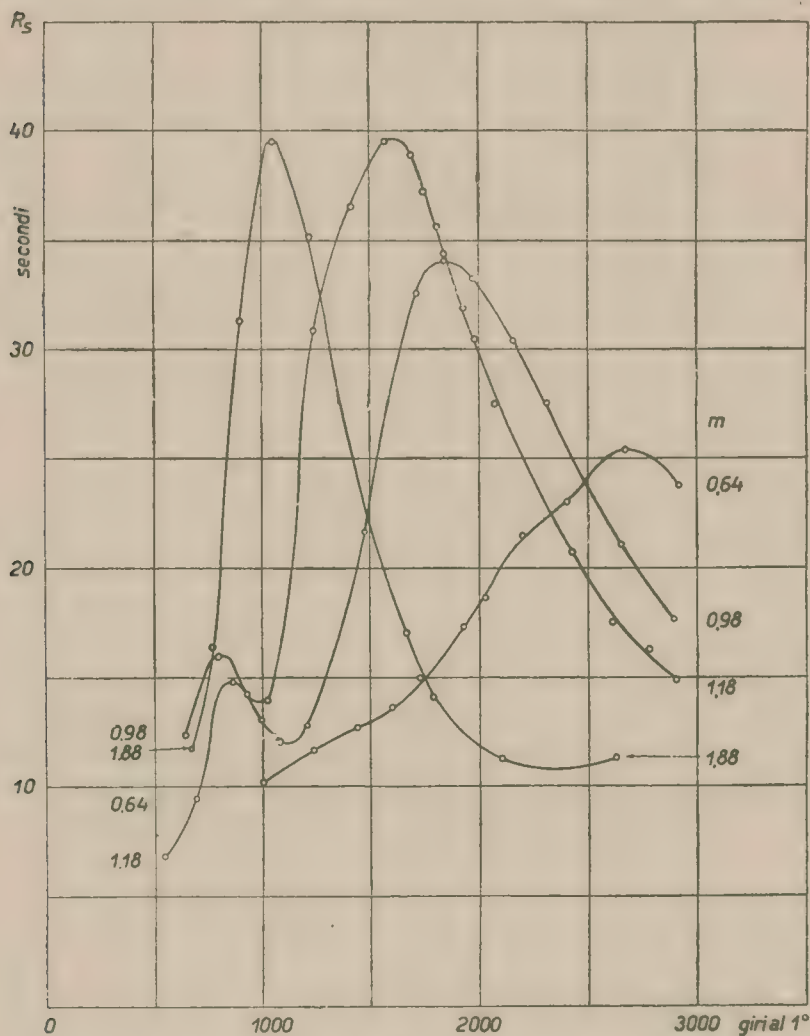


Fig. 9.

parte del periodo di un ciclo, ma gli scarichi avvengono in sezioni che distano l'una dall'altra di lunghezze paragonabili a quella del tubo collettore; inoltre è più difficile definire qui il periodo d'oscillazione propria della colonna gasosa, data la presenza delle diramazioni del collettore verso i singoli cilindri.

Per poter ragionare su basi più solide bisognerebbe aver prima dimostrato *perchè* la coincidenza dei periodi determini la formazione di massimi della spinta, cosa che non è stata fatta.

Tuttavia nella tabella IV è presentato un calcolo delle velocità critiche basato sulle ipotesi molto grossolane che il periodo degli scarichi sia effettivamente ridotto ad $\frac{1}{6}$ e che alla lunghezza della tubazione, calcolata come si è precisato al principio del § 3, vada aggiunta la lunghezza di tutte le diramazioni ai cilindri, ossia colla formula:

$$(7) \quad n_c = \frac{5w_s}{kl_{rid}}$$

TABELLA IV.

l_{rid}	k	n_c	w_s	$T_s^{\circ}K$
0,64 + 0,38	1	2700	590	940
	2	800	440	520
0,98 + 0,38	1	1800	490	645
1,18 + 0,38	2	850	530	750
	1	1650	515	710
1,88 + 0,38	1	1050	475	605

Nella fig. 10 sono riuniti i diagrammi dei risultati ottenuti con tubazioni collettrici di lunghezza press'a poco costante (1,88 ÷ 2,10) e di aree di sbocco molto diverse, ottenute applicando al tubo di scarico unico ugelli divergenti o convergenti.

Si vede che l'area di efflusso non ha influenza sulla velocità di massima spinta, che rimane ferma intorno ai 1050 giri, ma invece influisce molto sul valore del massimo. Anche nel caso di tubo di scarico comune a tutti e sei i cilindri, infatti, man mano l'area di efflusso diminuisce, la curva delle spinte si appiattisce; al di sotto dei 5 cm², che corrisponde a circa $\frac{1}{3}$ dell'area della sezione del tubo prima dell'ugello, il massimo non è più visibile ed il diagramma tende sempre più nettamente ad un andamento rettilineo di quasi esatta proporzionalità al numero di giri al minuto.

L'applicazione dell'ugello divergente invece abbassa tutto il diagramma delle spinte senza alterarne l'andamento.

Da questa trasformazione delle curve delle spinte nasce la conseguenza che se il motore funziona a velocità prossima ad una

critica la restrizione della sezione di efflusso è nociva (ad es. intorno ai 1000 giri passando da 17 a 2,3 cm² la spinta si dimezza), mentre se il motore funziona a velocità molto superiori alla critica la restrizione agisce favorevolmente (ad es. intorno ai 2500 giri passando ancora da 17 a 2,3 cm² la spinta si triplica).

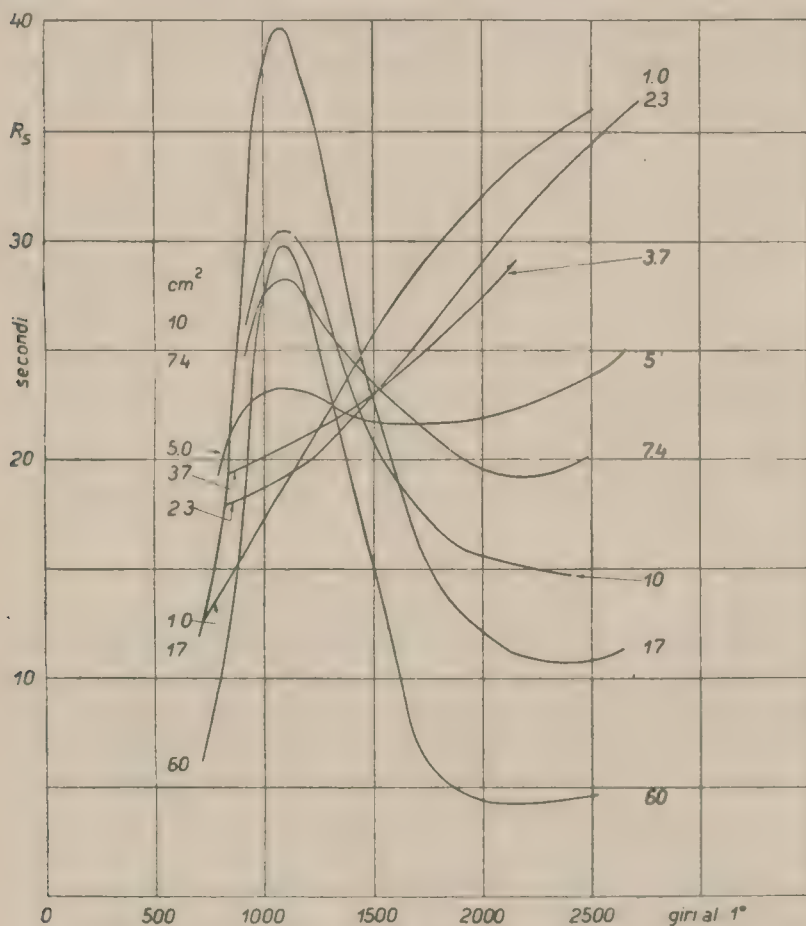


Fig. 10.

La cosa risulta ancora più evidente dalle curve della fig. 11, che hanno per ascisse le aree di efflusso e per ordinate o le R_5 (curve segnate a linea continua) o le p. m. e. (curve segnate a punti e tratti) o i rendimenti volumetrici η_v (curve segnate a trattini); il tutto per tre diverse velocità costanti.

Come spiegazioni del fenomeno valgono le stesse date in via ipotetica per i tubi separati. Per quanto riguarda il funzionamento

del motore si nota che le riduzioni dell'area di efflusso fino a 2,3 cm non modificano sensibilmente la p. m. e. del motore, mentre ulteriori riduzioni ne provocano una rapida caduta a tutte le velocità. Analoghi rilievi si possono fare sui diagrammi del rendimento volumetrico.

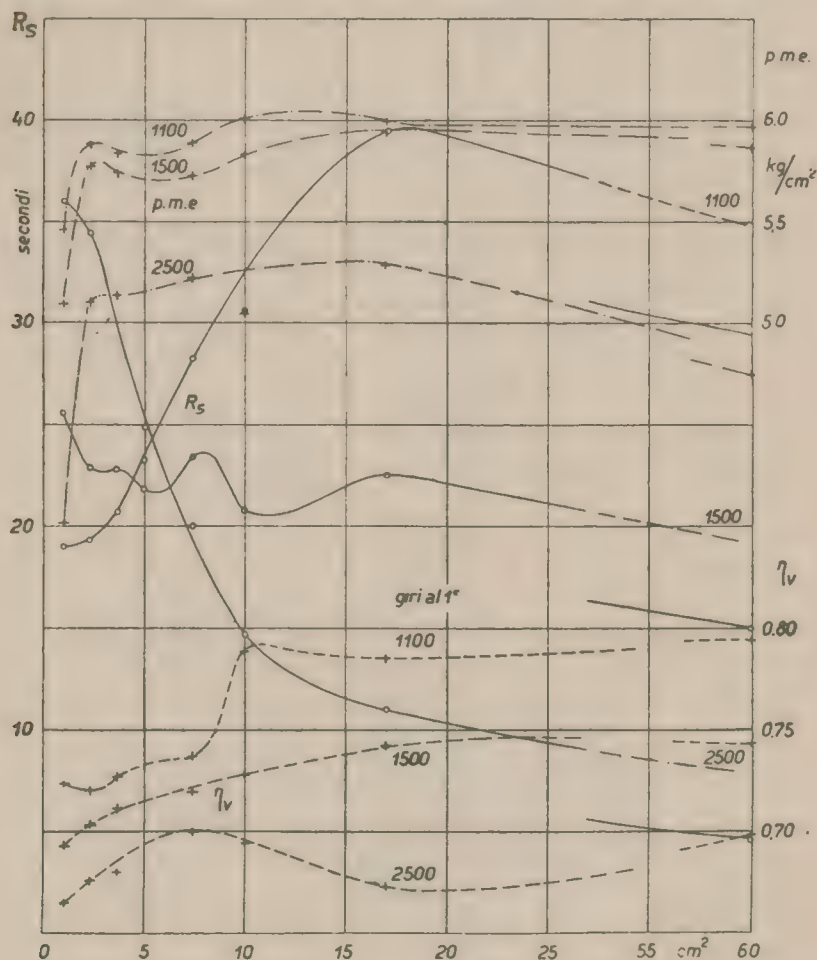


Fig. 11.

Nella fig. 12 è presentato in linea continua il diagramma delle spinte misurate su tubi muniti di ugelli convergenti fino ad una sezione ristretta di 4,2 cm² e poi variamente divergenti. La lunghezza era costante (circa 2 metri), la velocità pure costante (2400 giri).

Nella stessa figura, che ha per ascisse le aree di efflusso, è poi segnata a tratti la curva delle spinte che si ottengono colla stessa

sezione di sbocco, ma realizzata con un tubo semplicemente convergente o semplicemente divergente (secondo che l'area finale era minore o maggiore di quella del tubo).

Entrambe le curve scendono verso destra, ciò che dipende dal fatto, già messo in evidenza dalla fig. 11, che per la lunghezza



Fig. 12.

scelta, alle alte velocità la spinta si riduce allargando la sezione di efflusso. Però la curva a tratti scende più rapidamente dell'altra, e questo mostra che, a parità di sezione finale, in queste circostanze un ugello convergente-divergente di appropriata sezione minima può riuscire utile al fine dell'aumento della spinta.

Attribuendo questa azione al fatto della maggior velocità « media », che si ha nella sezione ristretta, è lecito prevedere, anche se ci mancano dati sperimentali al riguardo, che se si fosse invece considerata una velocità (come quella di 1100 giri al minuto) od

una lunghezza per cui la riduzione della sezione è dannosa in quanto modera quei fenomeni oscillatori a cui indubbiamente, sebbene in maniera non ben chiarita, è dovuta la formazione dei massimi di

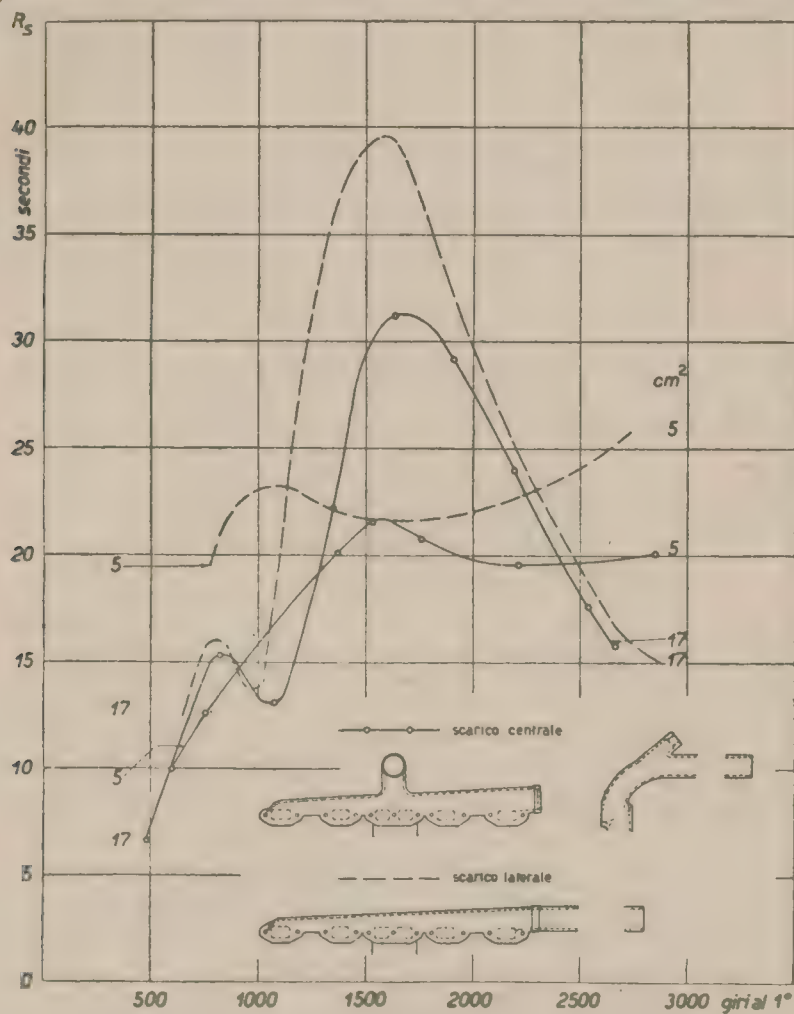


Fig. 13.

spinta, si sarebbe trovato che a parità di sezione finale la presenza di una sezione contratta a monte dello sbocco diminuisce la spinta.

Allo scopo di indagare fino a qual punto sui fenomeni oscillatori predetti influisca la posizione relativa delle varie valvole di scarico rispetto alla bocca d'efflusso del tubo collettore, si è sperimentato anche un tipo di collettore a scarico centrale, conformato come nello schizzo superiore della fig. 13.

La stessa figura presenta nelle linee continue le spinte ottenute per due diverse aree col tubo a scarico centrale e nelle linee a trattini le spinte ottenute per le stesse sezioni e le stesse lunghezze di tubo, quando lo scarico è laterale. Dal confronto si rileva che il comportamento dei due tubi è qualitativamente lo stesso: le

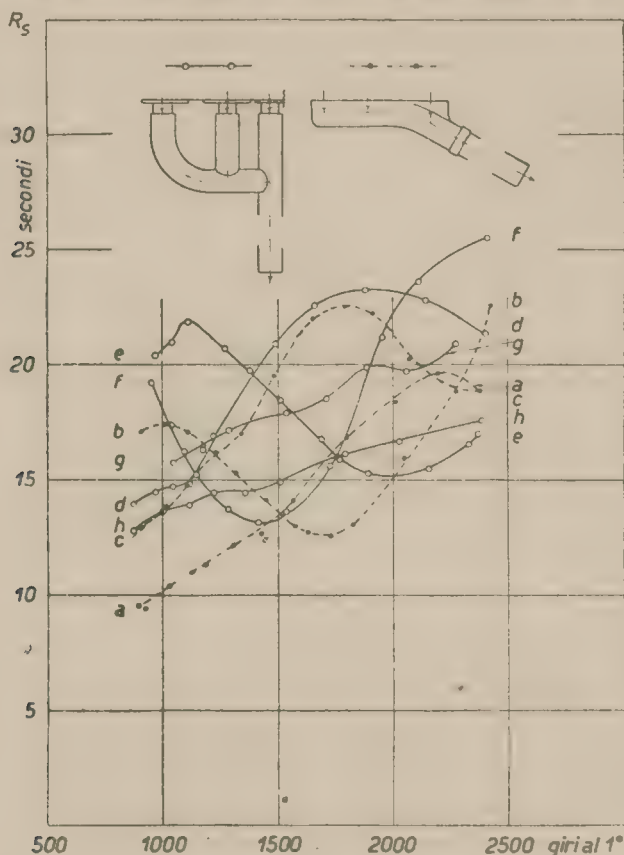


Fig. 14.

velocità critiche sono pure sensibilmente le stesse; però le spinte sono minori nel caso dello scarico centrale, specialmente quando raggiungono i valori massimi.

Si dovrebbe quindi ritenere che malgrado la maggiore simmetria di disposizione nel collettore a scarico centrale i singoli getti di gas si disturbino più che nel collettore a scarico laterale.

Si è pure sottoposto ad esperimento il caso in cui siano convogliati in un unico tubo di scarico i gas uscenti da soli tre cilindri consecutivi e quindi a cicli regolarmente sfasati, e si sono provati due tipi di collettori, schizzati nella fig. 14.

I risultati appaiono nettamente inferiori a quelli realizzati colle altre combinazioni. Del resto l'andamento delle curve si presterebbe alle stesse considerazioni fatte precedentemente per quanto riguarda l'influenza del restringimento della sezione finale e la proporzionalità inversa fra lunghezze e velocità angolari corrispondenti alle massime spinte.

Nella fig. 15 sono presentati i risultati di prove effettuate ad apertura variabile della farfalla del carburatore e quindi a carichi diversi ⁽¹⁾. I gas di scarico erano convogliati in un unico collettore a uscita laterale, di lunghezza 1,88. Sono state provate le velocità e sezioni specificate nella tabella V.

TABELLA V.

Linea	a	b	c	d	e	f
Velocità	1370	1370	1780	1790	2300	2330
Area	17	5	17	5	17	5

Le spinte, sia totali sia specifiche, diminuiscono col carico, com'era da attendersi. La riduzione della sezione di efflusso aumenta notevolmente la reazione alle alte velocità. Alle velocità minori l'aumento è pure minore: anzi alla più piccola delle tre velocità provate, si è trovato che ai carichi prossimi al massimo la spinta è maggiore colla sezione larga che colla ristretta.

È singolare l'andamento dei diagrammi delle spinte (ed in particolare quello delle linee *a* e *c*) in prossimità del carico nullo. Al disotto di $0,5 \div 1$ kg/cm² di p. m. e., strozzando ulteriormente il carburatore la spinta totale accenna a crescere nonostante la portata dei gas scaricati e la pressione iniziale dello scarico vadano diminuendo (cfr. anche la fig. 16). Il fenomeno, che si accentua ancora passando ai carichi negativi, ossia trascinando a vuoto il motore, fino a dar luogo in alcuni casi al raggiungimento di massimi di spinta totale in corrispondenza di portate addirittura

(1) Nella figura appaiono persino carichi *negativi*: la cosa era resa possibile dall'impiego del freno elettrico, capace di servire anche come motore di trascinamento del motore termico.

nulle, può esser attribuito al fatto che quando il carburatore è molto strozzato la pressione nel cilindro all'atto dell'apertura della valvola di scarico è inferiore all'esterna, e quindi anzichè scarico

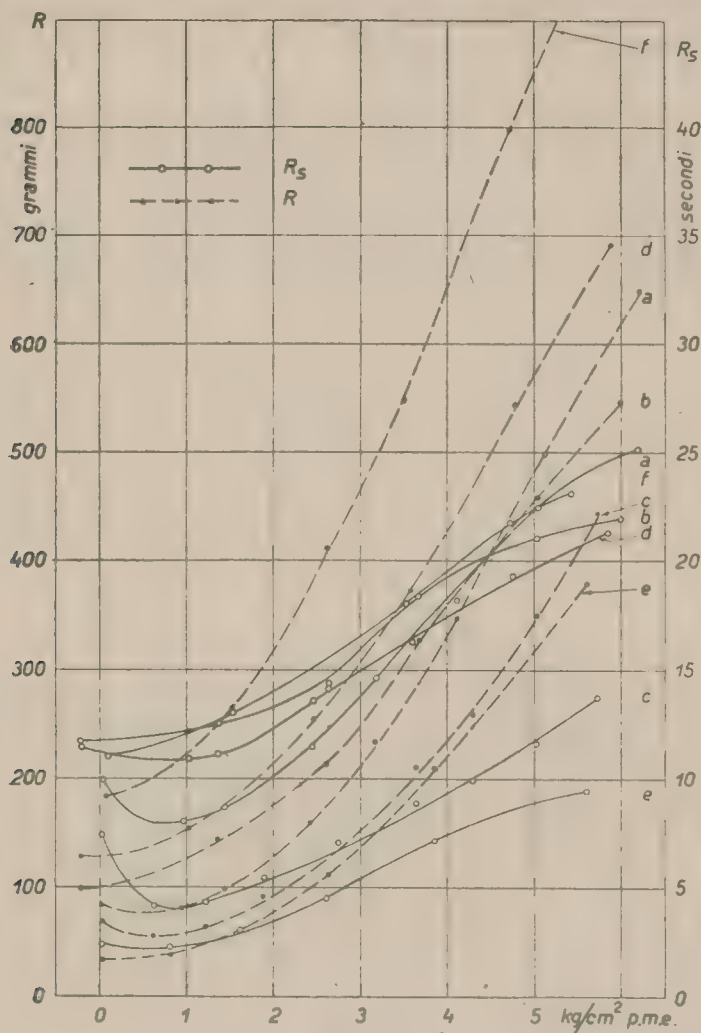


Fig. 15.

si ha afflusso di aria atmosferica nel cilindro. Successivamente quest'aria viene espulsa. Nel primo periodo è verisimile che non si abbia spinta *negativa*, potendo l'aria essere aspirata dal tubo senza che lambisca la piastra, quindi la spinta che si misura sarebbe data dall'aria che viene espulsa e questa lo è evidentemente in tanto maggiore quantità quanto maggiore era stata

la depressione che ne aveva provocato l'ingresso durante la fase che normalmente è di scarico. Naturalmente, se questa spiegazione è esatta, non è lecito in questo caso ammettere che la spinta misurata sia eguale alla reazione sul motore.

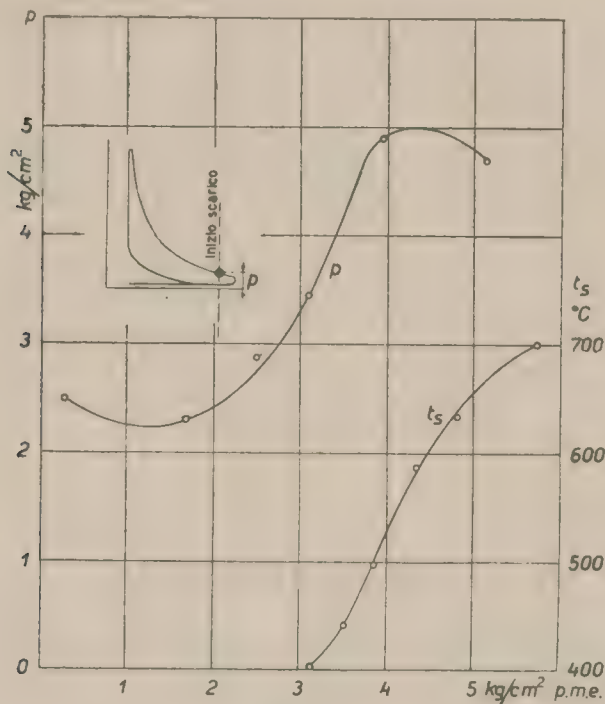


Fig. 16.

Non insistiamo più a lungo sull'argomento perchè esso esula dagli scopi della presente ricerca.

Nella fig. 16 è mostrato come variavano in seguito allo strozzamento dell'aspirazione sia le temperature medie t_s dei gas di scarico — misurate da una termocoppia ferro-costantana inserita nel collettore senza particolari artifici e quindi con qualche errore in difetto, — sia le pressioni p che i avevano nell'interno del cilindro all'atto dell'apertura della valvola di scarico, misurate coll'indicatore Farnboro.

La fig. 17 mostra le variazioni delle stesse grandezze t_s e p al variare della velocità del motore, sia nel caso in cui queste variazioni siano date dallo strozzamento dell'aspirazione (linee a trattini), sia nel caso in cui esse siano prodotte dal freno (linee continue).

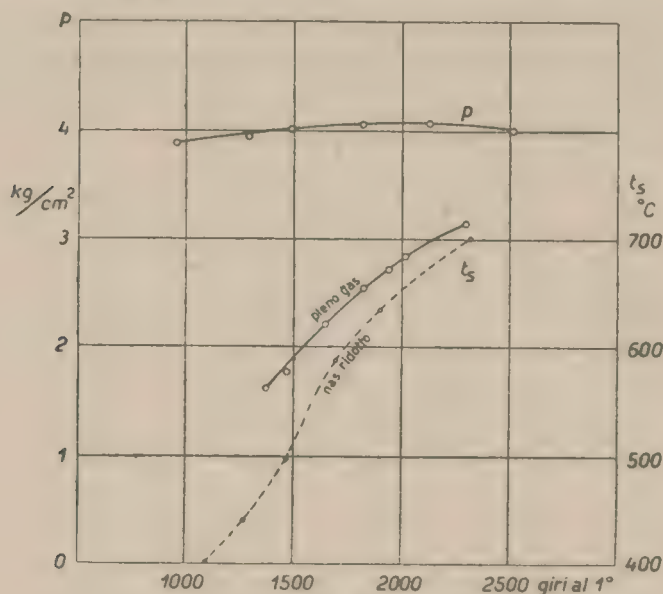


Fig. 17

5. Prove sul motore C. F. R. (cilindrata 611 cm³).

Il motore è stato leggermente modificato nel corso di queste prove per metterlo in condizioni di funzionamento più vicine a quelle dei motori normali, cambiando il carburatore, togliendo il diaframma di parzializzazione dell'aspirazione e riducendo la temperatura dell'acqua che refrigera i cilindri.

La velocità è invece rimasta quella caratteristica delle prove di determinazione del numero di ottano, ossia 900 giri al minuto.

Si è approfittato della comodità di variazione continua del rapporto di compressione e della facilità di lettura e di variazione dell'angolo di anticipo dell'accensione, per ricercare l'influenza anche di queste due grandezze sulla spinta esercitata dai gas di scarico sulla piastra.

Ma soprattutto la ricerca mirava alla conferma o meno delle influenze, emerse dalle prove sul motore Fiat 120, della lunghezza del tubo e della sezione dell'ugello di efflusso. Si sono quindi usate tubazioni di scarico di lunghezze variabili fino a circa 23 metri, aventi una sezione di area 11,4 cm², salvo che nei due brevi tronchi iniziale (area 9) e finale (area 14,7). Sono stati provati ugelli aventi un'area di efflusso 14,7; 3,8; 0,5 su tutte le lunghezze fino a 23 metri, mentre sul tubo lungo 0,83 si sono provati anche ugelli aventi aree terminali intermedie fra quelle indicate.

Per dare a queste aree un valore relativo riportiamo alcuni dati del motore:

area della sezione retta del cilindro . .	53,5 cm ²
» » » netta della valvola .	7,1 »
» » » d'uscita dalla testa .	9 »

Si sono misurati anche qui i consumi d'aria e di carburante.

Al fine poi di farsi un'idea dell'andamento dell'efflusso durante un ciclo, si è reso opaco il gas di scarico, sciogliendo nel carburante (benzina) rilevanti quantità di olio lubrificante e lo si è illuminato mediante uno « *stroborama* » sincronizzato col motore in modo che l'illuminazione avvenisse in una fase del ciclo nota e modificabile a volontà.

Il dispositivo permetteva sia l'osservazione diretta, facendo ripetere l'illuminazione periodicamente sempre nella stessa fase del ciclo, sia la fotografia, limitando l'illuminazione al lampo dato una volta tanto dalla scarica di un condensatore, provocata nell'istante voluto da un interruttore comandato dal motore. La durata dell'illuminazione in questo secondo caso era dell'ordine del milionesimo di secondo.

I risultati delle misure sono raccolti nella fig. 18, che comprende i diagrammi sia delle spinte specifiche sia dei rendimenti volumetrici, riferiti le une e gli altri alla lunghezza variabile del tubo di scarico.

L'andamento della linea piena (ugello cilindrico) è del tutto analogo a quello delle linee della fig. 6. Le 3 lunghezze « critiche » 3,0; 6,2; 12,5 metri, corrispondono a valori 4, 2, 1 del numero k della formula (6) ed al valore $w_s = 375$ m/s.

L'ordine di grandezza dei massimi di spinta è anche paragonabile a quelli della fig. 6 e la loro leggera attenuazione è giustificabile colla minor velocità angolare.

La riduzione di sezione a 3,8 cm² appiattisce anche qui il diagramma delle spinte e ne riduce i valori, tranne che per le massime lunghezze (oltre 14 m.). L'ulteriore riduzione a 0,5 cm² aggrava entrambi gli effetti, specialmente il secondo. Invece per quanto riguarda la lunghezza sembrerebbe che la forte riduzione di sezione di sbocco presenti giovamento quando le tubazioni sono cortissime.

Le linee del rendimento volumetrico non si prestano a particolari rilievi.

Nelle figure 19-22 sono presentate 4 serie di fotografie, che mostrano come si presenta il getto in fasi successive del ciclo.

Le fotografie sono numerate coll'angolo di rotazione della manovella motrice dal punto morto superiore iniziale dell'aspirazione

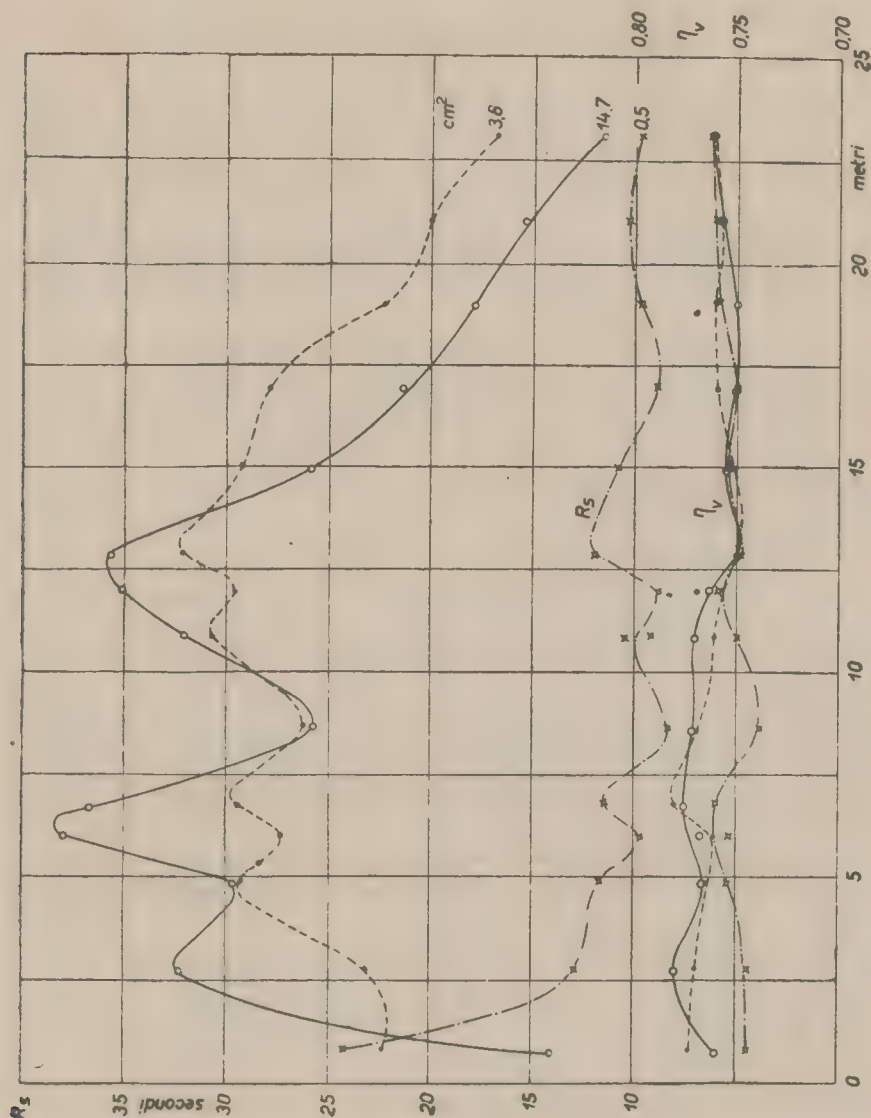


Fig. 16.

e sono ordinate a partire dall'istante di apertura della valvola di scarico, ossia da circa 480° .

Delle lunghezze di tubazione scelte, una corrisponde ad un massimo di spinta, una ad un minimo e le altre a valori intermedi.

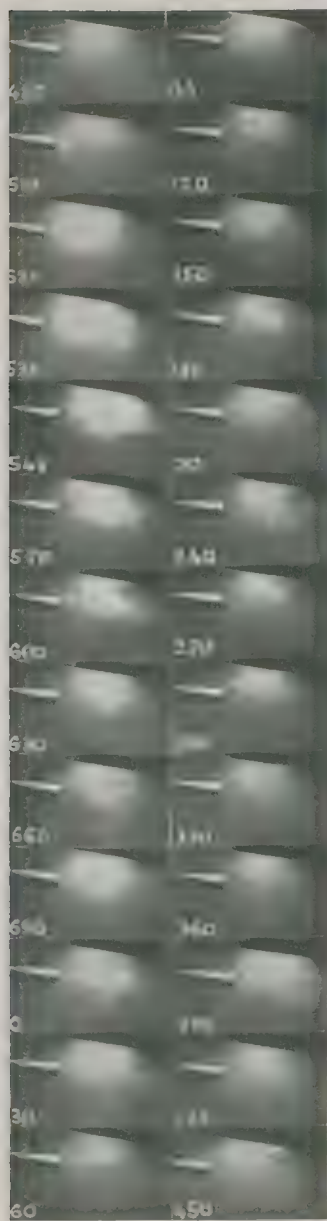


Fig. 19.
Motore C.F.R. a 900 giri/1°; $S=11,4 \text{ cm}^2$;
 $l=0,9 \text{ m}$; $R_g=14s$.

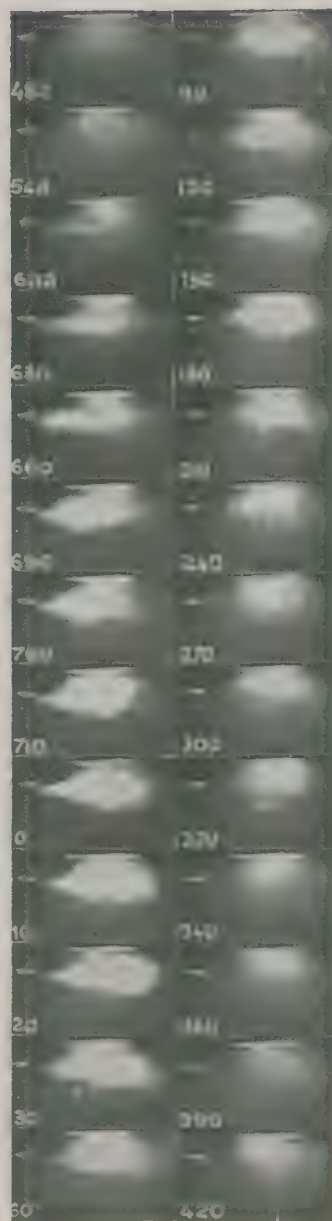


Fig. 20.
Motore C.F.R. a 900 giri/1°; $S=11,4 \text{ cm}^2$;
 $l=6,0 \text{ m}$; $R_g=38s$.



Fig. 21.

Figura 21. — Motore C.F.R. a 900 giri/1°; $S = 11,4 \text{ cm}^2$; $l = 10 \text{ m}$; $R_g = 28,5s$.

„ 22. — „ „ „ „ „ „ „ $l = 11,8 \text{ m}$; $R_g = 32s$.

„ 23. — „ „ „ „ „ „ „ $l = 0,9$ senza accensione.

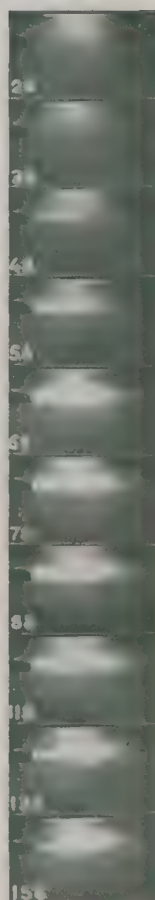


Fig. 22.



Fig. 23.

In tutti i casi, la sezione di efflusso era pari a quella della tubazione (11,4 cm²).

Dall'esame delle fotografie si rileva che il ritardo con cui il getto appare alla bocca d'uscita corrisponde al tempo necessario per percorrere il tragitto dalla valvola di scarico alla bocca con una velocità compresa fra i 160 ed i 300 m/s (cfr. tabella VI), da interpretarsi probabilmente come una celerità di propagazione dell'onda d'urto conseguente all'apertura della valvola.

TABELLA VI.

Lunghezza tubo m	0,9	6	10	11,8
Ritardo gradi	27	120	170	285
Velocità m/s	180	270	315	160

Il getto occupa fin dall'inizio la sezione d'efflusso per intero, sebbene con scarsa intensità, specie nella zona centrale; poco dopo l'inizio si nota la comparsa di una forma globosa a fronte ellissoidico ben delineato (cfr. immagini 660 della fig. 20, 697 e successive della fig. 21), la cui velocità di avanzamento è assai piccola, dell'ordine di 20 m/s. Verso la fine il getto occupa una sezione sempre minore, mantenendo invece una rilevante intensità.

La fase iniziale di efflusso si presenta con particolari singolarità nei tubi cortissimi, come mostrano le immagini 510 e 522 della fig. 24, che riproducono ingrandite le analoghe immagini della fig. 19. Nel caso dell'immagine 510, il getto ha la forma di una scorza cilindrica col bordo risvoltato all'infuori. Che le apparenze mostrate nelle due immagini citate non siano casuali, ma permanenti, è provato dalle due figure di destra della stessa fig. 24, in cui sono fotografate sovrapposte molte immagini relative a cicli successivi, in fasi press'a poco eguali a quelle delle immagini di sinistra.

Singolarità analoghe a quelle iniziali si riproducono nuovamente, benchè sotto forma assai attenuata, dopo un angolo corrispondente al tempo necessario perchè un'onda percorra due volte il tubo con celerità comprese tra i 180 ed i 270 m/s, press'a poco eguali dunque a quelle segnate nella tabella VI. È lecito pensare che si tratti di una ripercussione del fenomeno d'urto iniziale sulla colonna di gas che riempie la tubazione; la ripetizione nel caso dei tubi di 6 e di 10 metri avviene a valvola di sca-

rico già chiusa, ed invece nel caso del tubo più corto a valvola ancora aperta. Si considerino le immagini 600 della fig. 19 (ingrandita nella fig. 25 per meglio mostrarne l'analogia colla immagine 510 della fig. 24), 320 ÷ 340 della fig. 20 e 537 della fig. 21.

Nella fig. 23 è presentata una successione di fotografie del getto scaricato dal cilindro, privato dell'accensione. Il loro aspetto è affatto diverso da quello normale: non mancano tuttavia anche in questo caso forme bizzarre, come quella che è ingrandita nella fig. 26.

Conclusione.

Le massime spinte si sono ottenute usando tubazioni separate per i vari cilindri, con sezioni di efflusso eguali a quelle del tubo e lunghezze tali da determinare una specie di sintonia tra scarichi e tubazioni (formule 5, 6). In queste condizioni il rendimento volumetrico e quindi anche la potenza del motore risultano leggermente migliorati.

Sono inconvenienti di questa soluzione il grande sviluppo di tubazioni necessarie, e la forte sensibilità della spinta alle variazioni della velocità.

Al primo inconveniente sembra si possa rimediare facendo uso di un collettore comune a parecchi cilindri, ciò che, se il collettore è ben dimensionato, non riduce di molto la spinta massima.

L'uso di tubi con luci di efflusso di area molto ridotta, attenua entrambi gli inconvenienti, ma crea una contropressione al motore e quindi fa perdere di potenza, se la riduzione è spinta tanto oltre da raggiungere valori della spinta non troppo lontani da quelli disponibili coll'uso dei tubi singoli a larga sezione di efflusso.

III TEMA.

L'ELICA NAVALE

ERNESTO PIERROTTET

Scia di carena e comportamento in essa dell'elica navale.

1. — Nell'aero e nell'idrodinamica si chiama scia di carena la coda fluida limitata dalle linee di corrente che, dopo aver lambito in moto relativo la superficie di carena per tutta la porzione prodiera e di mezzo, si staccano da essa a distanza più o meno grande dalla estremità di poppa.

La parete della scia si considera come continuazione dello strato limite, cioè dello strato sottile, aderente alla carena; nel quale la legge del moto risente, in forte misura, l'influenza della viscosità del fluido.

Ammettendo che nello strato limite si verifichi il moto laminare, si deduce che la regione del distacco della scia dalla parete dell'ostacolo dipende esclusivamente dalla figura geometrica di questo, e non dal numero di Reynolds.

Tutto al più, in conseguenza della viscosità, si può lievemente modificare l'angolo del distacco, ossia l'angolo che, alla sua origine, la parete di scia forma con la parete dell'ostacolo ⁽¹⁾.

Ma il regime effettivo delle scie, che interessano la navigazione, è regime turbolento; nel quale la regione del distacco può essere notevolmente influenzata dal numero di Reynolds; e, per esso, trattandosi di uno stesso fluido, dalla velocità e dalle dimensioni della carena. La scia effettiva è quindi soggetta a modificarsi per una data carena a velocità diverse e per una stessa velocità con la grandezza della carena, pure rimanendo questa simile a se stessa. La modificazione dell'ampiezza della scia dipende essenzialmente dalla regione in cui avviene il distacco dello strato limite, poichè la corrispondente sezione della carena è sezione di origine della scia. D'altra parte, entro la scia, la pressione totale

(1) BOVASSE, *Hydrodynamique générale*, 1928

(somma della pressione statica e della dinamica) è minore che nel campo circostante ad essa, ove regna il moto a potenziale, perciò la porzione d'elica, operante in scia, è influenzata da essa, e il comportamento medio dell'elica deve variare in conseguenza dell'ampiezza della suddetta porzione.

Importerebbe dunque poter prevedere esattamente le dimensioni e la natura della scia, ciò che riesce assai difficile per l'influenza che su di essa hanno i fenomeni di turbolenza.

Esistono anzi valori critici del numero di Reynolds al disotto dei quali l'ampiezza della scia va diminuendo col crescere del numero suddetto e quindi col crescere, per una data carena, della velocità, mentre per grandi valori del numero di Reynolds succede, di regola, l'opposto.

« Date le dimensioni delle navi e la loro velocità, esse si trovano, nelle condizioni normali di esercizio, al di sopra del punto critico che corrisponde a valori di R compresi fra 10^6 e 10^7 assumendo come lunghezza caratteristica la lunghezza della carena. Si spiega così la affermazione del Baker ⁽¹⁾ secondo cui la linea di distacco dello strato limite dalla carena si sposta leggermente a proravia col crescere della velocità e della grandezza; il che avvalorerebbe la possibilità che l'ampiezza trasversale della scia cresca, anziché diminuire, con la velocità e con la grandezza.

» Questa ampiezza, che per un ostacolo cilindrico circolare è dell'ordine del diametro, diviene relativamente meno grande man mano che aumenta il rapporto tra lunghezza e larghezza; per le navi in cui tale rapporto è di regola superiore a 7, la linea di distacco dello strato limite è così arretrata verso la poppa, e le forme di carena sono così bene studiate allo scopo di trasferire tale linea il più possibile a poppavia, che l'ampiezza trasversale della scia si riduce a ben poca cosa tanto che in prima approssimazione, si può ritenere estraneo ad essa il campo di azione delle eliche, non soltanto nella propulsione multipla, ma altresì nel caso dell'elica singola, impegnata nella scia per una regione molto limitata nei dintorni del mozzo.

Da ciò si trarrebbero due conclusioni:

1° la scia ha una influenza di second'ordine sulla resistenza di carena;

2° la scia non ha apprezzabile influenza sul funzionamento dell'elica.

⁽¹⁾ G. S. BAKER, *Ship Design, Resistance and screw propulsion*, vol. I, 1933, pag. 40.

La prima proposizione è avvalorata dai risultati sperimentali che rivelano nell'attrito e nell'onda le cause principali della resistenza di carena.

La seconda proposizione contrasta invece con le nozioni pratiche le quali assegnano alla scia una influenza nel funzionamento delle eliche, in molti casi tutt'altro che trascurabile.

Questo si deve al fatto che gli architetti navali attribuiscono alla denominazione di scia un significato assai più estensivo di quello sin qui considerato, intendendo per essa ogni alterazione nel campo della corrente uniforme corrispondente al moto non perturbato *relativo alla nave*, prodotta dalla presenza della carena. Si ritiene cioè effetto della scia di carena ogni velocità indotta da essa nei punti circostanti, che ammetta una componente di senso contrario alla velocità asintotica.

Per una ulteriore estensione si ritiene che possa dirsi nulla la scia dove la velocità indotta dall'ostacolo è nulla, e negativa la scia in quei punti in cui la velocità indotta ha una componente nello stesso senso della velocità asintotica.

Questo è il significato che daremo alla scia di carena nel corso di questa relazione.

2. — Una prima approssimazione per il calcolo della scia di carena è quella permessa dalla applicazione della teoria Euleriana al moto fluido in presenza della carena.

È interessante calcolare la scia euleriana per una forma di ostacolo che richiami quella delle linee d'acqua di un bastimento.

Si consideri un cilindro circolare indefinito di raggio R investito normalmente all'asse da una corrente euleriana a velocità asintotica u_0 .

La distribuzione della velocità nel campo è rappresentata dalle note relazioni

$$(1) \quad u = u_0 \left[1 - \frac{R^2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \right] \quad v = -u_0 \frac{2R^2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

Riferito il campo ad un sistema di assi $\xi\eta$ di cui ξ coincida con x e η , parallelo ad y , sia spostato nel senso di u_0 di una lunghezza a , operiamo una trasformazione conforme secondo la legge

$$t = \zeta + \frac{r^2}{\zeta} \quad \text{con} \quad \zeta = \xi + i\eta$$

con $r < R - a$ (fig. 1).

Ne risulta una figura paragonabile ad una linea d'acqua di un bastimento. La velocità riflessa del moto trasformato risulterà

$$u' - iv' = \frac{u - iv}{\frac{dt}{d\zeta}}$$

da cui, posto

$$\theta = \operatorname{artg} \frac{\eta}{\xi} \quad \varrho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2} \quad r = \left(\varrho + \frac{r^2}{\varrho} \right) \cos \theta \quad s = \left(\varrho - \frac{r^2}{\varrho} \right) \sin \theta$$

$$m = 1 - \frac{r^2}{\varrho^2} \cos 2\theta \quad n = \frac{r^2}{\varrho^2} \sin 2\theta$$

si avrà, nel punto

$$t = r + is$$

la velocità

$$u' = \frac{mu - nv}{m^2 + n^2} \quad v' = \frac{nu + mv}{m^2 + n^2}.$$

Di queste componenti interessa soprattutto la u' .

Al suo rapporto con la velocità della corrente relativa non perturbata si dà il nome di coefficiente locale di scia:

$$\gamma = \frac{u'}{u_0} (*).$$

Per calcolarlo in corrispondenza della trasversale poppiera dell'ostacolo si ricerca il luogo dei punti che sul piano dell'ostacolo cilindrico corrispondono alla detta trasversale; si misurano le coordinate x e y di alcuni di essi opportunamente dislocati e, mediante le (1), se ne calcolano le velocità u e v ; dopo di che, valutati i corrispondenti ξ e η , si calcolano m ed n e quindi u' e γ .

Facendo $R = 100$ mm. $a =$ mm. 7,5 $r = 85$ mm.

$s = 0$	3	8	16	25 mm. si trova
$\gamma = 0$	0,60	0,80	0,88	0,92

Supponendo che la figura 1 rappresenti una nave lunga 100 m., un'elica di 5 m. di diametro risulterebbe immersa in una corrente variabile dal mozzo alla periferia nel verso stesso di avanzamento dell'elica, sicchè, mentre il mozzo risulterebbe avere, rispetto all'acqua contigua, una velocità nulla, la velocità relativa andrebbe aumentando man mano che distaccandoci dal mozzo andiamo

(*) γ risulterà $<$ d'uno per scia positiva e $>$ d'uno per scia negativa.

verso la periferia dell'elica, e l'estremità delle pale avrebbe una velocità relativa di avanzo pari all'80% di quella assoluta.

Vano sarebbe ricercare un valor medio di questa scia essendoci proposti esclusivamente di mostrare che una scia importante esisterebbe anche in fluido perfetto trattato con le ipotesi euleriane. È anche interessante notare che i caratteri di questa scia sono gli stessi di quella reale quale risulta da misure sperimentali, vale a dire che essa va aumentando rapidamente man mano che ci avviciniamo al piano di simmetria della nave nel quale sarebbe disposto l'asse di una elica singola.

3. — Quando si passi a considerare i fluidi reali interviene l'attrito il quale funziona certamente come un esaltatore della scia.

Tuttavia la sua influenza resta confinata ad uno strato di piccolissimo spessore che lascia la superficie dell'ostacolo, almeno fino a che le linee di corrente non se ne distaccano.

Questa affermazione si può dimostrare seguendo un procedimento che già servì a Rayleigh ⁽¹⁾ per dedurre, sviluppando un concetto di Lanchester, la nota relazione che dà la resistenza di attrito di una lastra piana mobile secondo la propria giacitura in un fluido viscoso, relazione che risultò poi confermata dalla applicazione delle equazioni dello strato limite di Prandtl.

È noto che un piano indefinito che parte dal riposo con una velocità u_0 secondo la propria giacitura, in un fluido viscoso, induce nelle particelle fluide che si trovano nel piano parallelo a distanza z , una velocità che al tempo t ha raggiunto il valore

$$u = u_0 \left[1 - E_2 \left(\frac{1}{2} z \sqrt{\frac{\rho}{\eta t}} \right) \right]$$

dove E_2 è la nota funzione degli errori.

Quando la lastra non è indefinita nel senso del moto si ritiene che l'effetto sul fluido, a distanza z dalla lastra, e a distanza x dalla prora, sia quello stesso che la lastra indefinita avrebbe pro-

dotto su tutto il piano distante z da essa dopo il tempo $t = \frac{x}{u_0}$.

Essendo per l'acqua

$$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\rho}{\eta}} = 504$$

⁽¹⁾ H. BOUASSE, *Hydrodynamique générale* (1928), § 128-163.

se poniamo $x = 100$ e $u_0 = 1$ m/sec. si avrebbe

$$E_2\left(\frac{1}{2}z\sqrt{\frac{\rho}{\eta t}}\right) = E_2(50z).$$

Per $z = m. 0,04$ si avrebbe

$$E_2(50z) = 0,995$$

e quindi, per il solo attrito una velocità pari a

$$0,005 u_0 = m./sec 0,005.$$

Il fluido sarebbe già praticamente fermo a soli 4 centimetri dalla superficie di attrito.

È legittima dunque la conclusione che, almeno nel caso di attrito laminare, la scia di attrito non ha influenza alcuna sul funzionamento dell'elica in propulsione in quanto interesserebbe parte della regione del mozzo nell'elica singola e nessuna parte dell'elica nella propulsione doppia o quadrupla.

Nel caso di attrito turbolento questa insensibilità degli strati liquidi discosti anche di poco dalla parete che produce l'attrito è da ritenersi ancora maggiore, almeno agli effetti della creazione della componente di velocità nella scia secondo la direzione e il verso del moto dell'ostacolo. La turbolenza produrrà certamente una agitazione maggiore dell'acqua nei dintorni della superficie di attrito ma, limitandoci a considerare gli effetti del solo attrito, risulterà meno deciso il convogliamento dell'acqua al seguito dell'ostacolo.

Agli effetti che interessano l'elica sembra quindi lecito ritenere che l'attrito abbia una scarsissima influenza sulla conformazione e sull'entità della scia in cui l'elica si troverà a lavorare.

La scia sarebbe cioè più un prodotto della distribuzione delle pressioni sulla superficie in moto che non di trascinamento di attrito. L'effetto di quest'ultimo sarebbe quindi di second'ordine rispetto al primo e, se non fosse la notevole diversità nella turbolenza della scia, non sarebbe del tutto infondata la misura della scia con esperienze di autopropulsione sui modelli, sebbene l'attrito di questi ultimi risulti comparativamente maggiore di quello delle navi in vera grandezza.

4. — Un'altra causa che può contribuire alla scia di carena, nel campo dell'elica, consiste nella formazione ondosa trasversale poppiera, che accompagna la carena nel suo moto.

Questa onda trasversale ha una lunghezza $l = \frac{2\pi}{g} V^2$, un periodo $T = \frac{2\pi}{g} V$, una velocità angolare orbitale $\omega = \frac{g}{V}$, una altezza h , decrescente con la profondità Z , secondo la relazione

$$h = H e^{-\frac{g}{V^2} Z}$$

La velocità lineare orbitale risulta dunque

$$v = \frac{1}{2} \omega h = \frac{1}{2} \frac{gH}{V} e^{-\frac{g}{V^2} Z}.$$

È nel senso del moto del bastimento sulla cresta dell'onda, in senso contrario nel cavo.

Quanto a grandezza, supposto $H = 1$ m. $V = 18$ m/sec. e $Z = 3$ m., risulta $v =$ m/sec. 0,25 circa.

Per solo effetto di onda si avrebbe, nel caso considerato, un coefficiente di scia pari a

$$\frac{18 - 0,25}{18} = 0,987$$

indice di una debolissima scia.

Se non quindi nullo, come per l'attrito, l'effetto dell'onda sulla scia, nei riguardi dell'elica, deve considerarsi di secondaria importanza rispetto a quello della distribuzione di pressioni sulla superficie in moto.

5. — Con esperienze di autopropulsione si misura il valore efficace della scia, ossia la velocità media della sua componente nel verso del moto dell'ostacolo.

È interessante osservare che non si tratta di una media matematica bensì di una media meccanica, fatta dall'elica, e, dipendente quindi dalla forma di questa.

Modificando la forma, modificando cioè, a parità di area, il contorno della superficie propellente, si viene a profittare più o meno della velocità di scia, e la media risulterebbe necessariamente differente.

La misurazione della scia media così intesa è legata oltre che a una esperienza di autopropulsione, ad una serie di esperienze sull'elica isolata.

Con la prima si determina la spinta e il numero di giri dell'elica nel regime di funzionamento al quale essa produce la propulsione alla velocità V ; con la seconda si determina la velocità U a cui, con lo stesso numero di giri, l'elica isolata fornisce la medesima spinta.

Ripetendo un tale complesso di esperienze per diverse velocità di propulsione si può costruire, per una data carena, una curva di spinte di elica in propulsione su ascisse rappresentative di numeri di giri, quotata con valori di V e una serie di diagrammi di spinta di elica isolata al variare del numero di giri, caratterizzato ciascuno con un valore di U .

I rapporti U/V relativi ai punti comuni tra il diagramma della spinta in propulsione e quelli della spinta di elica isolata ci danno il valore del coefficiente di scia al variare di V .

Una serie di calcoli di tal fatta è stata eseguita per 3 carene di cui avemmo i risultati sperimentali dalla cortesia della Vasca di Roma.

La C/151-E/121 è una carena di m. 100,89 di lunghezza, m. 14,70 di larghezza, m. 6,105 di immersione, coefficiente di finezza 0,707, con una elica nel piano di simmetria, a tre pale, diam. m. 3,84, rapporto tra passo e diam. 0,86. Possediamo di essa i risultati sperimentali per velocità da 9 a 13 nodi circa, ai cui estremi corrispondono velocità relative $V : \sqrt{L}$ da 0,9 a 1,3 circa. La carena C/40-E/65 è lunga m. 120,32 larga m. 11,60, immerge m. 3,34 ha un coefficiente di finezza 0,46; ha due eliche a tre pale di m. 3,20 di diametro, rapporto tra passo e diametro 1,00.

Possediamo di essa i risultati sperimentali da 27 a 37 nodi a cui corrispondono velocità relative $V : \sqrt{L}$ da 2,45 a 3,35.

La carena C/153-E/124 è lunga m. 25,25, larga m. 4,28, immerge a poppa m. 1,48, ha un coefficiente di finezza 0,50. È propulsa da due eliche di m. 1,10 di diam., rapporto tra passo e diam. 0,91.

Abbiamo i risultati sperimentali di questo complesso per velocità da 10 a 14 nodi corrispondenti ad una velocità relativa $V : \sqrt{L}$ pari a 2 e 2,80 circa.

Si riportano le figure 2, 3, 4 nelle quali risultano gli elementi sperimentali da cui si traggono le seguenti conclusioni:

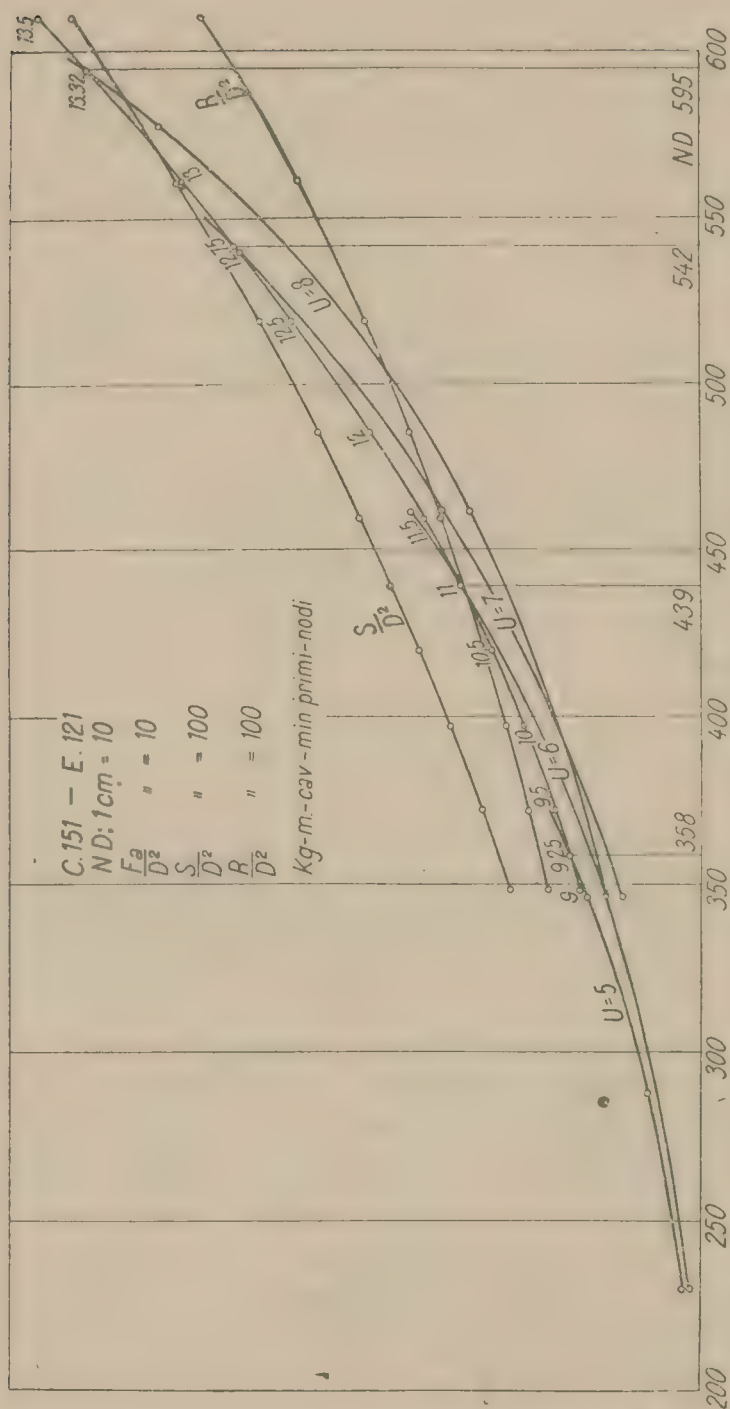


Fig. 2.

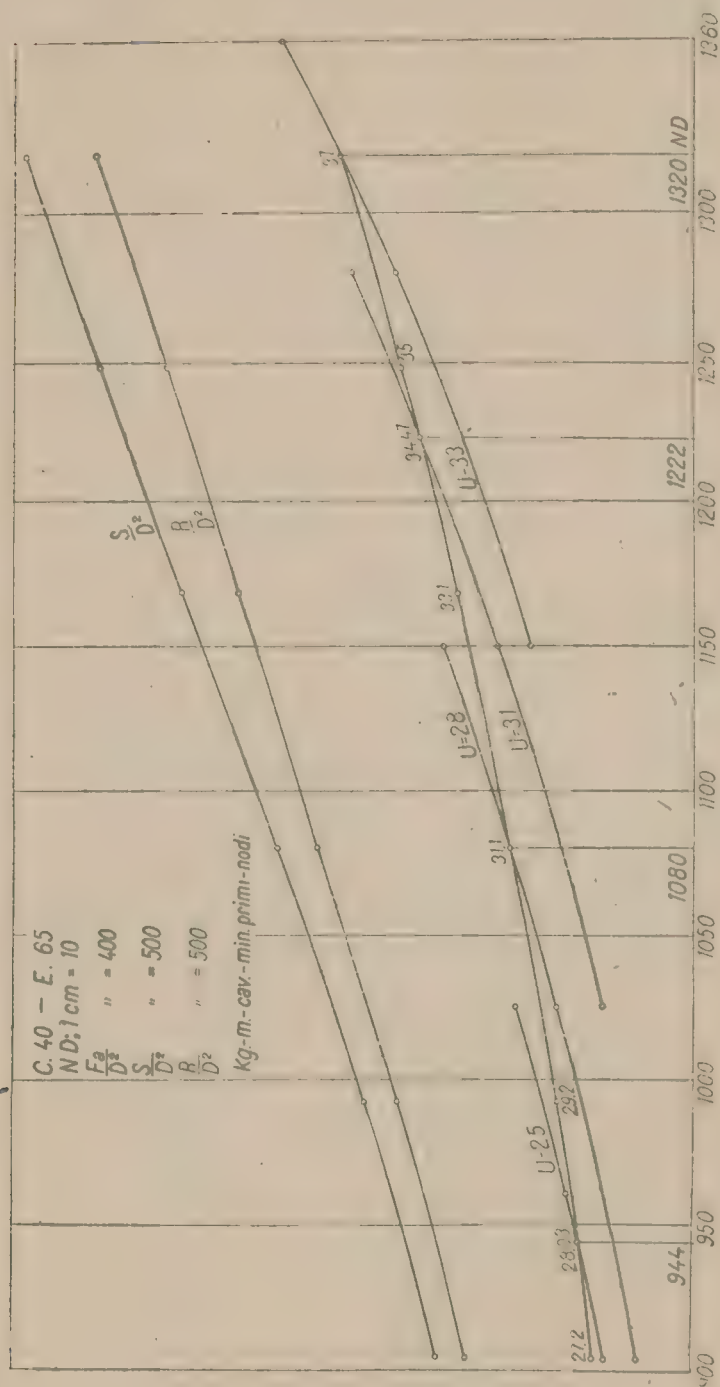


Fig. 3.

Nella carena C/151-E/121 la scia media è legata alla velocità assoluta del complesso con i seguenti valori del relativo coefficiente:

$V = \text{nodi}$	9,25	$\gamma = 0,540$
	11	0,545
	12,75	0,550
	13,32	0,600

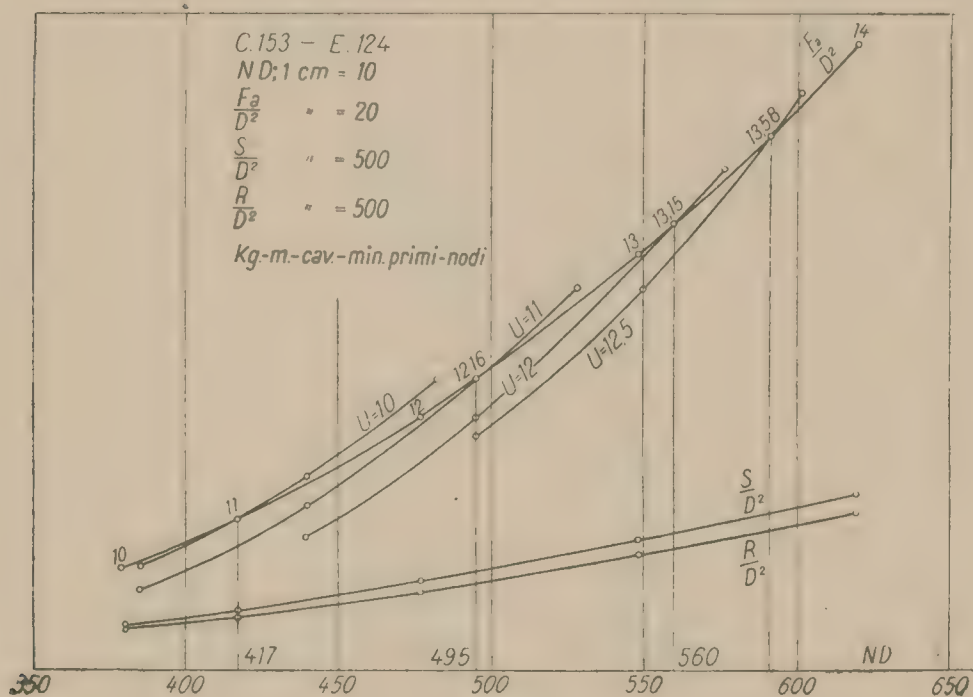


Fig. 4.

Nella carena C/40-E/65 l'analoga corrispondenza è:

$V = \text{nodi}$	28,2	$\gamma = 0,890$
	31,1	0,900
	33,73	0,900
	37	0,890

Nella carena C/153-E/124 si ha:

$V = \text{nodi}$	11,04	$\gamma = 0,905$
	12,16	0,905
	13,07	0,912
	13,60	0,920

Vi è un solo punto, quello relativo alla carena C/40-E/65 per $V = 37$ nodi, che scarta lievemente dalla legge, abbastanza chiaramente individuata dal complesso degli altri, secondo cui una chiara tendenza all'aumento del coefficiente di scia si avrebbe con il crescere della velocità.

Ciò significa che il moto della carena fa risentire sempre meno, al crescere della velocità, la sua influenza sul moto dell'acqua circostante, tanto che, per velocità abbastanza grandi, un apprezzabile effetto di trascinamento dell'acqua da parte della carena, sia per effetto di pressione in moto, sia per effetto di attrito, resti confinato in un campo così ristretto attorno alla carena, da non interessare menomamente quello nel quale le eliche si trovano a funzionare.

A tutta prima potrebbe sembrare questa una affermazione paradossale.

Ma non è forse fisicamente rigettabile l'ipotesi che da una determinata velocità in su, prima ancora di una vera e propria cavitazione, tra strato e strato di acqua, si abbia una rottura tangenziale, con uno scorrimento non del tipo di quello che siamo usi a considerare nell'idrodinamica e nella teoria dell'elasticità e che si risolve, in sostanza, in un mutamento di angoli, ma del tipo di quello che si ha tra due solidi distinti a contatto e che, in tal caso, suole essere fonte di attrito. Questo scorrimento lineare risulterebbe facilitato da un velo di molecole che tra i due strati assumerebbero un moto rotatorio intorno a se stesse fungendo analogamente a rulli o a sfere interposte tra due superficie solide.

La turbolenza della scia che cresce al crescere della velocità aiuterebbe la rottura tangenziale di cui si è formulata l'ipotesi.

Il punto che scarta potrebbe essere considerato o come affetto da errori sperimentali oppure come determinato da una perturbazione di cui non sono state individuate le cause.

6. — Le esperienze su navi in vera grandezza concordano nel mostrare che la scia di carena, come è utilizzata dall'elica, muore più rapidamente che non nei modelli al distaccarsi dalla superficie di carena in senso trasversale e in senso longitudinale.

Si hanno infatti, a parità di forma, coefficienti di scia più prossimi all'unità per le navi che non per i modelli.

Più che all'attrito, comparativamente maggiore nel modello che nella nave, il fenomeno è forse dovuto alla maggior turbolenza della scia per il valore molto maggiore del numero di Reynolds, maggior turbolenza che aiuta gli strati più discosti dalla parete

a svincolarsi maggiormente dal moto degli strati contigui e più prossimi alla parete stessa.

Ma a parte il valore del coefficiente di scia, interessa qui indagare se si possa trarre dalle esperienze sulle carene in vera grandezza conferma o meno circa la presunta legge di crescita del coefficiente di scia al crescere della velocità.

Stando ai classici testi di Architettura Navale si dovrebbe concludere per una trascurabile influenza della velocità.

Peabody ⁽¹⁾ del Massachusetts Institute of Technology pur dichiarando che nuovi dati più precisi sarebbero desiderabili, dà per il coefficiente di scia

$$\gamma = 0,90 - \frac{1}{2} (\varphi - 0,55)$$

$$\gamma = 0,80 - \frac{1}{2} (\varphi - 0,55)$$

a seconda che si tratti di propulsione doppia o singola, facendo dipendere il coefficiente di scia esclusivamente dal coefficiente di finezza totale di carena φ .

Nel Doyère ⁽²⁾ si trova una formula analoga alla precedente e la solita affermazione che il coefficiente di scia è una funzione crescente del coefficiente di finezza di carena. Vi si trova però segnalato che il sig. M. Poncet indica che i coefficienti di scia valutati con tali formule non sono applicabili se non alle basse velocità, avvicinandosi al valore 1 per le velocità forti.

D. W. Taylor ⁽³⁾ sembra smentire questa circostanza quando, nel suo *Speed and Power of Ships*, a conclusione di una serie di esperienze, dichiara che variazioni di velocità portano leggere modificazioni nella scia, tanto da potersi considerare trascurabili, e che quanto al valor medio si può valutare la scia mediante una formula che si risolve in

$$\gamma = 1,20 - 0,55 \varphi$$

per eliche laterali e

$$\gamma = 1,05 - 0,50 \varphi$$

per un'elica centrale.

⁽¹⁾ PEABODY, *Naval Architecture* (1904), pag. 469.

⁽²⁾ CH. DOYÈRE, *Théorie du Navire* (1927), pag. 583.

⁽³⁾ TAYLOR, *Speed and Power of Ships* (1933), pag. 115.

Si tratta di elementi per il calcolo pratico della scia media, ma nulla essi consentono di dire di ciò che interessa la natura della scia.

Qualche cosa di più ci consentirà di dire, invece, l'indagine che ora faremo sui risultati delle prove di navi in vera grandezza.

A queste indagini ha dedicato la sua attenzione per primo, credo, D. W. Taylor della Vasca di Washington ⁽¹⁾.

In un suo lavoro del 1925 il Taylor ci dà intanto una consolante notizia: presi in esame i risultati sperimentali sui quali è stato proposto di basare il progetto delle eliche da parte di Froude, Schaffran, Durand e Taylor trovò che praticamente tali risultati si equivalgono.

Osserva poi il Taylor che nella propulsione si debbono considerare: il regresso apparente, facilmente determinabile, nota che sia la velocità V del bastimento rispetto alla terra, il numero di giri N dell'elica e il suo passo P , con la relazione

$$\epsilon_a = 1 - \frac{NP}{V};$$

e il regresso vero dato dalla medesima formula in cui si sostituisca alla velocità della nave la velocità di avanzamento dell'elica relativa all'ambiente fluido nel quale essa si trova ad operare.

Questa velocità è legata alla velocità della nave dalla relazione

$$U = \gamma V$$

dove γ è il coefficiente di scia.

Fusi insieme i risultati dei vari sperimentatori su richiamati, il Taylor propone, per un'elica di diametro D , che riceva, in propulsione, una potenza F_a , la relazione:

$$(2) \quad F_a = C_F \left(\frac{PN}{1000} \right)^3 \frac{D^3}{P(1 - \epsilon)}$$

In essa C_F , che risulterebbe poco variabile con il regresso, almeno sino a che il valore di questo non sia inferiore a 0,20, è dato in una tabella in funzione del rapporto tra passo e diametro per eliche di determinati tipi; in essa dovrebbe introdursi per ϵ il regresso vero

$$\epsilon = 1 - \frac{U}{PN}.$$

⁽¹⁾ TAYLOR, *Transactions of the Institution of Naval Architects*, 1925, pag. 66.

Si vede subito che, noto il passo P e il diametro D , rilevati in propulsione N ed F_a , risulterebbe calcolabile ε e quindi U : il rapporto U/V ci darebbe γ .

Veramente, osserva sempre il Taylor, formule come la (2) danno il regresso attraverso il valore di $1 - \varepsilon$, sicchè, ammesso un errore del 10% nella valutazione di questa differenza la cui grandezza è circa tripla di quella dell'elemento cercato ε , questo risulterà errato di circa il 30%. Il Taylor supera la difficoltà trasformando la (2) col sostituirvi a $1 - \varepsilon$ l'equivalente espressione U/NP ricavando

$$\gamma = \frac{1000 F_a V}{C_F D^3 P^3 \left(\frac{N}{100} \right)^4}$$

formula che, pur essendo formalmente diversa dalla (2), pur essendo forse più di quest'ultima atta a dare più approssimati valori di U , è pur sempre sostanzialmente la stessa cosa.

È opportuno quindi analizzare la (2) per vederne i fondamenti, non documentati nella memoria del Taylor.

Deve intanto ritenersi che, sotto un certo aspetto, la (2) traduca la legge di similitudine meccanica delle eliche.

Difatti, tale legge afferma la proporzionalità della potenza resa dall'elica al prodotto $D^2 U^3$ a parità di regresso; sicchè potrà scriversi, detto η il rendimento dell'elica, al variare del regresso,

$$(3) \quad \eta F_a = k D^2 U^3 f(\varepsilon)$$

con k costante, ed $f(\varepsilon)$ una opportuna funzione del regresso determinabile sperimentalmente.

Valendoci della relazione

$$(4) \quad U = (1 - \varepsilon) NP$$

la (3) si trasforma facilmente in

$$F_a = k \left(\frac{PN}{1000} \right)^3 \frac{D^3}{P\eta} (1 - \varepsilon)^3 f(\varepsilon)$$

da cui si deduce che, per l'accordo con la (2), dovrebbe essere

$$\eta = \frac{(1 - \varepsilon)^4}{f(\varepsilon)}$$

Ma le esperienze di Froude, che il Taylor stesso riconosce essere in accordo nei risultati con quelle di altri eminenti sperimentatori, determinano la $f(\varepsilon)$ in

$$f(\varepsilon) = \frac{\varepsilon(1 - 0,08\varepsilon)}{(1 - \varepsilon)^2};$$

quindi si dedurrebbe

$$\eta = k'\varepsilon(1 - \varepsilon)^2(1 - 0,08\varepsilon)$$

con k' costante.

È facile vedere come una tale relazione porterebbe a dover ammettere per il rendimento dell'elica una variabilità, al variare

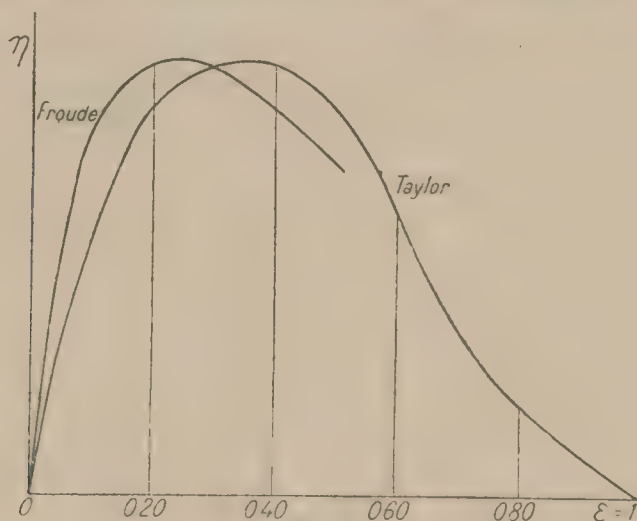


Fig. 5.

del regresso, non troppo conforme a quella che siamo abituati a riconoscergli.

La figura 5 mette a raffronto una curva usuale di rendimenti in funzione del regresso con quella che risulterebbe dalle proposte del Taylor, a parità di rendimento massimo.

Le differenze sono abbastanza sensibili perchè si possa dubitare che l'applicazione della (2) o di formule da essa derivate, dia qualche cosa di più che una grossolana valutazione del fenomeno di istudio.

Occorre quindi affinare gli strumenti.

Evidenti trasformazioni consentono di scrivere la (2) sotto la forma più generale

$$(5) \quad F_a = kD^5 \left(\frac{N}{100} \right)^3 \frac{f(\varepsilon)}{\eta}$$

in cui, come si è visto, per l'accordo con i risultati sperimentali di Froude, deve essere

$$f(\varepsilon) = \varepsilon (1 - \varepsilon) (1 - 0,08\varepsilon).$$

Supposto di conoscere il regresso vero per un dato valore della velocità, risulterà pure noto dalle tabelle di Froude il rendimento

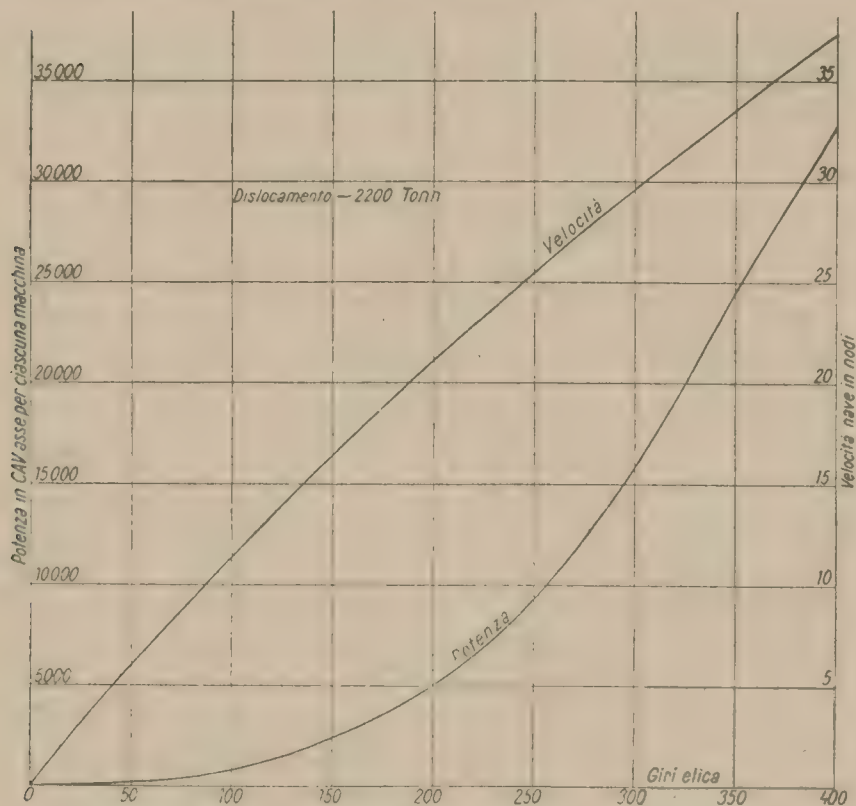


Fig. 6.

dell'elica e si potrà quindi ricavare, in un caso concreto, il valore appropriato, a quel caso, della costante k .

Dopo di che, fissata una velocità V qualsivoglia, e rilevati la potenza motrice e il numero dei giri corrispondenti, si calcola $f(\varepsilon) : \eta$ e, quindi ε e U mediante la (4).

Nel quoziente $U : V$ avremo il cercato coefficiente di scia alla velocità V .

Queste operazioni si sono eseguite per una nave militare del dislocamento di circa 2.200 tonnellate capace della velocità massima di 37 nodi (fig. 6).

Essendo m. 3,75 il passo geometrico dell'elica e valutando, come sembra accertato in generale, il passo effettivo o idrodinamico in propulsione in $1,05 \times 3,75 = 3,95$; essendo 3,35 il diametro delle due eliche, e quindi circa 1,2 il rapporto tra passo e diametro, risulta, dalle tabelle froudiane, per $\Phi = 0,7$, la seguente corrispondenza tra regressi veri e rendimenti di elica:

= 0,10	0,20	0,30	0,40	0,50
= 0,55	0,60	0,63	0,55	0,45

Questi rendimenti sono inferiori di 5/100 a quelli tabulari per tener conto, sia della non uniformità della scia, sia della non specularità delle superficie dell'elica.

Una volta per tutte è opportuno calcolare i valori di

$$\frac{\varepsilon(1 - \varepsilon)(1 - 0,08\varepsilon)}{\eta} = f(\varepsilon, \eta)$$

Risulta:

$\varepsilon = 0,10$	0,12	0,14	0,16	0,18	0,20	0,22
$f(\varepsilon, \eta) = 0,153$	0,179	0,196	0,212	0,228	0,244	0,257
$\varepsilon = 0,24$	0,26	0,28	0,30	0,32	0,34	0,36
$f(\varepsilon, \eta) = 0,272$	0,289	0,310	0,325	0,345	0,363	0,382
$\varepsilon = 0,38$	0,40	0,42	0,44	0,46	0,48	0,50
$f(\varepsilon, \eta) = 0,402$	0,421	0,443	0,474	0,486	0,509	0,532

Si sappia che alla velocità di 15 nodi il coefficiente di scia ammonta a 0,80. Risulterà quindi $U = 0,80 \times 15 = 12,00$.

D'altra parte le prove progressive indicano, per la velocità di 15 nodi, la potenza di cav. 1.800 per ogni elica al numero di giri di 136,5.

La (4) ci dà quindi il regresso vero a 15 nodi, $\varepsilon = 0,314$, cui corrisponde un $f(\varepsilon, \eta)$ pari a 0,339. Questi elementi, introdotti nella (5) ci forniscono il valore della costante k appropriata al caso in istudio. Si trova $k = 5,648$.

Dopo di che la (5) stessa, in cui si assuma come incognita $f(\varepsilon, \eta)$, in associazione con la tabella dei valori di questa funzione al variare di ε , ci permette di ricavare i valori dei regressi veri corrispondenti ad una serie di valori della velocità assoluta e quindi la corrispondente serie di valori della velocità relativa.

I rapporti tra i termini delle coppie di valori corrispondenti delle velocità relativa ed assoluta ci danno i coefficienti di scia.

I conti sono stati fatti per velocità crescenti di due in due nodi da 15 nodi a 37 ottenendo i seguenti risultati:

$V = 15$	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37
$U = 12$	14	16	19	21	23	26	28	31	33	36	40

Da queste esperienze e da questi calcoli il fenomeno della crescita del coefficiente di scia al crescere della velocità è chiaramente espresso.

Alquanto sconcertante potrebbe sembrare il fatto che per le velocità altissime la scia diverrebbe negativa ($\gamma > 1$), cioè l'acqua avrebbe una velocità assoluta media, nel campo dell'elica, diretta in senso contrario a quello di avanzamento della carena.

Questa indicazione sparirebbe qualora noi ammettessimo, per la velocità di 15 nodi, una scia più marcata di quella che abbiamo assunto in ipotesi. Ma la cosa potrebbe spiegarsi anche diversamente.

Introduciamo nel campo una velocità eguale e contraria a quella di avanzamento della carena, con che questa si arresta e il fluido la investe con velocità asintotica u_0 .

Riprendiamo in considerazione l'ostacolo di cui al paragrafo 2.

La velocità del fluido nel lambirne la superficie varia da 0, al traverso del punto A sulla prora, a u_0 al traverso del punto B (fig. 1) a $1,25 u_0$, raggiungendo un massimo, al traverso del punto C ; ancora a u_0 al traverso del punto D , per ritornare a 0 al traverso del punto E sulla poppa.

Se ripristiniamo il moto della carena, arrestando il fluido all'infinito, troviamo tra A e B una scia positiva, cioè diretta nello stesso verso della carena; tra B e D una scia negativa cioè diretta in senso contrario alla carena; tra D ed E ritroviamo una scia positiva.

La posizione dell'elica è generalmente tra D ed E e quindi beneficia di una scia positiva; ma se immaginiamo che alle alte velocità una fascia d'acqua circostante alla carena e di limitato spessore, tanto da non interessare le eliche, venga trascinata dalla carena stessa e si prolunghi a poppavia della carena, virtualmente allungandola, non è improbabile che a ciò consegua uno spostamento verso poppa della zona BD di scia negativa tanto da far cadere in essa le eliche sebbene poste piuttosto vicine alla perpendicolare poppiera.

7. — Se la carena crea all'elica un ambiente diverso da quello in cui si sperimentano le eliche e ne modifica quindi le caratteristiche di funzionamento, non è men vero che l'elica crea alla

carena un ambiente diverso da quello in cui si trova quando si fanno le esperienze di rimorchio, e ne modifica la resistenza.

Ove si consideri schematicamente l'elica come un disco atto a creare e mantenere una discontinuità di pressione nel fluido, occorrerebbe che la discontinuità fosse costituita esclusivamente da un incremento della pressione facciale perchè il funzionamento dell'elica, disposta all'estrema poppa, lasciasse inalterata la resistenza della carena quale si presenta al rimorchio.

Ma il salto di pressione si manifesta, come è noto, con un incremento facciale e con una diminuzione dorsale, e non è detto che quest'ultima sia meno importante della prima.

Questa depressione dorsale contribuisce efficacemente a distruggere quella controresistenza poppiara, già abbondantemente ridotta dalla viscosità, che in fluido perfetto annulla la resistenza di carena. Altre cause concomitanti, come la turbolenza della scia, la depressione del livello libero ecc., possono concorrere all'aumento di resistenza, ma tutte concorrono nello stesso modo, cioè con la distruzione della sovrappressione poppiara euleriana.

Si tien conto di questo fenomeno imponendo la condizione che l'elica destinata alla propulsione di una carena di resistenza R sia atta a dare una spinta

$$S = \beta R$$

con β maggior d'uno, che prende il nome di coefficiente di risucchio.

Si è osservato: il coefficiente di risucchio è la misura di una perdita che si ha nella propulsione in confronto con il rimorchio; il coefficiente di scia è l'inverso della misura di un guadagno che si ha nel funzionamento dell'elica in propulsione in confronto al funzionamento dell'elica isolata. Volendo quindi valutare sinteticamente il rendimento della propulsione i due coefficienti interverranno al denominatore della relativa espressione associati per prodotto.

Ora, nelle infinite combinazioni che possono presentarsi in pratica, è molto facile che il prodotto di un numero inferiore ad 1, non troppo nè troppo poco, per un numero maggior d'uno, non troppo nè troppo poco, risulti in un grandissimo numero di casi assai prossimo all'unità.

Tanto da far dire ai pratici che questo prodotto è praticamente uno; tanto da spingere i teorici a indagare se in condizioni ideali si potesse stabilire rigorosamente che è proprio uno il valore di questo prodotto.

Mi pare una vana fatica.

Perchè la prossimità ad uno del prodotto in questione in un numero notevole di casi non può esser frutto che di semplice casualità.

Uno dei fattori misura infatti un fenomeno che risiede principalmente nella carena e rispetto al quale l'elica interviene come beneficiario con effetti perturbatori di second'ordine; l'altro fattore, il coefficiente di risucchio, misura un fenomeno la cui causa risiede fondamentalmente nell'elica, rispetto al quale la carena funge da elemento sopportatore e, se perturbatore, con effetti di second'ordine.

La effettiva indipendenza tra il coefficiente di scia e quello di risucchio è messa bene in evidenza dai risultati sperimentali.

Le stesse carene citate a paragrafo 5 hanno, per i coefficienti in esame, le seguenti associazioni:

Complesso C/151-E/121

$V = 9,25$	$\gamma = 0,540$	$\beta = 1,265$	$\gamma\beta = 0,68$
11	0,545	1,302	0,71
12,75	0,550	1,319	0,72
13,32	0,600	1,282	0,77

Complesso C/40-E/65

$V = 28,03$	$\gamma = 0,890$	$\beta = 1,112$	$\gamma\beta = 0,99$
31,1	0,900	1,101	0,99
34,47	0,900	1,125	1,01
37	0,890	1,117	0,99

Complesso C/153-E/124

$V = 11$	$\gamma = 0,905$	$\beta = 1,135$	$\gamma\beta = 1,02$
12,16	0,905	1,164	1,06
13,15	0,912	1,133	1,03
13,58	0,920	1,128	1,04

Se una indicazione si può trarre dall'esame di tali valori è questa: che un aumento del coefficiente di scia è accompagnato generalmente, non da una riduzione, ma da un aumento del coefficiente di risucchio, e che inoltre, il prodotto $\gamma\beta$ per carene monoeliche si distacca sensibilmente dall'unità.

È vero che questo distacco risulta attenuato nella propulsione in vera grandezza, ma non cessa per questo di essere valido argomento avverso alla tesi del valore unitario. Sarebbe interessante istituire una misura diretta del coefficiente di risucchio nella propulsione in vera grandezza ma ciò è meno facilmente attuabile che non per il coefficiente di scia.

Una indicazione indiretta si ha, però, attraverso il rendimento di propulsione.

Assunto a rappresentare questo elemento il quoziente tra la potenza necessaria al rimorchio e la potenza asse della macchina alla stessa velocità, si nota un progressivo decrescere del rendimento col crescere della velocità oltre certi limiti; tanto che, mentre nella marina mercantile non appaiono troppo lontani dal vero rendimenti dell'ordine di quelli delle eliche isolate, sia pur prudenzialmente valutati, nella Marina militare, e tutte le volte che si supera notevolmente la velocità economica delle carene, si trovano valori del rendimento che arrivano anche a meno dell'80% dei precedenti.

Presumibilmente questo fatto è dovuto all'affievolirsi, allo scomparire, e qualche volta forse al capovolgersi del fenomeno della scia, benefico per l'elica, senza che a ciò corrisponda una diminuzione dell'effetto di risucchio, dannoso per la carena.

8. — Ove nel progetto non si tenesse conto, o si tenesse conto imperfettamente, dell'affievolirsi o del rovesciarsi della scia la conseguente perdita di rendimento risulterebbe aggravata dal fatto che si doterebbe la carena di un'elica meno adatta, per l'errata valutazione, alle condizioni locali effettive della scia stessa.

Donde la chiara indicazione che eventuali progressi nella propulsione navale sono legati necessariamente ad una più esatta valutazione della scia del complesso carena elica. E, avuto riguardo alla diversa essenza della scia quale risulta dalle esperienze sui modelli e sulle navi in vera grandezza, è su queste ultime che necessariamente si dovrà sperimentare.

Esperienze difficili e gravose: ma abbiamo la sensazione che le esperienze con i modelli abbiano già dato quello che potevano.

E se, come già accade per la Marina Militare e come speriamo accadrà anche nella Marina Mercantile dopo la vittoria, se più di una unità debba costruirsi di un dato tipo, potrà valere la pena di sperimentare sulla vera grandezza.

Potrebbe parere, a prima vista, che il mezzo più adatto per avere elementi sicuri fosse quello di rimorchiare una carena senza

elica e misurare la velocità della scia nei punti del piano medio previsto per l'elica; ma oltre che ciò non sarebbe praticamente possibile proprio alle alte velocità a cui la conoscenza della scia ha maggiore importanza, sta il fatto del non essere i valori locali della scia quelli che interessano, bensì un valor medio; e non una media matematica, ma una media meccanica, il cui valore dipende dallo strumento misuratore che è l'elica stessa che ne beneficia. Esclusa, specialmente per le eliche laterali, la possibilità di un migliore sfruttamento della scia con l'adozione di eliche a passo radialmente variabile (ciò che richiederebbe una scia simmetrica rispetto all'asse dell'elica) le esperienze sulla vera grandezza si dovranno istituire per individuare la forma e il passo dell'elica che funzioni alla velocità massima col regresso di massimo rendimento, realizzando, in queste condizioni, un minimo per il prodotto $\gamma\beta$.

Non è detto che la risoluzione di questo problema dovrà sempre trovarsi nel campo sperimentale anche nel più lontano avvenire: ma certamente sì allo stato attuale delle nostre conoscenze.

Sotto l'aspetto della forma sarebbe sufficiente valutarne l'influenza per una superficie sviluppata ellittica, una lanceolata e un spatulata.

Per ciascuna forma, si dovrebbe sperimentare l'effetto di una variazione del passo commisurandolo una volta ad una scia media positiva ($\gamma < 1$), un'altra ad una scia nulla ($\gamma = 1$), una terza ad una scia negativa ($\gamma > 1$).

Questa è forse la via attraverso la quale potrà conseguirsi, se possibile, un progresso nella propulsione navale alle altissime velocità.

9. — Detto α un coefficiente di aumento di resistenza per le appendici di carena necessarie alla sistemazione delle eliche e k un coefficiente di alterazione del rendimento dell'elica, dovuto alla irregolarità della scia, l'espressione

$$(6) \quad \eta : \alpha\beta\gamma k$$

è assunta generalmente quale rappresentatrice del rendimento di propulsione.

È legittima questa denominazione?

Qualcuno ha ritenuto di no obbiettando, alla semplice denominazione di rendimento, che l'associazione di un debole valore

di α , quale si avrebbe nella propulsione monoelica, con un debole valore di $\beta\gamma$, quale si potrebbe ottenere con particolari artifici, con un forte valore di $\eta : k$, potrebbe, almeno teoricamente, far risultare il valore della (6) maggiore di uno. Non di un vero e proprio rendimento si tratterebbe quindi, ma di un qualche cosa di affine al quale si è proposto il nome di quasi-rendimento ⁽¹⁾.

L'introduzione di questo nome nuovo non mi sembra menomamente giustificata.

Basta invece semplicemente osservare che l'ente definito dalla (6) ha il significato di rendimento relativo; vale a dire esprime il rendimento di un sistema di propulsione in confronto con quello di un altro sistema che si usa identificare nel rimorchio.

E allora anche ammesso che il valore della (6) possa risultare in un caso concreto maggiore di uno (il che mi pare d'altra parte molto difficile che possa essere) ciò non significherebbe altro se non che il sistema di propulsione proposto è migliore del rimorchio.

Ma forse è proprio in questo che si è ravvisato una incompatibilità, derivata dal ritenere che il rendimento proprio del rimorchio sia 1.

Ma il rimorchio non è un'operazione a cui sia permesso associare il concetto di rendimento assoluto.

Le trasformazioni cui si può associare questo concetto sono solamente quelle in cui il lavoro utile è indipendente da resistenze passive, come potrebbe essere, ad esempio, il sollevamento di un peso nel campo gravitazionale, il trasporto di una massa magnetica in un campo elettrico ecc. Ma ogni qual volta il lavoro utile sia in tutto o in parte effettuato contro resistenze passive, allora non si può parlare di rendimento assoluto ma di rendimento relativo.

Così si eviterebbe di introdurre la nuova denominazione di quasi-rendimento, il che va in vantaggio della semplicità.

Naturalmente non è proprio necessario aggiungere sempre, esplicitamente, la qualifica di relativo, purchè si tenga ben presente che ad un rendimento relativo non si può sempre attribuire la funzione di determinatore della scelta tra due sistemi volti allo stesso fine. Mi richiamo, a questo proposito, a quanto ho esposto nel V Annale della Vasca Nazionale per le Esperienze di Architettura Navale in Roma ⁽²⁾.

(1) G. S. BAKER in *Symposium on propellers*, 1938, pag. 16-17.

(2) E. PIERROTTET, *Il rendimento di propulsione*.

Ad evitare sviste, tenuto in conto che la maggior parte dei rendimenti con i quali abbiamo a che fare sono rendimenti relativi, si potrebbe forse lasciare ad essi la denominazione semplice di rendimenti senz'altra qualifica, riservando la qualifica di assoluti a quei rendimenti che competono a trasformazioni nelle quali il lavoro utile è effettivamente indipendente da resistenze passive.

EMILIO CASTAGNETO

Cavitazione nelle eliche navali.

Riassunto. — Dopo un breve cenno di carattere storico viene definito il concetto di cavitazione, ed illustrato il fenomeno nelle sue principali manifestazioni: in un tubo Venturi, dietro una sfera od un cilindro, in presenza di profili alari, nelle eliche navali, mettendone in evidenza le cause e gli effetti.

Parimenti viene esaminata e discussa la legge di similitudine che governa il fenomeno e le conseguenti modalità pratiche per le ricerche di carattere sperimentale nei Tunnel di cavitazione.

Per quanto ha più particolare attinenza all'elica navale, per la quale la cavitazione è un fenomeno da evitarsi, vengono prospettati dei criteri pratici e dei criteri teorici di previsione, dedotti, quelli pratici, dai risultati sperimentali fino ad oggi acquisiti, quelli teorici dall'analisi secondo i principi dell'ala di aeroplano del comportamento di una pala d'elica e della distribuzione di pressioni e depressioni sulla stessa.

1) Cenno storico.

Il fenomeno della cavitazione si rese manifesto per la prima volta su eliche navali nel 1856 durante alcuni esperimenti eseguiti dal francese Sig. George Rennie; in essi si constatò che variando l'immersione della punta delle pale da 0 a m. 1,35 la spinta cresceva nella proporzione da uno ad otto. La vera natura del fenomeno non fu allora individuata, e l'autore della ricerca si limitò a concludere che il rendimento del propulsore aumenta coll'aumentare delle profondità.

Analoghi esperimenti furono eseguiti molto più tardi, nel 1892, dal costruttore francese J. A. Normand, con una torpediniera ormeggiata in bacino, sospendendone la poppa ad apposita gru che consentiva di variarne opportunamente l'immersione. Naturalmente Normand osservò quanto già il Rennie aveva osservato, ma di più egli mise in evidenza che la variazione della spinta non

è graduale con la variazione dei giri, ma esiste un numero di giri critico (tanto più grande quanto più grande è la immersione) oltre il quale l'accrescimento di spinta diviene rapidamente molto piccolo. Egli attribuì questo fatto al rompersi della colonna d'acqua ed alla formazione di vuoti entro di essa. -

Subito dopo il fenomeno della cavitazione apparve in tutta la sua importanza all'inizio ed alla fine del 1894, rispettivamente nelle prove del cacciatorpediniere « Daring », costruito dalla Ditta Thornycroft, che raggiunse una velocità di 24 nodi invece dei 29 previsti, ed in quelle della prima nave con turbine a vapore, la « Turbinia », costruita da Parsons che fece 20 nodi invece dei 30 previsti e dei 34 raggiunti più tardi con la stessa potenza di macchina ma con nuove eliche. Già allora apparve evidente che il fenomeno della cavitazione, nome questo suggerito da R. E. Froude, e poi sempre mantenuto, dipendeva dalla pressione totale (battente d'acqua, più pressione atmosferica), agente sul disco dell'elica ed il Parsons provvide per questo a costruire un tunnel a circolazione d'acqua chiuso e stagno, nel quale la suddetta pressione totale poteva opportunamente essere ridotta, ed il fenomeno era studiato su modelli d'elica in condizioni di funzionamento simili rispetto al vero, sia con osservazione a vista, sia con adatti dinamometri registratori.

Gli sperimentatori di questo periodo giunsero alla conclusione, non perfettamente rispondente a verità, che era necessario, per evitare la cavitazione, non oltrepassare determinati limiti della spinta per unità di area e della velocità periferica, e questa convinzione rimase praticamente viva fino a pochi anni addietro. Il Parsons nel 1910 costruì una seconda vasca di cavitazione più grande e perfezionata della prima, nella quale introdusse per la prima volta il sistema stroboscopico di osservazione e poté fotografare il fenomeno; ma si può asserire che fra il 1900 ed il 1930 vi fu una certa stasi in questi studi, i quali interessano, oltre il campo navale, anche quello delle turbine idrauliche e presentano sempre maggiore importanza per il continuo aumento delle velocità e delle potenze sviluppate, e per il manifestarsi di dannosi effetti vibratorii e di corrosione delle pale.

2) La cavitazione in un tubo « Venturi ».

Quando un ostacolo è investito da una vena liquida le linee di corrente si modificano in presenza di questo, e la velocità e conseguentemente la pressione assume nel campo circostante valori

diversi da punto a punto. Se tale pressione risultante (pressione atmosferica, più battente d'acqua, più variazione dovuta all'ostacolo) risulta in una determinata zona più bassa della tensione del vapore saturo corrispondente alla temperatura di prova, l'acqua bolle, per poi ricondensarsi quando il vapore tra-

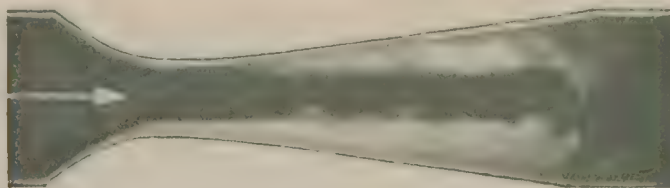


Fig. 1. — Cavitazione in un tubo Venturi.

scinato dalla corrente raggiunge una zona di pressione più elevata: tale è la definizione attuale del fenomeno della cavitazione. Al suo verificarsi non è però necessaria la presenza dell'ostacolo: basta un semplice tubo di Venturi. Per il principio di Bernouilli nella zona ristretta la velocità aumenta e la pressione diminuisce,

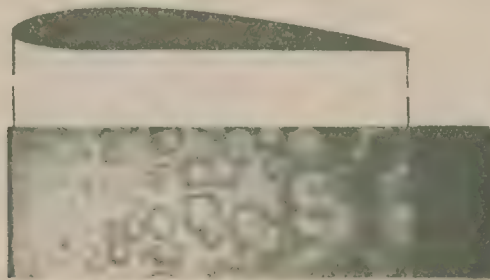


Fig. 2. — Cavitazione in un profilo alare.

e, se la variazione è sufficientemente forte, subito a valle della strozzatura si presenta la formazione di una nube di vapore che permane per un certo tratto nel tubo diffusore. Il fenomeno è facilmente osservabile e fotografabile come risulta dall'annessa fig. 1, tratta da una memoria del Dott. Föttinger ^{(1)*}. Anzi il Dott. Mueller ⁽²⁾ del Laboratorio di idro ed aerodinamica di Göttingen, riuscì, con una macchina di presa capace di 2400 esposizioni al sec., a fotografare il nascere e lo sciogliersi delle bollicine di vapore, come è dimostrato dall'annessa fig. 2.

(*) I numeri in parentesi fanno riferimento alla bibliografia riportata alla fine della memoria.

Sia da effetti vibratori ed acustici che accompagnano la cavitazione, sia da rilievi fotografici stessi, che mostrerebbero un rapido formarsi e svanire della formazione nebulosa, sembra accertato che non si tratti di un fenomeno continuo, ma vibratorio, con frequenza dell'ordine di 100 cicli al secondo.



Fig. 3. — Cavitazione a valle di una strozzatura.

Come già accennato la nube di vapore permane per un certo tratto a valle della sezione ristretta del Venturi, e, in conseguenza, la pressione nel diffusore sale con legge diversa e meno rapida di quella che seguirebbe, secondo la legge di Bernouilli, in relazione alla sezione del condotto.

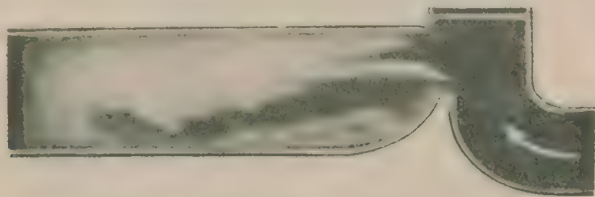


Fig. 4. — Cavitazione in una valvola.

La cavitazione è quasi sempre accompagnata da corrosione sulle pareti del diffusore. Tali corrosioni sono localizzate nella zona dove la pressione aumenta e le bolle di vapore si condensano, e si debbono considerare come conseguenza di una specie di bombardamento cui sono soggette le pareti, da parte delle goccioline d'acqua che si vanno formando. In effetti è stato dimostrato che un getto d'acqua continuo e compatto difficilmente viene ad erodere il materiale se non sotto pressioni di qualche migliaio di atmosfere, mentre un getto sminuzzato può produrre serie erosioni anche in poche ore. Quanto più il materiale è levigato e quanto più è tenace tanto più resiste alla corrosione.

Da quanto sopra esposto è logico aspettarsi cavitazione nelle condotte nei punti di discontinuità, di rapidi cambiamenti di direzione, nelle valvole, con conseguenti erosioni a valle della

strozzatura e le figg. 3 e 4, tratte dalla succitata memoria di Föttinger, ne sono una esemplificazione.

È stato accertato con esperienze, ed è logica asserzione, che l'effetto dell'erosione è notevolmente più sentito se l'acqua contiene sostanze solide in sospensione.

3) La cavitazione dietro una sfera od un cilindro.

È noto il diagramma delle pressioni che si ha attorno ad una sfera o ad un cilindro di allungamento infinito con giacitura normale alla direzione della corrente: nei fluidi perfetti, secondo la teoria Euleriana, tale diagramma è simmetrico rispetto all'asse normale alla corrente, e a poppavia dell'ostacolo si ha una zona di alta pressione identica a quella che esiste nella zona prodiera. Nei fluidi reali invece la zona di recupero manca e l'emisfero di poppa risulta in depressione. Se le velocità sono molto forti si possono facilmente raggiungere le condizioni di cavitazione, in presenza della quale l'ostacolo è seguito da una specie di scia nebulosa via via sempre più accentuata.

Naturalmente le linee di corrente attorno all'ostacolo risultano modificate, e per conseguenza varia anche la resistenza offerta

dal corpo. Nella figura 5 sono riportati su ascisse $\sigma = \frac{p - p_v}{\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2}$

(rapporto della pressione statica p diminuita della tensione del vapore p_v , alla pressione dinamica $\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2$) i valori delle resi-

stenze specifiche $C_r = \frac{r}{\rho \cdot d \cdot v^2}$ quali misurati dal Dott. Martyrer ⁽³⁾ per due cilindri di diametro d eguale rispettivamente a mm. 4,98 e mm. 23,7.

Gli esperimenti furono eseguiti al numero di Reynolds $R = \frac{v \cdot d}{\nu} = 6 \cdot 10^4$ per il cilindro piccolo, e $2 \cdot 10^5$ per il cilindro grande.

È evidente la notevole influenza del numero di Reynolds prima dell'inizio della cavitazione ($\sigma > 2,5$), influenza perfettamente giustificata sia qualitativamente sia quantitativamente da tutti gli esperimenti in materia. Questi hanno infatti accertato che il campo $\frac{v \cdot d}{\nu} = 10^5 \div 10^6$ corrisponde ad una zona critica di

transizione in corrispondenza della quale si hanno variazioni brusche di resistenza in diminuzione od in aumento col crescere o diminuire di R .

Iniziandosi la cavitazione i due cilindri si comportano in modo diverso: per quello di diametro minore la resistenza gradatamente diminuisce, per l'altro invece si ha dapprima un rapido aumento seguito da una successiva diminuzione fino a portare i coefficienti dei due cilindri a coincidere. La giustificazione di questo diverso, ed a prima vista anormale comportamento, ritengo possa essere fornita dalla ripercussione che la presenza della cavi-

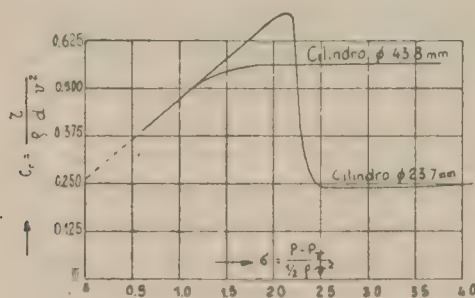


Fig. 5. — Resistenze specifiche di corpi cilindrici in presenza di cavitazione.

tazione ha sul numero di Reynolds. Per il formarsi della cavitazione infatti la densità del fluido nella zona poppiera diminuisce; per conseguenza aumenta la viscosità cinematica $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ è diminuisce il numero di Reynolds. Una tale diminuzione non ha influenza per il cilindro piccolo il quale viene a cadere in un campo di C_r praticamente indipendente da R , mentre ne ha molta per il cilindro grande il quale passa da una zona a bassi valori di C_r ad un'altra ad alti valori di C_r .

Successivamente accentuandosi il fenomeno si ha in tutto l'emisfero di poppa una pressione costante (la tensione del vapor d'acqua saturo) in valore assoluto superiore a quella che si avrebbe in assenza di cavitazione, con conseguente diminuzione di resistenza. In altre parole, per il cilindro da mm. 23,7 in un primo stadio si fa particolarmente risentire l'influenza della diminuzione del numero di Reynolds, e successivamente l'influenza della cavitazione.

La massa di vapore a pressione costante a poppavia dell'ostacolo in presenza di cavitazione si può anche concepire come un

fittizio allungamento dello stesso. Indagini teoriche in questo senso per il tracciamento delle linee di corrente furono anche eseguite dal Riabouchinsky ⁽⁴⁾ e dal Weinig ⁽⁵⁾ con un qualche risultato.

4) La legge di similitudine per i corpi in cavitazione.

Nel campo dell'ingegneria la cavitazione interessa essenzialmente le eliche navali e le turbine idrauliche, e lo studio sperimentale è normalmente eseguito, a mezzo di modelli in scala ridotta, entro appositi tunnel a circolazione d'acqua comunemente detti tunnel di cavitazione. È pertanto utile premettere alcune considerazioni sulla relativa legge di similitudine, e qualche notizia sugli impianti sperimentali in funzione.

Sul fenomeno della cavitazione attorno ad un ostacolo immerso nella corrente, e cioè sul prodursi del fenomeno e sulle mutue azioni che in presenza di esso si esercitano fra solido e liquido, si può, in linea generale, ammettere che abbiano influenza le quantità fisiche sotto elencate:

	Simbolo	Dimensioni nel sistema L. M. T.
Dimensioni lineari, qui individuate con una grandezza caratteristica di riferimento	d	L
ed una grandezza generica	l	L
Profondità del corpo sotto il pelo dell'acqua	h	L
Densità del materiale di cui è formato l'ostacolo . .	ρ_m	$L^{-3}M$
Elasticità del materiale di cui è formato l'ostacolo .	E_m	$L^{-1}MT^{-2}$
Numero dei giri al secondo, se il corpo è in moto rotatorio uniforme (elica o turbina)	n	T^{-1}
Velocità della corrente	$\bar{v}$	LT^{-1}
Accelerazione di gravità	g	LT^{-2}
Densità del fluido	ρ	$L^{-3}M$
Viscosità cinematica del fluido	ν	L^2T^{-1}
Elasticità del fluido	E_f	$L^{-1}MT^{-2}$
Capillarità cinematica del fluido	k	L^3T^{-3}
Pressione statica p (atmosfera + battente d'acqua) meno tensione del vapor d'acqua saturo alla temperatura di prova p_v	$p-p_v$	$L^{-1}MT^{-2}$

Indicando genericamente con R le forze che si esercitano sull'ostacolo, la relazione matematica che lega queste diverse gran-

dezze, e che è la legge del fenomeno, può essere simbolicamente espressa con

$$(1) \quad f(R, d, l, h, \rho_m, E_m, n, v, g, \rho, \nu, E_f, k, p - p_v) = 0.$$

Applicando alla (1) il noto principio di omogeneità, e scegliendo come grandezze fondamentali ρ, ν, d essa si può così trasformare

$$(2) \quad \psi \left\{ \frac{R}{\rho \cdot \nu^2 \cdot d^2}, \frac{l}{d}, \frac{h}{d}, \frac{\rho_m}{\rho}, \frac{E_m}{\rho \cdot \nu^2}, \frac{n \cdot d}{\nu}, \frac{g \cdot d}{\nu^2}, \frac{\nu}{\nu \cdot d}, \frac{E_f}{\rho \cdot \nu^2}, \frac{k}{\nu^2 \cdot d}, \frac{p - p_v}{\rho \cdot \nu^2} \right\} = 0.$$

Come è noto il rapporto dell'elasticità alla densità del fluido $\frac{E_f}{\rho}$ è uguale a V_p^2 velocità di propagazione del suono, per cui ad $\frac{E_f}{\rho \cdot \nu^2}$ si può sostituire $\frac{V_p^2}{\nu^2}$ od anche $\frac{V_p}{\nu}$. Trascrivendo quindi la (2) dopo aver rovesciato alcuni termini ed aggiunto qualche coefficiente numerico onde ottenere la forma più comunemente usata dagli scrittori (operazioni che naturalmente non mutano la sostanza concettuale), si ha

$$(3) \quad \psi \left\{ \frac{R}{\rho \cdot \nu^2 \cdot d^2}, \frac{l}{d}, \frac{h}{d}, \frac{\rho_m}{\rho}, \frac{1}{2} \cdot \frac{E_m}{\rho \cdot \nu^2}, \frac{v}{n \cdot d}, \frac{v}{g \cdot d}, \frac{v \cdot d}{\nu}, \frac{v}{V_p}, \frac{v^2 \cdot d}{k}, \frac{p - p_v}{1/2 \cdot \rho \cdot \nu^2} \right\} = 0.$$

Ad alcuni dei termini che compaiono in questa relazione si è soliti dare i nomi seguenti:

$$\frac{R}{\rho \cdot \nu^2 \cdot d^2} = C_r \quad \text{Coefficiente di resistenza (o spinta, portanza, ...)}$$

$$\frac{v}{n \cdot d} = A_o \quad \text{Avanzo unitario}$$

$$\frac{v}{\sqrt{g \cdot d}} = N_F \quad \text{Numero di Froude}$$

$$\frac{v \cdot d}{\nu} = \Re \quad \text{Numero di Reynolds}$$

$$\frac{v}{V_p} = M \quad \text{Numero di Mack}$$

$$\frac{v^2 \cdot d}{k} = \kappa \quad \text{Indice di capillarità}$$

$$\frac{p - p_v}{1/2 \cdot \rho \cdot \nu^2} = \sigma \quad \text{Indice di cavitazione.}$$

E pertanto la relazione (3) si suole anche scrivere così

$$(4) \quad \psi \left\{ C_r, \frac{l}{d}, \frac{h}{d}, \frac{\varrho_m}{\varrho}, \frac{E_m}{1/2 \cdot \varrho \cdot v^2}, A_c, N_p, R, M, \kappa, \sigma \right\} = 0.$$

espressione che rappresenta, nel caso più generale, quando tutte le grandezze elencate in tabella intervengono con effetto determinante sul fenomeno, la legge di similitudine che deve essere verificata nello studio sperimentale a mezzo di modelli. Per essa cioè dovranno essere eguali nel modello e nell'esemplare i rapporti

$$\frac{l}{d}, \frac{h}{d}, \frac{\varrho_m}{\varrho} \dots$$

Restringendo ora il campo di indagine alle eliche navali valgono le seguenti considerazioni:

1° La densità ϱ_m e l'elasticità E_m del materiale di cui è formato il corpo in prova hanno influenza solo quando sotto l'azione delle forze dovute al fluido, e di quelle nascenti dalla forza centrifuga, le pale si deformano. Ciò può accadere per eliche aeree non per eliche navali che si possono ritenere praticamente indeformabili. Pertanto nella (4) i termini $\frac{\varrho_m}{\varrho}, \frac{E_m}{1/2 \cdot \varrho \cdot v^2}$ possono essere cancellati.

2° Il numero di Mack M , che è l'indice della compressibilità del fluido comincia, secondo quanto è noto dall'aerodinamica, a far sentire il suo effetto quando le velocità sono dell'ordine di grandezza delle velocità di propagazione del suono nel mezzo ambiente, ciò che non è mai il caso per eliche navali funzionanti a regime normale. Ma quando si verifica la cavitazione si ha evaporazione e condensazione di fluido, ed i vari sperimentatori concordano nell'affermare che il fenomeno è intermittente con i caratteri delle onde di urto, con periodo, in alcuni casi osservati, intorno a 100 vibrazioni al secondo. Stando così le cose non pare che l'influenza del numero di Mack possa senz'altro essere trascurata; però non si hanno, per quanto mi consta, dati sperimentali di alcun genere in materia. D'altra parte agli architetti navali non interessa tanto il conoscere il comportamento di un'elica in cavitazione quanto studiare il modo di eliminarla, e pertanto sotto questo riguardo la condizione di aver costante nell'esemplare e nel modello il valore di M può ed è sempre eliminata.

3° Nessun dato, nè teorico nè sperimentale, è noto circa l'influenza dell'indice di capillarità α , per quanto sembrerebbe logico ammettere che una qualche influenza debba sussistere.

4° Se il corpo è sufficientemente immerso in modo che non si abbiano disturbi superficiali, cessa di avere importanza la profondità h del corpo sotto il pelo libero, ed il valore dell'accelerazione di gravità g , e conseguente del numero di Froude N_F .

5° L'accelerazione di gravità g è sempre eguale sia per l'esemplare che per il modello; anche il liquido usato e quindi il coefficiente di viscosità cinematica ν è sempre lo stesso, a parte le non forti differenze consentite dalla variazione della temperatura; ciò porta e alla impossibilità della coesistenza delle due relazioni

$$a) \quad \Re = \frac{v \cdot d}{\nu} = \text{cost.} \qquad b) \quad N_F = \frac{v}{\sqrt{g \cdot d}} = \text{cost}$$

ed alla necessità per la a) di usare o modelli più grandi con velocità più piccole, o velocità più grandi con modelli più piccoli che al vero, condizioni entrambi irrealizzabili nella pratica. Fortunatamente gli esperimenti hanno dimostrato che se le dimensioni del modello e le velocità di prova sono sufficientemente grandi in modo da rimanere al disopra del numero di Reynolds critico, il valore di $\Re$ non ha sensibile influenza nel fenomeno.

Pertanto, con questa imposizione circa il valore minimo di $\Re$, la legge di similitudine per lo studio delle eliche in cavitazione, o meglio per la determinazione del punto di inizio della cavitazione è, se la profondità è sufficientemente grande

$$(5) \qquad \psi \left(C_r, \frac{l}{d}, A_c, \sigma \right) = 0$$

e se la profondità sotto il pelo liquido è piccola

$$(6) \qquad \psi \left(C_r, \frac{l}{d}, \frac{h}{d}, A_c, N_F, \sigma \right) = 0.$$

Su questi fondamenti è impostata la tecnica delle prove. Un elemento però è tuttavia oggetto di discussione e le idee in argomento non risultano ancora concordi: l'influenza della quantità d'aria e del sale sciolto nell'acqua.

È noto dalla fisica che la presenza di un gas sciolto nell'acqua è indispensabile al verificarsi dell'ebollizione, la quale può ritardare notevolmente se l'acqua è stata precedentemente disaerata.

È pure noto che la soluzione di sali aumenta la temperatura di ebollizione. Recentemente i giapponesi Numachi e Kurokawa (6) hanno eseguito una serie di esperienze in argomento, condensate nel grafico della fig. 6, dove su ascisse temperatura sono riportate la pressione di ebollizione per acqua distillata e per acqua marina a diversi rapporti di concentrazione di aria. Per l'acqua distillata

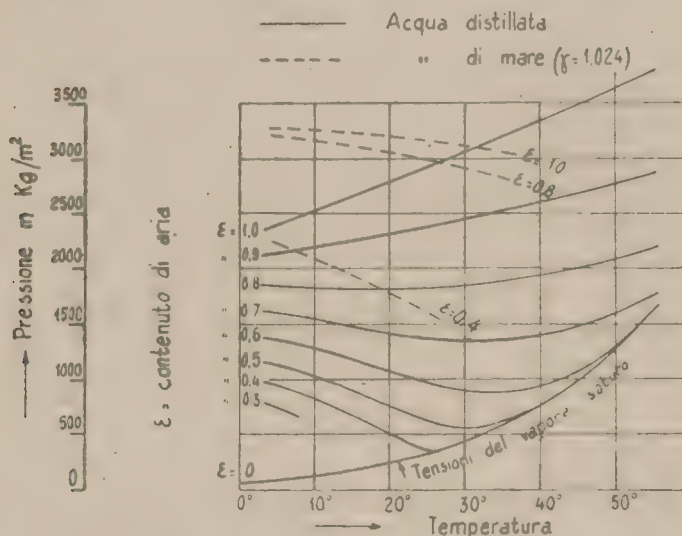


Fig. 6. — Pressioni per l'inizio dell'ebollizione per acqua aerata ed acqua di mare secondo Numachi e Kurokawa.

questi risultati sono in accordo colle sopra riportate nozioni di fisica, non lo sono invece completamente quelle relative all'acqua di mare. Se gli esperimenti di Numachi e Kurokawa si dovessero ritenere conclusivi, nella formazione dell'indice di cavitazione alla tensione del vapor d'acqua saturo dovrebbero essere sostituiti i valori del diagramma della fig. 6 relativi alla accertata concentrazione di aria, ed agli effetti pratici per la progettazione di eliche libere da cavitazione ne deriverebbero differenze sostanziali nelle dimensioni. Altri esperimentatori però sono giunti a conclusioni diverse. Il Lerbs (7) ha eseguito rilievi su modelli con acqua dolce ed acqua salata, e corrispondenti rilievi al vero, e non ha registrato apprezzabili differenze. Parimenti O. Kell (8) ha eseguito esperimenti con 5 tipi diversi di elica con acqua naturale e con acqua contenente 120-130 cm³ di anidride carbonica per litro, e solo per un'elica la presenza dell'anidride carbonica ha dato luogo ad una qualche differenza di rilievi. Secondo espe-

rimenti poi eseguiti al Massachusetts Institute of Technology, sembrerebbe addirittura che gli effetti dannosi della cavitazione possano essere notevolmente attenuati proprio mediante una conveniente areazione dell'acqua.

Presumibilmente le discordanze di idee e di risultati su questo punto si devono attribuire alla distinzione che deve farsi fra liberazione di un gas disciolto nell'acqua ed evaporazione. Se per effetto del fenomeno idrodinamico la pressione nel fluido diminuisce, assai prima che si raggiunga la tensione del vapor d'acqua saturo può avvenire la liberazione del gas disciolto, ma il volume di gas sprigionato è limitato in confronto al volume indefinitamente grande di vapore prodotto quando si raggiungono le condizioni di vaporizzazione, e quindi anche le ripercussioni sul comportamento di un corpo in cavitazione sono notevolmente minori nel primo che nel secondo caso. Il fatto poi che alcuni studiosi hanno indagato il fenomeno mediante osservazioni a vista, altri mediante rilievi dinamometrici, può anche più facilmente spiegare la diversa valutazione degli sperimentatori.

5) Tunnel di cavitazione.

I tunnel di cavitazione sono molto simili alle comuni gallerie del vento, colla differenza che in essi viene fatta circolare acqua invece che aria. In più una pompa consente di fare un vuoto più o meno accentuato nell'interno in modo da ridurre la pressione e quindi l'indice di cavitazione $\sigma = \frac{p - p_v}{1/2 \cdot \rho \cdot v^2}$.

Possono essere del tipo chiuso (fig. 7) o del tipo aperto (fig. 8). Nel primo la camera di prova è completamente piena ed il corpo in esame risulta completamente immerso nel fluido; nel secondo invece può esistere una superficie libera.

Nei tunnel del tipo chiuso si ammette che l'ostacolo non procuri alcun effetto superficiale, per cui la presenza di un pelo libero non è necessaria, e la costanza dei rapporti $\frac{h}{d}$, $\frac{v}{\sqrt{g \cdot d}}$ non si richiede. In effetti ciò non sempre si verifica.

Per il caso specifico dell'elica navale l'indipendenza dal valore dell'immersione e del numero di Froude è parzialmente vera per profondità dell'asse superiori ad un diametro, mentre le immersioni effettive generalmente non sorpassano $3/4 d$, e scendono non di rado a valori per cui le punte delle pale affiorano. In più si osserva spesso con eliche in acqua libera un fenomeno di aspirazione di

aria dalla superficie, fenomeno che non può riprodursi col tunnel del tipo chiuso.

Sotto questo riguardo pertanto i tunnel aperti appaiono preferibili; però nelle realizzazioni fino ad oggi avutesi trattasi di dif-



Fig. 7. — Tunnel di cavitazione tipo chiuso della vasca di Amburgo.

ferenza più formale che sostanziale. L'elica infatti è sistemata nel centro del getto (vedi fig. 8) il quale deve avere diametro non inferiore al doppio di quello del propulsore perchè si abbia sul disco sufficiente uniformità di corrente; il pelo libero poi deve trovarsi ancora convenientemente più elevato del lembo superiore

del getto e non partecipa al movimento della corrente, ma è praticamente immoto.

Affinchè tutte le condizioni della similitudine fossero verificate, si richiederebbe una vasca di circolazione con corrente a pelo libero nel tratto di misura o meglio con corrente a pelo libero lungo tutto il canale (tunnel in piano). È presumibile che notevoli difficoltà di realizzazione debbano sormontarsi, particolarmente affinchè siano verificate le condizioni di velocità uniforme e di assenza di moti ondosi; però la maggiore perfezione del metodo sperimentale che ne conseguirebbe, ed il fatto che vasche di questo

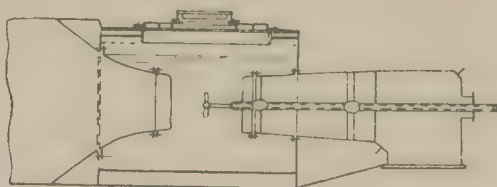


Fig. 8. — Camera di prova
di un tunnel di cavitazione tipo aperto.

genere aperte, cioè a pressione atmosferica, già esistono, e sono usate con soddisfacenti risultati, sono elementi che sembrano consigliare un tentativo in questo senso.

Quale indice delle capacità degli attuali impianti riportiamo qui le principali caratteristiche del tunnel di cavitazione della Vasca di Amburgo:

Diametro massimo della camera di prova	m.	0,50
Velocità massima	m/sec.	12,50
Potenza del motore di circolazione . . .	C.V.	100
Potenza del motore dell'elica in prova . .	C.V.	22

La temperatura dell'acqua può essere opportunamente regolata. Le difficoltà di carattere tecnico che s'incontrano nei tunnel di cavitazione sono notevoli: infatti oltre quelle comuni alle gallerie del vento, e che si riferiscono principalmente alla turbolenza della corrente ed alla misura della velocità, sono da aggiungere quelle riguardanti la costanza della pressione, la tenuta stagna, la cavitazione nell'elica di circolazione, nei raddrizzatori, nei nidi d'ape, nei sostegni, la sistemazione e costruzione dei dinamometri.

Tali difficoltà sono rese evidenti dal fatto che i principali impianti hanno avuto, dopo un primo periodo di esercizio, in tutto od in parte mutati i dinamometri, e qualcuno è stato anche modificato nella forma del canale.

6) La cavitazione nei profili alari.

Lo studio sperimentale della cavitazione, anziché direttamente su eliche, può più facilmente, e sotto certi riguardi anche più utilmente, essere eseguito su semplici profili alari. In essi la cavitazione può presentarsi sotto tre forme diverse: per incidenze negative o molto piccole la cavitazione si manifesta sulla faccia dietro lo spigolo di entrata; per incidenze medie sul dorso verso l'uscita; per incidenze grandi sul dorso dietro lo spigolo di entrata. In determinati casi può anche aversi contemporanea-mente cavitazione sulla faccia e sul dorso verso l'uscita.

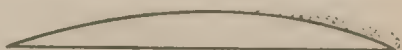


Fig. 9. — Deformazione di un profilo parabolico per effetto della cavitazione.

L'estensione della cavitazione, cioè del tratto nel quale sono visibili vapori, cresce col diminuire dell'indice di cavitazione: all'inizio il tratto è breve, il fenomeno poco pronunciato ed instabile, ed il profilo può andare soggetto a vibrazioni. Successivamente la formazione nebulosa si estende e può coprire tutta la pala ed oltre. I punti dove la formazione nebulosa cessa, cioè il vapore si condensa, possono essere sedi di erosioni le quali quindi si manifestano dietro lo spigolo d'entrata sulla faccia attiva, e sul dorso. Se tutto il profilo è in cavitazione, caso che non è frequente, la condensazione avviene oltre la pala e quindi non vi è pericolo di erosioni.

Esperimenti avrebbero anche dimostrato che i profili diremmo così aerodinamici, del tipo cioè usato in aeronautica, entrano in cavitazione prima dei profili a dorso simmetrico parabolico, e quelli spessi prima di quelli di minor grossezza. Il numero di Reynolds, all'opposto che per i cilindri, cosa del resto prevedibile, non ha pratica influenza.

Il presentarsi della cavitazione fa bruscamente variare i coefficienti di portanza, di resistenza, e di rendimento. È notevole il fatto che nei profili aerodinamici il fenomeno si manifesta con una caduta della portanza la quale diviene nulla a tutte le incidenze al disotto di un certo valore di σ ; la resistenza invece dapprima aumenta per diminuire quando la cavitazione è già molto accentuata. All'opposto nei profili parabolici, ed in genere nei profili a becco sottile, può avvenire che la caduta della portanza sia preceduta all'inizio da un leggero aumento, cui è anche contemporaneo in alcuni casi una leggera diminuzione della resistenza.

Si può spiegare questo fatto ammettendo che la formazione nebulosa trasformi il profilo della forma a linea intera (fig. 9), alla forma a linea tratteggiata, e che la presenza della zona di vapore riesca in parte a diminuire la resistenza d'attrito.

7) *La cavitazione nelle eliche.*

Anche nelle eliche la cavitazione si presenta cogli stessi aspetti già osservati per i profili alari, e cioè si può avere cavitazione sulla faccia, sul dorso dopo lo spigolo di entrata, sul dorso nella zona di uscita.

La cavitazione sulla faccia si verifica verso il mozzo, ai bassi regressi, con grandi spessori e spigoli di entrata taglienti. In genere coll'aumentare del regresso sparisce e la sua influenza sul rendimento è praticamente nulla. Può invece causare vibrazioni ed erosioni dannose.

La cavitazione sul dorso dietro lo spigolo di entrata si inizia verso la periferia della pala, dove le velocità sono maggiori, specialmente se il becco di entrata non è ben avviato, come accade spesso per ragioni di robustezza nei profili parabolici; essa si presenta come una scia filiforme elicoidale che via via aumenta di ampiezza e di consistenza. La cavitazione sul dorso nella zona di uscita si presenta nella parte a poppavia dello spessore massimo e generalmente inizia proprio sullo spigolo di uscita. A questo genere di cavitazione sono più sensibili le sezioni con spessore massimo spostato verso l'entrata, meno quelle con spessore massimo al centro, e meno ancora quelle con spessore massimo spostato verso l'uscita. La cavitazione sul dorso è quella che più si fa risentire nei riguardi del rendimento.

Nella fig. 10 è riportato un diagramma tipico relativo a risultati di prove di eliche al tunnel. Il fenomeno della cavitazione è accompagnato dalla caduta della spinta, del torcente, del rendimento. Questa caduta, naturalmente, è tanto più sentita ed inizia tanto prima quanto più basso è l'indice di cavitazione. È da osservare che il cedere delle curve è preceduto con un certo anticipo dell'apparizione visuale della cavitazione; è pure da notare che la curva dei momenti con certi profili cade prima di quella delle spinte; anzi quest'ultima ai primi inizi può presentare anche un leggero rialzo, le quali cose combinate possono portare all'inizio della cavitazione un aumento anzichè una diminuzione del rendimento. Questo dato di fatto è in concordanza con quanto è stato constatato nelle prove con profili alari.

La condotta pratica delle esperienze con modelli di elica in iscala ridotta e la relativa interpretazione per un caso specifico di nave è diversa a seconda che sia verificata la legge di similitudine (5) o la legge di similitudine (6) (paragr. 4).

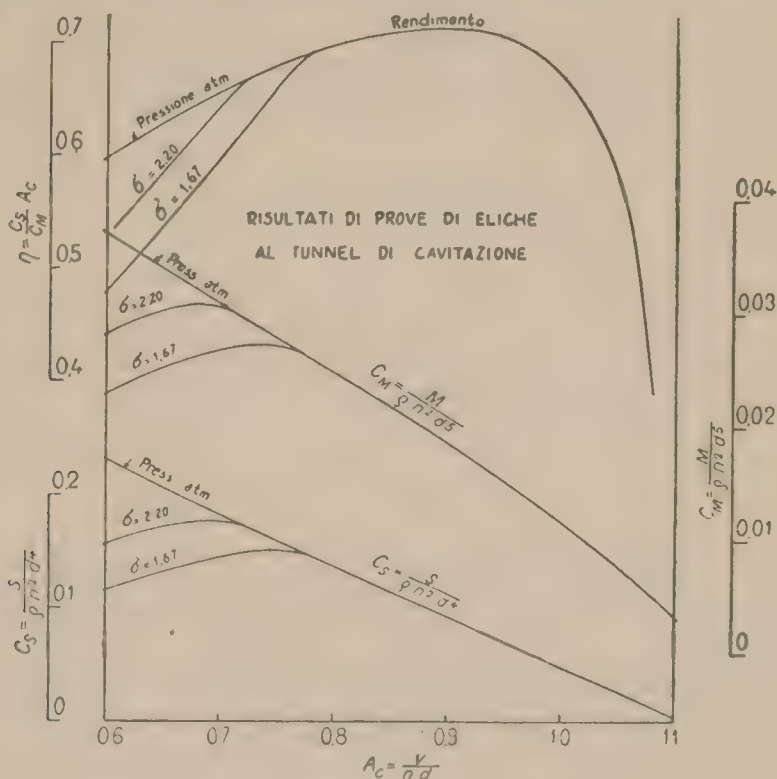


Fig. 10.

Nel primo caso si esegue anzitutto una serie di esperienze di autopropulsione in vasca e per ogni corsa si determina la spinta s e la velocità v_e corretta per la scia; quindi si ripetono le esperienze al tunnel e si regolano per ogni corsa: a) la velocità della corrente in modo da aversi gli stessi valori v_e misurati in vasca; b) la pressione sul centro dell'elica p in modo che l'indice di cavitazione sia uguale al corrispondente per la nave; c) il numero dei giri n in modo che la spinta sia eguale a quella registrata nelle prove di autopropulsione.

Nel secondo caso basta con l'elica al tunnel eseguire un certo numero di serie di prove ognuna con un prefissato valore di σ , per un conveniente campo dell'avanzo unitario A_c , ottenendosene

un diagramma come quello della figura 11. Su tale diagramma poi si entra per ogni prefissato valore della velocità v , corretta per la scia coi corrispondenti valori del coefficiente di spinta e dell'indice di cavitazione.

La maggiore o minore perfezione teorica dei due procedimenti venne già discussa al n. 3.

Praticamente nel passaggio da un modello ad un altro a diversa scala, entrambi i metodi sembra diano risultati sufficiente-

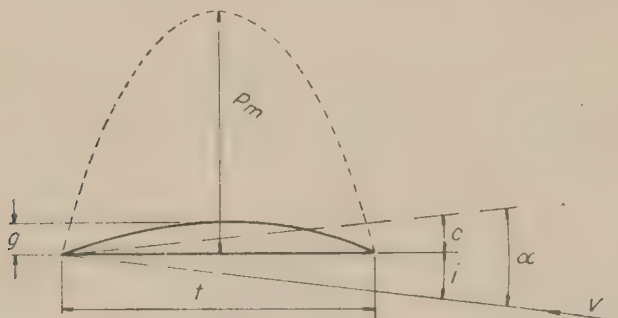


Fig. 11. — Angoli caratteristici di una sezione di pala.

mente sicuri. Nel passaggio da modello ad esemplare in vera grandezza invece la pratica ha confermato spesso, ma non sempre, le previsioni. Alle possibili cause di divergenza già esposte nei precedenti paragrafi bisogna ancora aggiungere le differenze nell'andamento della corrente al tunnel e dietro la carena, che sono poi le stesse differenze che sussistono fra le prove di autopropropulsione e quelle di elica isolata.

Comunque si può concludere che gli esperimenti di cavitazione al tunnel hanno oggi una base teorica e pratica, ma rilievi positivi e sicuri di raffronto su navi in vera grandezza se ne hanno ancora troppo pochi perchè il fenomeno possa ritenersi completamente individuato e definito.

8) Criteri pratici di cavitazione.

La cavitazione per quanto sopra esposto si deve ritenere un fenomeno dannoso agli effetti pratici, quindi, come già precedentemente accennato, ai costruttori navali non interessa tanto di conoscere il comportamento di un'elica in cavitazione, quanto il modo di evitarla, o di eliminarla quando si fosse presentata in qualche caso pratico.

Sotto questo riguardo il mezzo migliore sarebbe quello di eseguire in sede di progetto prove di controllo con modelli al tunnel, ma i relativi esperimenti sono dispendiosi e non facilmente accessibili essendo assai esiguo il numero degli impianti in esercizio. Si è pertanto tentato sui dati dell'esperienza di stabilire una qualche regola di carattere empirico o semi-empirico.

La prima in ordine storico, e ormai superata, risale al tempo del primo apparire del fenomeno, e consisteva in queste due semplici limitazioni:

Spinta specifica per cm ² di superf. sviluppata	0,8 Kg/cm ²
Velocità periferica	50 m/sec.

Più recentemente, nel 1932, il Cap. E. F. Eggert ⁽¹⁰⁾ della vasca di Washington ha proposta la formula che qui si trascrive in misure metriche

$$v^2 = 3,25 h \frac{1 + 4b}{i + c}$$

v = velocità in m/sec. alla quale si inizia la cavitazione, misurata rispetto all'acqua ambiente a 0,9 del raggio

h = pressione sull'asse dell'elica (atmosferica + battente d'acqua) in m. di colonna d'acqua di peso specifico 1,025

$b = \frac{\text{larghezza media delle pale}}{\text{diametro}} =$

$$= \frac{\text{superficie totale sviluppata}}{\text{N° pale} \times 1/2 \cdot (\text{Diam. elica} - \text{Diam. mozzo}) \times \text{diam. elica}}$$

i = metà dell'incidenza della corda del profilo rispetto alla direzione della corrente all'infinito a monte

c = rapporto spessore massimo della sezione a 0,9 del raggio alla sua lunghezza se lo spessore massimo è al centro; 3/4 dello stesso rapporto se lo spessore massimo è spostato verso lo spigolo di entrata.

Tale formula parte dal presupposto che l'inizio della cavitazione si verifichi intorno alla sezione a 0,9 del raggio.

La sua struttura può essere giustificata come segue:

La forza che si esercita su un profilo alare vale

$$(7) \quad F = C_p \cdot \varrho \cdot S \cdot v^2.$$

D'altra parte si può anche ammettere che tale forza sia proporzionale alla depressione massima p_m che si verifica sul dorso

$$(8) \quad F = K \cdot p_m \cdot S.$$

E quindi eguagliando la (7) e la (8)

$$(9) \quad C_p \cdot \varrho \cdot S \cdot v^2 = K \cdot p_m \cdot S$$

$$v^2 = \frac{K}{\varrho} \cdot \frac{p_m}{C_p}.$$

Indicando con α_s l'incidenza effettiva

$$\alpha_s = i + c - \alpha_i$$

essendo

i = incidenza rispetto alla corda;

c = incidenza di portanza nulla $= \frac{g}{t}$ (v. fig. 11) per sezioni paraboliche; $= \sim \frac{3}{4} \cdot \frac{g}{t}$ per profili alari;

α_i = incidenza indotta

si può scrivere

$$C'_p = C' \cdot \alpha_s.$$

Per i comuni tipi di pale navali si può assumere α_i funzione della portanza C_p e della larghezza media relativa b

$$\alpha_i = m \cdot b \cdot C_p$$

con che risulta

$$C_p = C' \cdot \alpha_s = C'(i + c - \alpha_i) = C'(i + c - m \cdot b \cdot C_p)$$

e quindi

$$(10) \quad C_p = C' \frac{i + c}{1 + m \cdot b}.$$

Sostituendo questo valore nella (9)

$$(11) \quad v^2 = \frac{K}{\rho \cdot C'} \cdot p_m \cdot \frac{1 + m \cdot b}{i + c}.$$

Nel punto in cui si inizia la cavitazione sarà $p_m =$ pressione statica $= 1025 h$ e quindi

$$(12) \quad v^2 = \frac{K \cdot 1025}{\rho \cdot C'} \cdot h \cdot \frac{1 + m \cdot b}{i + c} = K' \cdot h \cdot \frac{1 + m \cdot b}{i + c}.$$

In questa relazione i è l'intero valore dell'incidenza rispetto alla corda, mentre nell'espressione dell'Eggert i rappresenta metà di tale incidenza.

A tal riguardo si può osservare che la sezione media di una pala d'elica (il comportamento della quale è l'indice del comportamento di tutta la pala) non è a 0,9 ma a 0,7 del raggio. Pertanto l'angolo di portanza nulla $c = \frac{g}{t}$, valutato a 0,9 R , dove lo spessore g è minore, si può ritenere calcolato in difetto, così da dover porre $i + nc$ al posto di $i + c$. Se, per es., $n = 2$

$$(13) \quad v^2 = K' \cdot h \cdot \frac{1 + m \cdot b}{i + 2c} = \frac{K'}{2} \cdot \frac{1 + m \cdot b}{\frac{i}{2} + c}$$

la quale per $\frac{K'}{2} = 3,25$ $m = 4$, diviene appunto la formula di Eggert.

Un grande numero di eliche a 3 e 4 pale, sperimentate al tunnel di cavitazione, confermerebbero molto bene secondo l'autore una tale espressione. Altri ricercatori invece hanno riscontrato notevoli discordanze, specialmente per sezioni a profilo aerodinamico.

Più sicuri della formula di Eggert, seppure riflettenti un caso particolare, sono i diagrammi di cavitazione pubblicati da Lerbs della Vasca di Amburgo, il quale ha eseguito prove sistematiche al tunnel con le eliche Schaffran a tre pale (serie B_2) ed a 4 pale (Serie B_4). Come è noto queste eliche hanno pala a contorno sviluppato ellittico raccordato col mozzo, generatrice facciale e dorsale rettilinea, sezioni circolari sviluppate a profilo parabolico, spessore relativo ideale massimo $\frac{g}{d}$, misurato sull'asse, eguale, per le serie B_2 e B_4 , a 0,05 d .

Nella fig. 12 sono indicate le varie particolarità per una esatta delineazione della pala e del mozzo.

I rilievi eseguiti dal Lerbs sono riportati nelle fig. 13 e 14. In esse su ascisse $\sigma \cdot \frac{Fa}{F}$ (σ = indice di cavitazione; F_a = superf. tot. sviluppata; F = area disco) sono riportati i valori dell'avanzo unitario, per i quali, col diminuire dello stesso, sparisce la cavitazione

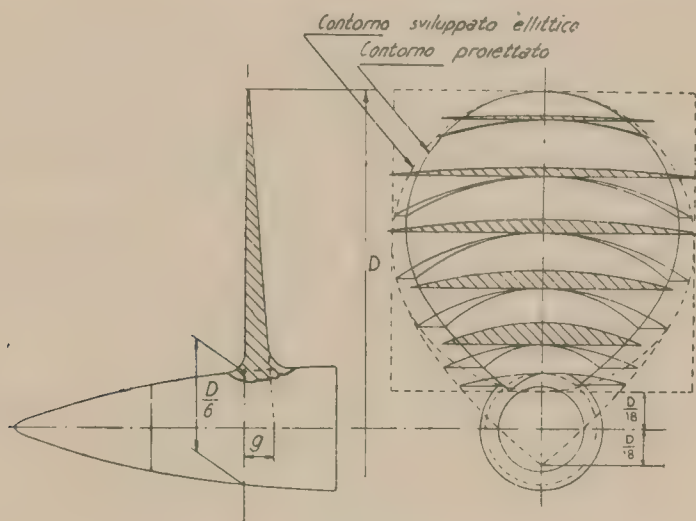


Fig. 12. — Elica Schaffran.

zione sulla faccia attiva, inizia la cavitazione sul dorso, comincia ad essere influenzata la spinta.

È interessante osservare che in certe zone di funzionamento si ha contemporaneamente cavitazione sul dorso e cavitazione sulla faccia, e che vi sono determinati valori di $\sigma \cdot \frac{Fa}{F}$ per i quali l'elica non può mai a nessun valore del regresso essere contemporaneamente libera di cavitazione sul dorso e sulla faccia. Per questi casi è da tener presente che agli effetti del rendimento è più dannosa la cavitazione sul dorso, e che comunque occorre rimanere al di fuori dei limiti per cui comincia a cedere il valore della spinta.

Nell'eventualità in cui il pericolo di cavitazione esista od il fenomeno sia presente ed occorra eliminarlo, i seguenti rimedi sono suggeriti:

DIAGRAMMI DI CAVITAZIONE
PER ELICHE SCHAFFRAN A 3 PALE SERIE B₂
SECONDO ESPERIENZE DI LERBS

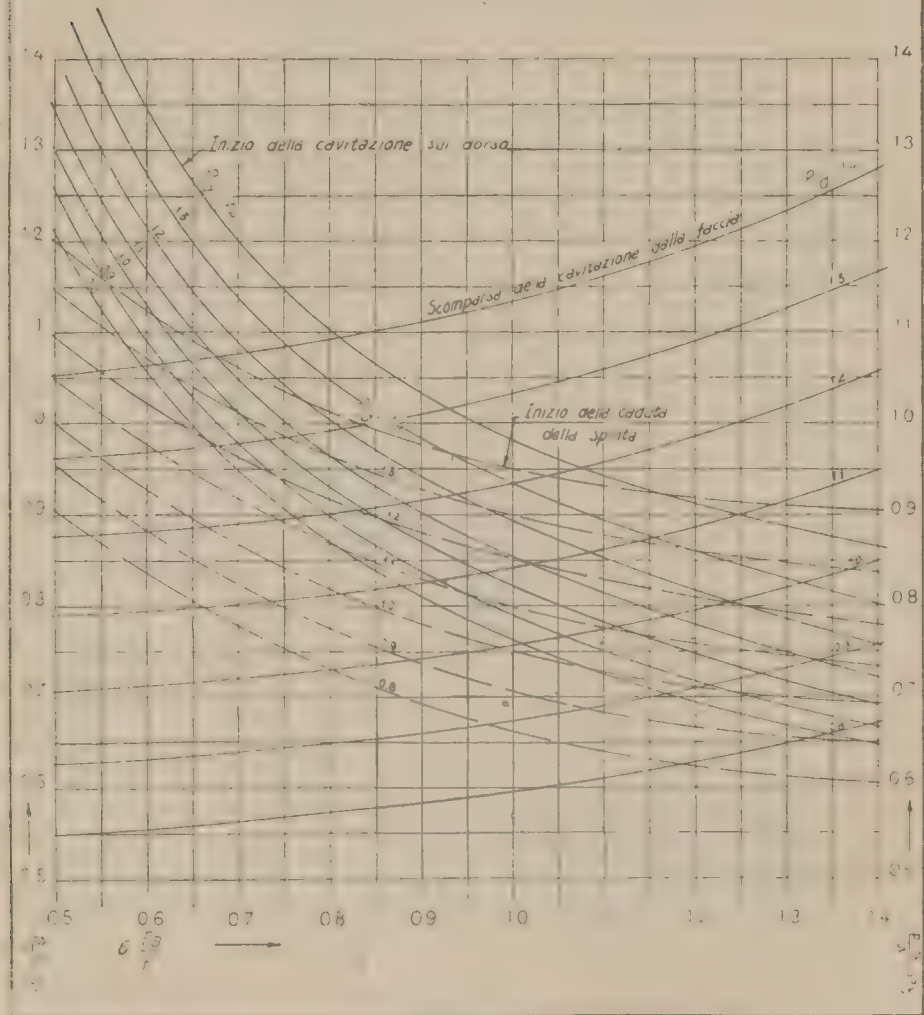


Fig 13.

DIAGRAMMI DI CAVITAZIONE
PER ELICHE SCHAFFRAN A 4 PALE SERIE B₄
SECONDO ESPERIENZE DI LERBS

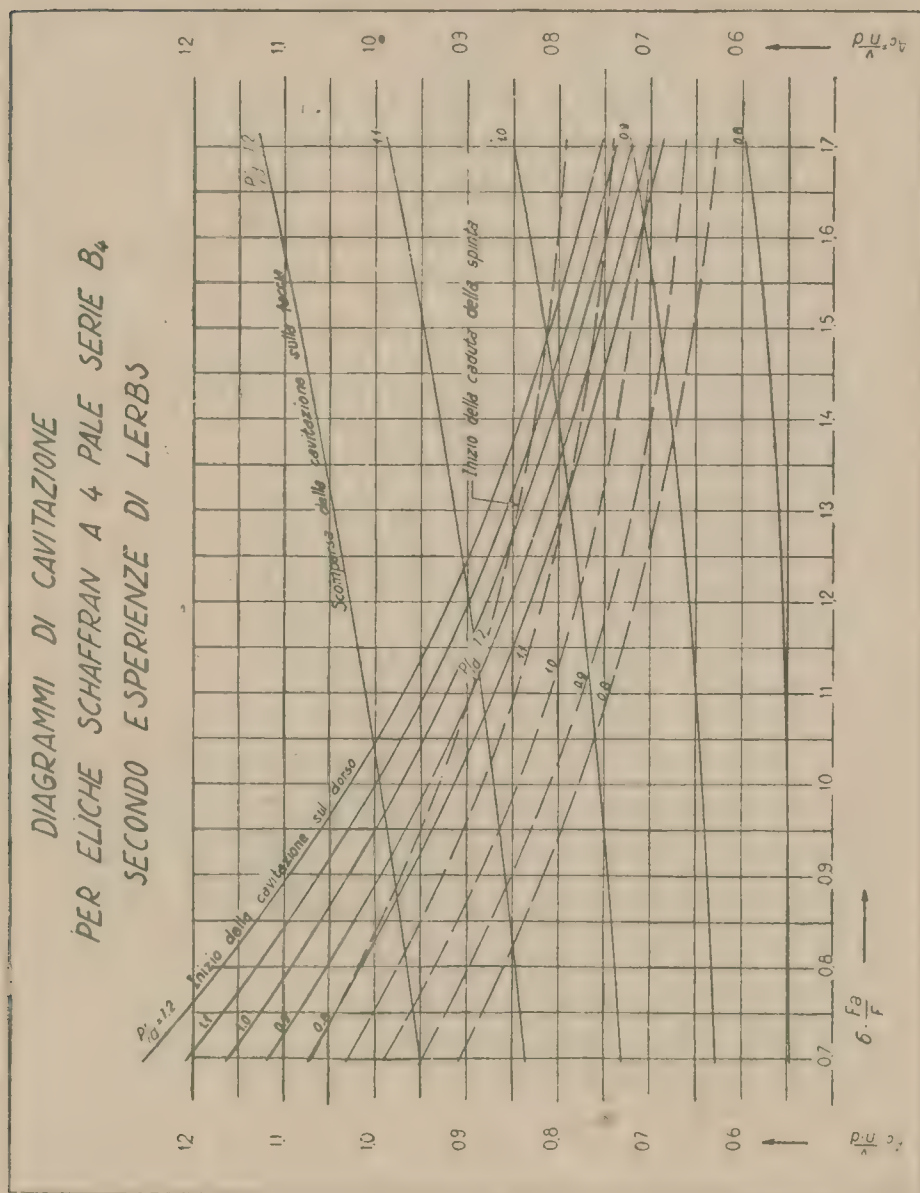


Fig. 14.

1° disegnare le sezioni verso la periferia a dorso parabolico, quelle verso il mozzo a profilo aerodinamico col becco di entrata un po' rialzato;

2° distanziare quanto possibile l'elica dall'estremità del dritto di poppa o dei bracci portaelica;

3° possibilmente non scendere col rapporto passo-diametro al disotto di 0,75;

4° per le navi a due eliche non apportare diminuzione di passo dalla periferia verso il mozzo.

9) *L'elica navale e la teoria alare nei riguardi della cavitazione.*

La formula di Eggert riportata nel numero precedente costituisce un tentativo di analisi del comportamento di una pala d'elica navale secondo i principî dell'ala di aeroplano; trattasi però di un tentativo diremmo così grossolano, non immune da fondate obiezioni anche di carattere teorico.

Su questa direttiva è stato percorso negli ultimi anni molto cammino, applicando ed opportunamente adattando all'elica navale la teoria dell'elica aerea. Oggi si può su queste basi progettare con buona approssimazione un'elica per navi, e per questo ci si può particolarmente riferire alle più recenti pubblicazioni di Helmbold ⁽¹²⁾, Schönherr ⁽¹³⁾, e Lammeren ⁽¹⁴⁾. Trattasi però di calcoli notevolmente laboriosi, complicati dalla presenza e dalla irregolarità della scia di carena, e dalla mutua induzione di una pala sull'altra, ed il risultato agli effetti del rendimento non è praticamente migliore di quello che si consegue coi metodi di progettazione che furono in uso fino a ieri. Sotto questo riguardo quindi non vi sono vantaggi. Ma una utilità si presenta quando si voglia analizzare il comportamento dell'elica agli effetti della cavitazione.

Ritengo pertanto opportuno, senza esporre il metodo completo di progettazione di un'elica per navi coi principî della teoria alare, il che oltre a tutto mi porterebbe troppo fuori dell'argomento prefissomi, delineare qui unicamente un procedimento per la verifica agli effetti della cavitazione di un'elica, della quale siano dati il disegno e tutte le caratteristiche di funzionamento.

Si consideri dunque una sezione circolare di raggio r , e con riferimento alla fig. 15 sia P il passo, v la velocità d'avanzo corretta per la scia locale, $\omega \cdot r$ la velocità rotatoria. Per effetto dell'azione dell'elica l'acqua assume un moto elicoidale retrogrado che all'infinito a valle avrà velocità tangenziale u_t , e componenti

assiale u_a e periferica u_p , ed in corrispondenza dell'elica velocità rispettivamente metà delle precedenti in forza del teorema per cui l'incremento al disco è metà dell'incremento totale.

Pertanto le velocità relative in corrispondenza del disco, ammesso che lungo tutta la circonferenza di raggio r il movimento sia uguale in tutti i punti, sono:

$$(14) \quad \begin{array}{ll} \text{velocità assiale} & v_a = HM = v_e + u_a/2 \\ \text{» periferica} & v_p = AH = \omega \cdot r + u_p/2 \\ \text{» tangenziale} & v_t = AM = (\omega \cdot r - u_p/2) / \cos \cdot \gamma \end{array}$$

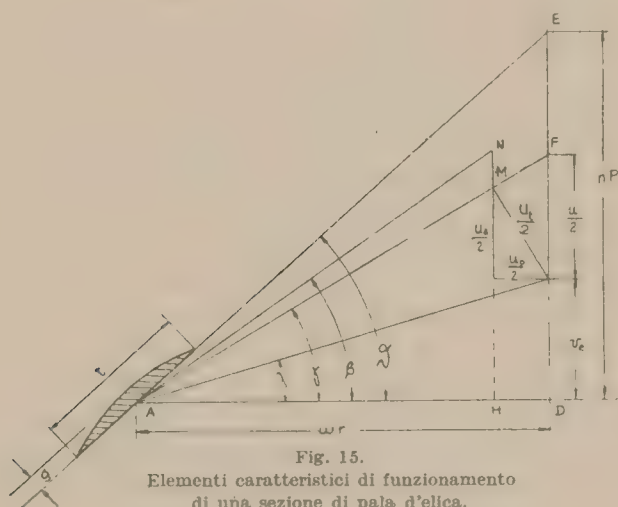


Fig. 15.
Elementi caratteristici di funzionamento
di una sezione di pala d'elica.

essendo l'angolo γ definito dalla condizione di normalità fra v_t ed u_t .

Nell'unità di tempo attraverso una corona circolare di raggi r ed $r + dr$ effluisce una massa d'acqua

$$\rho \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot dr (v_e + u_a/2)$$

che assume per effetto dell'elica un moto retrogrado di velocità u_a per cui, per il principio della quantità di moto, si svilupperà una spinta

$$\rho \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot dr \cdot (v_e + u_a/2) \cdot u_a$$

e per ogni pala, se z ne è il relativo numero, una spinta

$$(15) \quad dS_1 = \frac{1}{z} \cdot \rho \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot dr \cdot (v_e + u_a/2) \cdot u_a.$$

D'altra parte per ogni assegnato valore di u_i risulta una incidenza i

$$(16) \quad i = \vartheta - \gamma$$

dell'elemento di pala, un corrispondente coefficiente di portanza C_p , determinabile quando sia nota la polare del profilo, ed una spinta

$$(17) \quad dS_2 = \rho \cdot C_p \cdot t \cdot dr \cdot v_i^2 \cdot \cos \gamma.$$

Uguagliando la (15) e la (17) si può dedurre il giusto valore di u_i , dell'incidenza i , della spinta dS .

Se la polare del profilo non è conosciuta si possono utilmente utilizzare i diagrammi 16 e 17 dedotti da esperimenti di F. Gutsche ⁽¹¹⁾ relativi l'uno a profili a dorso parabolico, l'altro a profili alari.

I diagrammi sono per allungamento infinito.

I profili alari di Gutsche corrispondono con molta approssimazione al profilo N. 593 della serie di Göttingen, e comunque le relative dimensioni sono riportate nella seguente tabella.

Ascissa x/t	0	0,0125	0,025	0,05	0,10	0,15	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00
Ordinate del dorso	30	45	53	64	79	89	95	100	97	89	78	62	45	27	8
Ordinate della faccia	30	17	13	9	3	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

Le ordinate sono in per cento dello spessore massimo.

Giunti così alla determinazione della spinta dS , e della portanza $\frac{dS}{\cos \gamma}$ dell'elemento di pala, si deve osservare che tale portanza è conseguenza di una opportuna distribuzione di sovrappressioni e depressioni sulla faccia e sul dorso. Una tale distribuzione per i profili di cui ai grafici 16 e 17 fu opportunamente rilevata dal Gutsche, ed in particolare furono determinati per ogni incidenza i rapporti $\frac{\Delta p}{1/2 \cdot \rho \cdot v_i^2}$ delle aspirazioni massime Δp sulla faccia e sul dorso alla pressione dinamica $1/2 \cdot \rho \cdot v_i^2$, rapporti che sono riportati nei grafici 18 e 19. Essendo note le variabili C_p e $\frac{g}{t}$ sulle quali questi grafici sono impostati, essendo

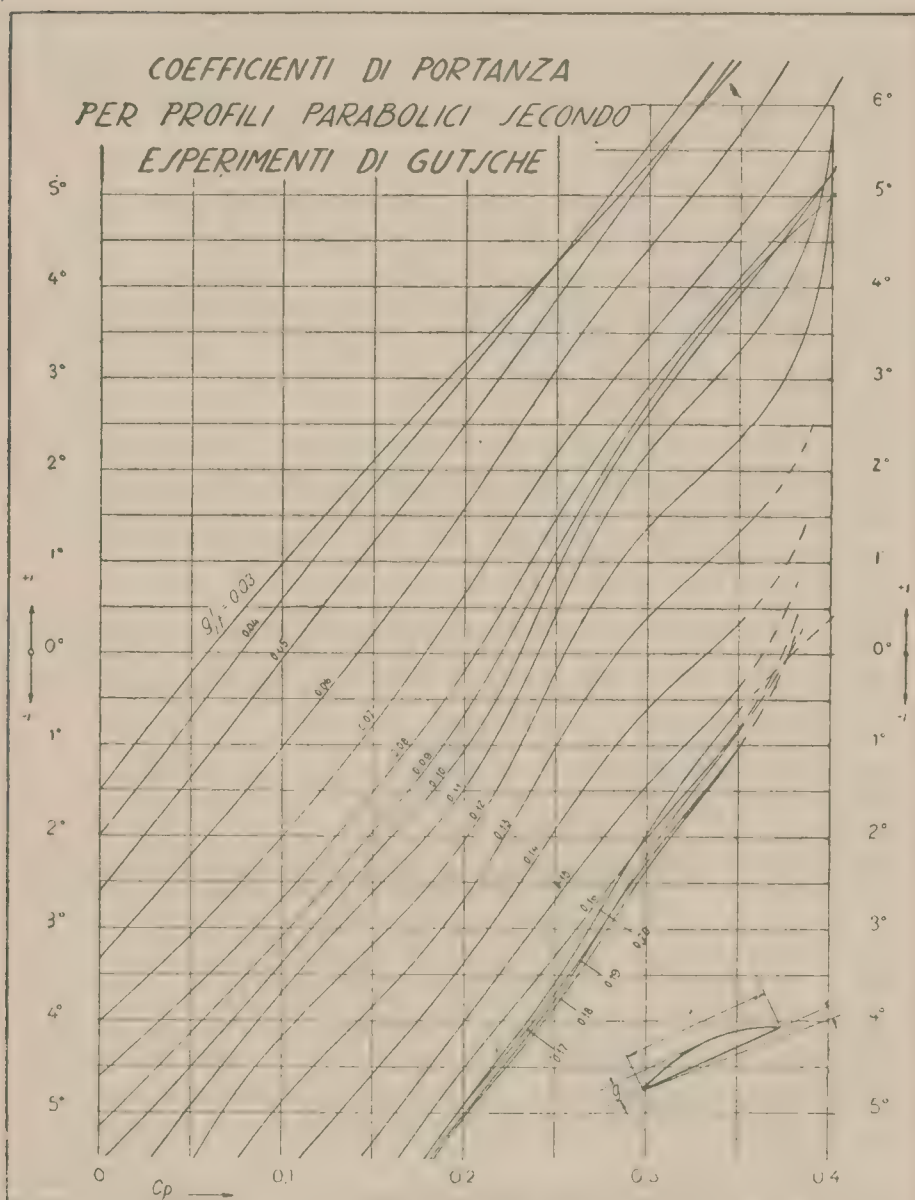


Fig. 16.

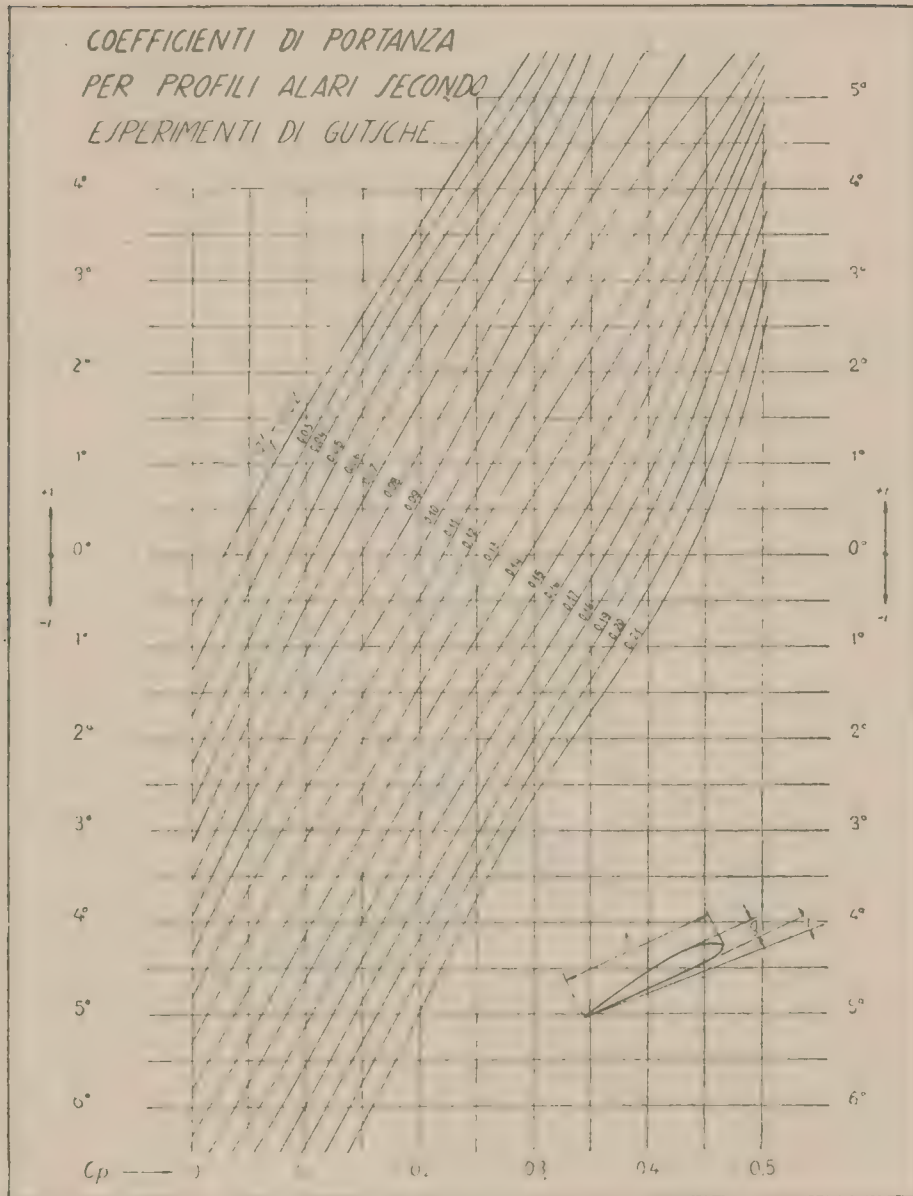


Fig. 17.

ASPIRAZIONI MASSIME PER PROFILI PARABOLICI
SECONDO ESPERIMENTI DI GUTSCHE

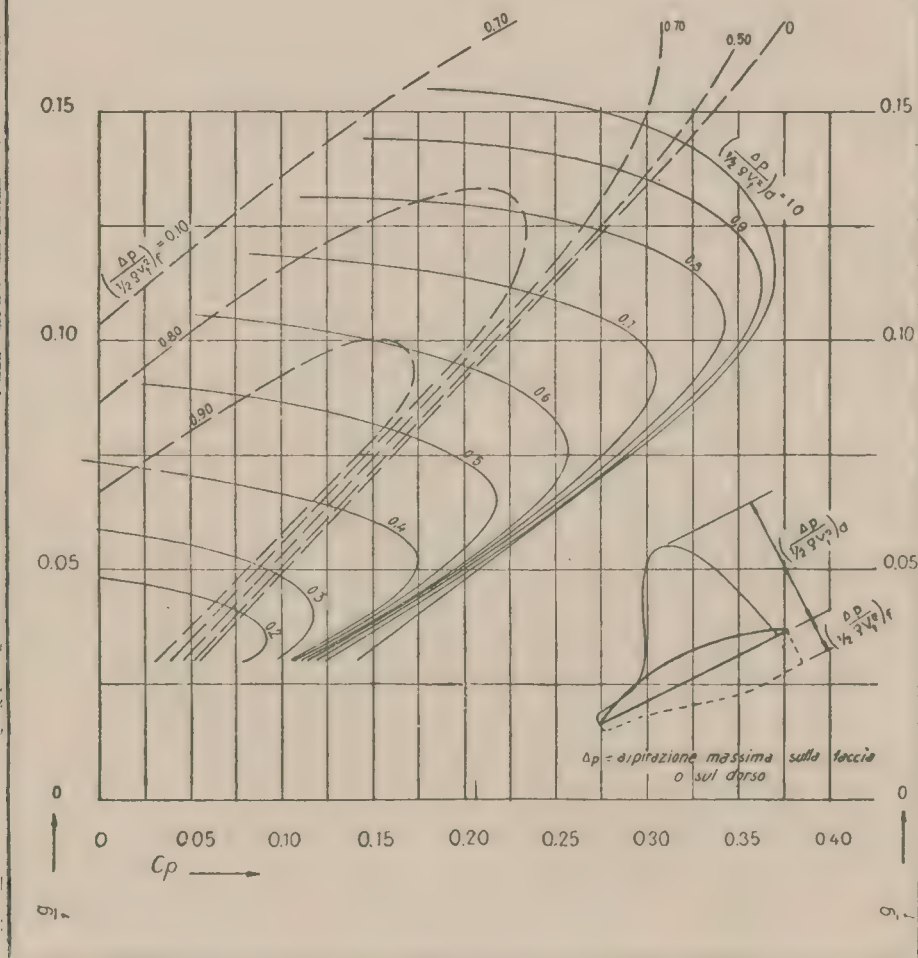


Fig. 18.

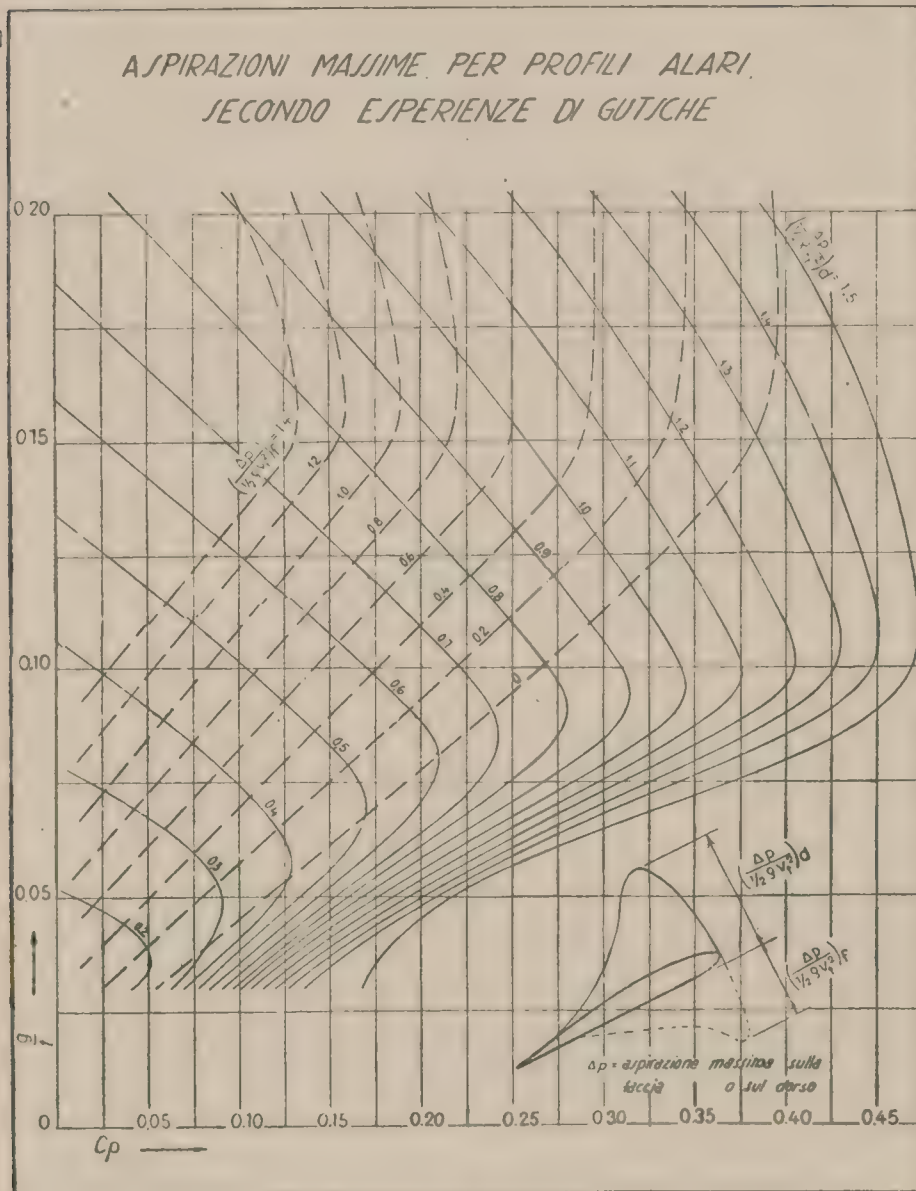


Fig. 19.

nota la velocità v_t , risulta determinabile Δp : se o per la faccia, o per il dorso, la depressione massima così ricavata è superiore alla pressione statica incombente sulla sezione di raggio r diminuita della tensione del vapor d'acqua saturo l'elemento di pala è in fase di cavitazione.

Ripetendo l'analisi per tutti i raggi si può indagare tutta l'elica, ma in genere per eliche funzionanti a pieno regime è sufficiente fare la verifica per la zona da 0,7 a 0,9 R .

Questo per grandi linee il procedimento che mi ero proposto di esporre. Perchè però i risultati siano sufficientemente attendibili il metodo richiede tre perfezionamenti.

1° Tutto quanto qui esposto vale genericamente per un segmento di profilo alare, ma quando si applica più particolarmente all'elica è da considerare che la componente periferica u_p della velocità di regresso dà luogo ad una forza centrifuga, in conseguenza della quale la pressione nella scia dell'elica è inferiore a quella che si ha nello spazio circostante. Ne consegue a parità di spinta dS_1 come precedentemente calcolata un effettivo angolo di funzionamento β maggiore di γ .

Per tale maggiorazione l'Hembold ⁽¹⁵⁾ ha trovata un'espressione notevolmente complicata i cui risultati sono riassunti nel grafico della fig. 20. In esso si entra coi valori del rapporto $\xi = \frac{u_p}{v_t}$ di $\tan \gamma$ e di $\tan \gamma \cdot \frac{r}{R}$.

In conseguenza di questo passaggio da γ a β risultano le seguenti nuove espressioni di v_t e dS_2 .

$$(14') \quad v_t = AN = \frac{\omega \cdot r - u_p/2}{\cos \beta}$$

$$(16') \quad i = \theta - \beta$$

$$(17') \quad dS_2 = \rho \cdot C_p \cdot t \cdot dr \cdot v_t^2 \cos \beta.$$

2° Per la derivazione della relazione (14) abbiamo supposto che la velocità dell'acqua sia costante lungo tutta una circonferenza di raggio r ; in effetti così non è, specialmente verso la periferia dell'elica, dove le pale sono più distanziate. Quivi la velocità ha un massimo in corrispondenza delle pale, ed un minimo fra le stesse, per cui la spinta sarà una frazione k_r di quella prima calcolata

$$(15') \quad dS_1 = k_r \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot dr \cdot (v_e + u_a/2) \cdot u_a.$$

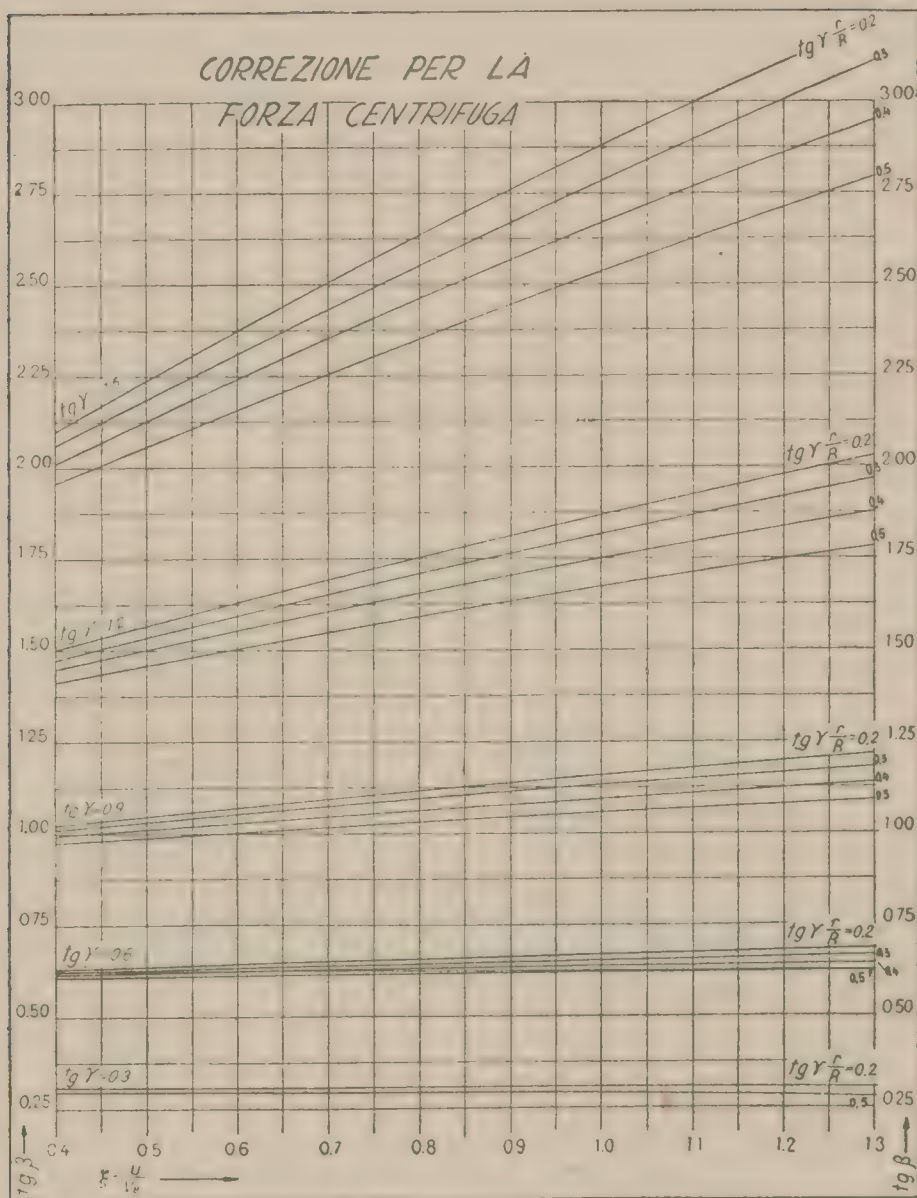


Fig. 20.

Il valore di k_r secondo Prandtl è funzione del raggio r , del numero delle pale z , dell'angolo γ (elementi tutti noti una volta fissato u_i) secondo la relazione che è riportata sotto forma grafica facilmente calcolabile nel diagramma della figura 21.

3° I coefficienti di portanza di cui ai grafici 16 e 17 sono relativi a profili sperimentati isolatamente, mentre nel caso delle eliche, e specialmente in vicinanza del mozzo, si verifica un sensibile effetto di mutua induzione (normalmente detto effetto cascata), di una pala sull'altra, per cui a parità di valore di C_p si richiede un aumento di incidenza.

Tale variazione secondo esperimenti eseguiti da Gutsche è funzione del rapporto $\frac{C}{t}$ (C distanza delle pale, t larghezza dell'elemento di pala) (v. fig. 22), della grossezza relativa g/t , del coefficiente di portanza C_p , dell'angolo di funzionamento β secondo la relazione

$$(18) \quad \Delta i = \Delta \alpha_1 \cdot \frac{g}{t} + \Delta \alpha_2 \cdot C_p$$

nella quale $\Delta \alpha_1$ e $\Delta \alpha_2$ si leggono sul grafico della fig. 22.

Le correzioni per quanto esposto ai nn. 1 e 3 sono notevoli solamente in vicinanza del mozzo, quelle per il n. 2 verso la periferia. L'entità e l'andamento di quest'ultima sono chiaramente visibili dal grafico della fig. 21; per quanto riguarda le altre due si riportano qui a titolo di esempio i valori che assumono ai diversi raggi per un'elica navale tipo delle seguenti caratteristiche:

Numero delle pale 3

Rapporto passo-diametro variabile da 1,2 in corrispondenza del mozzo a 1,00 alla periferia

Rapporto superficie sviluppata — area disco 0,54

Rapporto spessore massimo della sezione radiale — diametro 0,037

Raggi	0,25 R	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90
Correzioni per depressione in scia $\frac{\tan \beta}{\tan \gamma}$. .	1,275	1,20	1,10	1,058	1,038	1,025	1,018	1,016
Correzioni per effetto cascata in gradi Δ_i .	1°, 12	1°, 10	0°, 98	0°, 83	0°, 62	0°, 41	0°, 22	0°, 06

In definitiva pertanto il procedimento da seguire può essere il seguente.

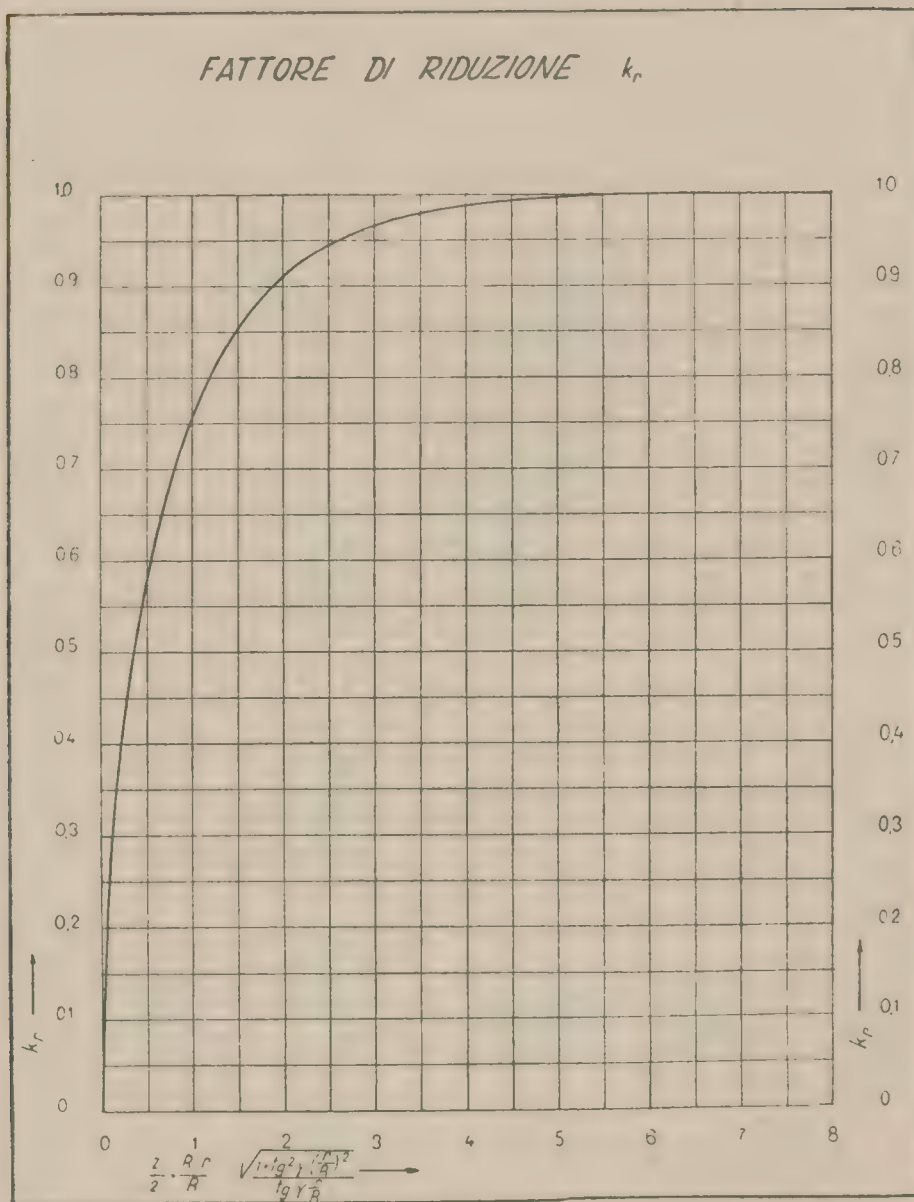


Fig. 21.

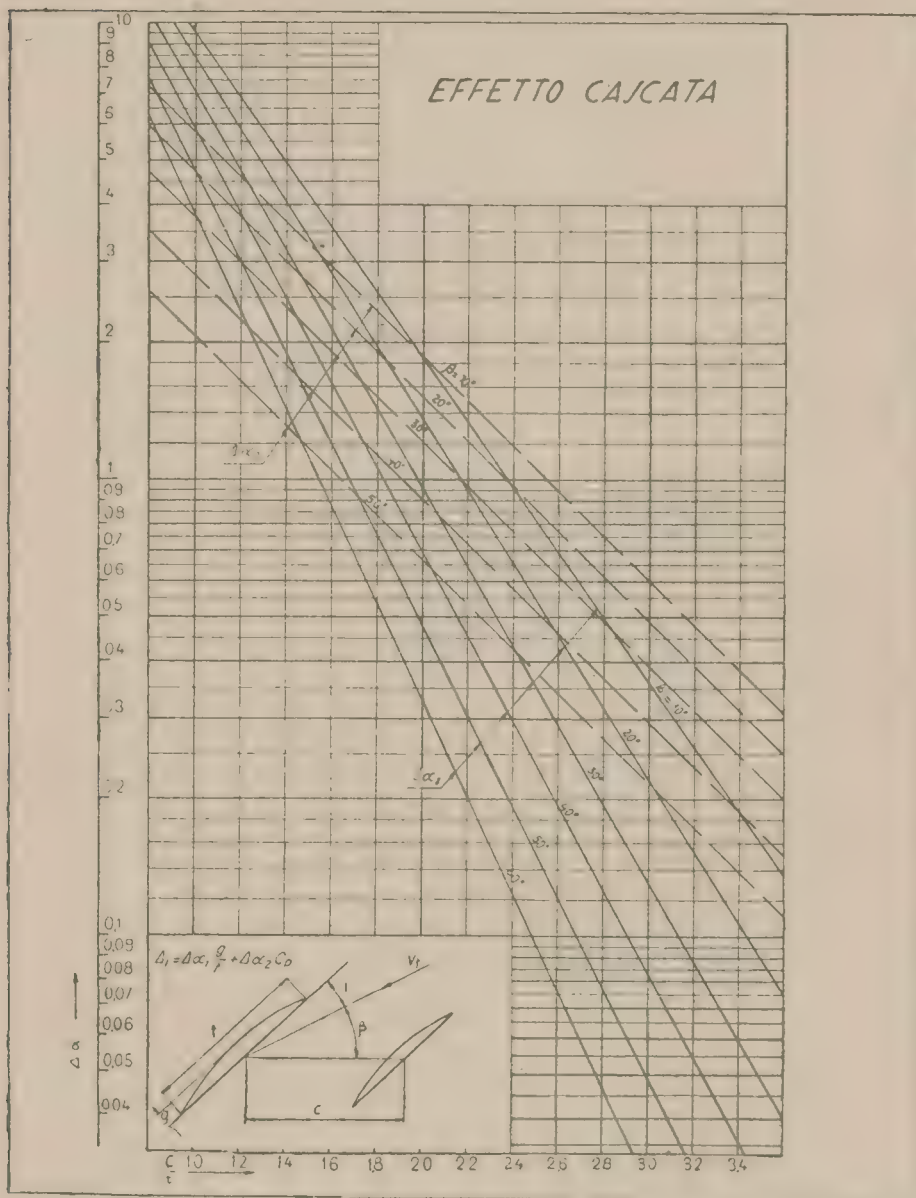


Fig. 22.

Con riferimento alla fig. 15 sono noti il passo P , la velocità angolare ω , la velocità d'avanzo v_a corretta per la scia locale, i conseguenti angoli λ e ϑ , nonché il numero delle pale e le dimensioni g e t dell'elemento di raggio r . Si assegna ad u un prefissato valore e si calcolano gli incrementi al disco $u_t/2$, $u_a/2$, $u_p/2$, l'angolo di funzionamento γ , il rapporto $\xi = \frac{u}{v_a}$. Dal diagramma della fig. 20 si ricava il valore di k_r e colla relazione (15') si calcola dS_1 .

A mezzo del diagramma 22 si determina il valore dell'angolo β ed in conseguenza si calcolano v_i ed i colle relazioni (14') e (16'). Uguagliando il valore dS_1 determinato colla (15') con quello conseguente dalla (17') si determina il corrispondente valore di C_p .

$$C_p = \frac{dS_1}{\rho \cdot t \cdot dr \cdot v_i^2 \cdot \cos \beta}.$$

A questo valore di C_p compete una incidenza j per pale isolate che si può leggere sui diagrammi 16 o 17 ed una correzione per effetto cascata deducibile colla relazione 18 e col grafico della fig. 22. In totale quindi una incidenza

$$i' = j + \Delta i.$$

Questo valore dell'incidenza non eguaglierà in genere quello calcolato precedentemente colla relazione 16': si dovrà quindi procedere a successivi tentativi (in genere bastano 3 ed una interpolazione grafica) assegnando ad u diversi valori.

Una volta determinato il giusto valore della spinta dS si procede alla verifica della cavitazione nel modo precedentemente esposto.

Indagini eseguite con questo procedimento e controllate con successive prove al tunnel hanno dimostrato una buona concordanza.

10) La cavitazione ed il rendimento dell'elica navale.

È noto che i rendimenti che si raggiungono nella pratica coll'elica navale sono sostanzialmente più bassi di quelli comunemente ottenibili coll'elica aerea. Ciò è in primo luogo da attribuirsi alle limitazioni che il pericolo di cavitazione impone. Per questa ragione infatti le eliche navali hanno spinte specifiche dell'ordine

di grandezza di 1 kg/cm^2 ; con eliche del tipo aereo invece le spinte specifiche sarebbero (sempre nel funzionamento subacqueo) dell'ordine di grandezza di 5 kg/cm^2 .

Le basse spinte specifiche portano a valori grandi della superficie dell'elica, ed, in correlazione con le limitazioni nel diametro imposte dal limitato battente d'acqua, a valori elevati della porzione di disco ricoperta dalle pale (da un minimo di 0,3 fino ad un massimo di 0,8 contro valori medi del 0,10 per le eliche aeree). Ora è ormai assodato, sia in via teorica che sperimentale, che l'aumento di larghezza relativa delle pale porta una diminuzione di rendimento.

Per l'elica navale a tre pale per es. con rapporto superficie sviluppata: area disco = 0,54 e della quale al n. 9 furono dati i valori delle correzioni per depressioni in scia e per effetto cascata, con funzionamento a 250 giri/1', il rendimento, diremmo così ideale, trascurando la resistenza di attrito e l'influenza della forza centrifuga è 0,814; corretto per la depressione in scia diviene 0,783, e corretto per la resistenza d'attrito delle pale scende a 0,675. Evidentemente questa forte caduta sarebbe assai attenuata con un rapporto superficie sviluppata: area disco = 0,10 anziché 0,54. A conferma di ciò sta il fatto che alcuni centri di studio (per es. la Vasca olandese), già da tempo sogliono progettare le eliche navali con procedimenti sostanzialmente uguali a quelli in uso per le eliche aeree; ma, come già accennai, scarso è stato il guadagno in rendimento, dell'ordine di grandezza del 2%.

Naturalmente tutto ciò non porta a concludere che i nuovi studi e le recenti teorie siano di poca utilità: anzi l'opposto. Poiché anche l'elica navale, compatibilmente con le necessità che le sono proprie, è giunta ad un grado di bontà già elevato, ulteriori progressi non saranno da attendersi senza una conoscenza sempre più intima e profonda del suo comportamento idrodinamico. E perchè, col continuo accrescersi di tutte le caratteristiche delle navi (grandezza, velocità, potenza motrice, giri) le eliche navali già si trovano e più si troveranno in seguito, a lavorare nelle condizioni limiti di inizio della cavitazione, il quale fenomeno sembra dar luogo al formarsi di un'onda d'urto in tutto simile a quella che si manifesta nelle eliche aeree funzionanti a velocità sonore, nasce di qui una sempre maggiore analogia di funzionamento e quindi la necessità e l'utilità di un più stretto coordinamento delle teorie dell'elica aeronautica e dell'elica navale.

BIBLIOGRAFIA

- (1) H. FÖTTINGER, *Versuche über einige typische Kavitationserscheinungen. Hydromechanische Probleme des Schiffsantriebs, Teil I.* (H.P.d.S.).
- (2) H. MUELLER, *Kinematographische Aufnahme der Kavitation an einem Tragflügel* (H.P.d.S.).
- (3) E. MARTYRER, *Kraftmessungen an Widerstandskörpern und Flügelprofilen in Wasserstrom bei Kavitation* (H.P.d.S.).
- (4) D. RIABOUSHINSKY, *Théorie cavitationnelle de la résistance des fluides. Congrès International de Mécanique appliquée, Stockholm, 1930.*
- (5) F. WEINIG, *Die Ausdehnung des Kavitationsgebietes* (H.P.d.S.).
- (6) NUMACHI & KUROKAWA, «Technology Report of the Tohoku Imp. Univ.», XII-1937, n. 3, XII-1938, n. 4.
- (7) H. LERBS, *Neue Kavitationsversuche* (H.P.d.S.), Teil II.
- (8) O. KELL, *Propeller Cavitation Studies*, «Institution of Naval Architects», 1934.
- (9) F. M. LEWIS, *Propeller Testing Tunnel at the Massachusetts Institute of Technology*, «Transactions of the Society of Naval Architects and Marine Engineers», 1939.
- (10) E. F. EGGERT, *Propeller Cavitation*, «Transactions of the Society of Naval Architects and Marine Engineers», 1932.
- (11) F. GUTSCH, *Versuche an Propellerblattschnitten*, «Mitteilungen der Preussische Versuchsanstalt für Wasserbau und Schiffbau», 1933.
- (12) H. B. HELMBOLD, *Die Betz, Prandtl'sche Wirbeltheorie und ihre Ausgestaltung zum technischen Berechnungsverfahren*. «Werft Reederei Hafen», 1926, n. 22-23.
- (13) K. SCHÖNHERR, *Recent developments in propeller design*, «Transactions of the Society of N. A. and M. E.», 1934.
- (14) W. P. A. LAMMEREN, *The design and calculation of cavitation free wake propellers*, «Netherland Experiment Tank», Publication 26^a.
- (15) H. B. HELMBOLD, *Ueber den Einfluss der Strahl Kontraktion*, «Werft Reederei Hafen», 1933, n. 22.

CAMILLO POSSIO

**L'influenza della superficie libera
sul funzionamento dell'elica marina.**

Riassunto. — *L'A. calcola la resistenza d'onda di un propulsore che avanza in un fluido pesante con superficie libera, rappresentando il campo creato dall'elica mediante una distribuzione uniforme di pozzi eseguita sul disco: coi risultati così ottenuti si determinano, in una prima approssimazione, le modificazioni che la presenza dello specchio libero porta alle caratteristiche di funzionamento del propulsore. Si estende poi lo studio al caso di più eliche disposte in uno stesso piano.*

1. — Il problema dell'elica che avanza in un fluido pesante con superficie libera è stato studiato dal Dickmann ⁽¹⁾, il quale ha determinato, in una prima approssimazione, la dissipazione di energia prodotta dal moto ondoso che il funzionamento di un propulsore isolato crea sulla superficie libera del fluido. Il procedimento seguito dal Dickmann è concettualmente molto semplice, in quanto, tenendo presente che il campo creato dall'elica nello spazio esterno alla scia si può rappresentare, in prima approssimazione, mediante una distribuzione di pozzi eseguita sul disco d'elica, il problema è ricondotto a quello, già studiato dall'Havelock ⁽²⁾, di determinare la resistenza d'onda del campo generato da una data distribuzione di singolarità: è poi ulteriormente semplificato concentrando la distribuzione di pozzi in un unico pozzo collocato nel centro del disco d'elica. In questa Nota vogliamo perfezionare la ricerca del Dickmann, determinando la resistenza d'onda del campo creato dalla distribuzione uniforme

⁽¹⁾ DICKMANN, *Schiffskörper* « Ingenieur-Archiv », dicembre 1938.

⁽²⁾ HAVELOCK, *The theory of wave resistance*. Proceed. of the R. S. of London, 1932.

di pozzi con cui si rappresenta un propulsore che crea un salto di pressione costante fra le due facce del disco, ed estendendo poi il calcolo al caso, non considerato dal Dickmann, in cui siano presenti più eliche.

2. — Disponiamo gli assi di riferimento nel modo indicato nella fig. 1, assumendo la superficie libera del fluido indisturbato

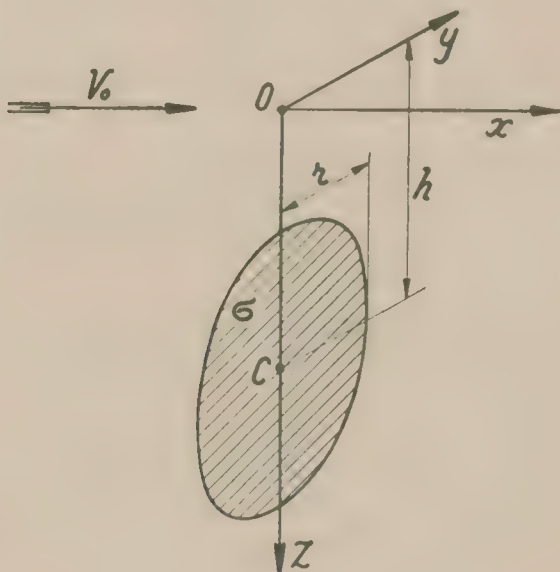


Fig. 1

come piano xy , coll'asse x orientato nella direzione della velocità assintotica V_0 , e collocando l'origine O in modo che il disco d'elica σ giaccia nel piano yz . La resistenza d'onda R_0 del campo generato da una distribuzione uniforme di pozzi eseguita sul cerchio σ ha l'espressione:

$$(1) \quad R_0 = 16\pi \cdot \frac{g^2}{V_0^4} \varrho \cdot \int_0^{\pi/2} \frac{P^2}{\cos^3 \theta} d\theta$$

dove g e ϱ hanno il consueto significato di accelerazione di gravità e di densità del fluido, e la grandezza P è definita dalla relazione:

$$(2) \quad P = m \iint_{\sigma} e^{-\frac{gz}{V_0^2 \cos^3 \theta}} \cdot \cos \frac{gy \sin \theta}{V_0^2 \cos^2 \theta} \cdot dy \cdot dz$$

in cui si indica con $-4\pi m$ la portata per unità di superficie della distribuzione di pozzi ⁽¹⁾. Indicando con r il raggio del disco d'elica e ponendo:

$$z = h + r \cdot \tau \cos \alpha$$

$$y = r \cdot \tau \sin \alpha$$

$$\frac{gh}{V_0^2} = \beta \quad \frac{r}{h} = \varepsilon$$

si ottiene:

$$P = mr^2 \cdot e^{-\frac{\beta}{\cos^2 \theta}} \cdot \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^1 e^{-\frac{\beta \varepsilon}{\cos^2 \theta} \cdot \tau \cos \alpha} \cdot \cos \frac{\varepsilon \beta \sin \theta \cdot \tau \sin \alpha}{\cos^2 \theta} \cdot \tau \cdot d\tau$$

che possiamo anche scrivere nella forma:

$$(3) \quad P = mr^2 \cdot e^{-\frac{\beta}{\cos^2 \theta}} \cdot \Re \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^1 \tau \cdot e^{-\frac{\beta \varepsilon}{\cos^2 \theta} \tau (\cos \alpha + i \sin \theta \sin \alpha)} \cdot d\tau$$

dove il simbolo $\Re$ indica la parte reale di una quantità complessa. Sviluppando in serie l'esponenziale ed integrando rispetto a τ , si trova:

$$(4) \quad P = mr^2 \cdot e^{-\frac{\beta}{\cos^2 \theta}} \cdot \Re \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{(n+2) \cdot n!} \left(\frac{\beta \varepsilon}{\cos^2 \theta} \right)^n \int_0^{2\pi} (\cos \alpha + i \sin \theta \sin \alpha)^n d\alpha.$$

Ora, si ha, indicando con m un numero intero qualsiasi,

$$\int_0^{2\pi} (\cos \alpha + i \sin \theta \sin \alpha)^{2m+1} \cdot d\alpha = 0$$

e

$$\begin{aligned} & \Re \int_0^{2\pi} (\cos \alpha + i \sin \theta \sin \alpha)^{2m} d\alpha = \\ & = \sum_{i=0}^{i=m} (-1)^i \cdot \binom{2m}{2i} \cdot \sin^{2i} \theta \cdot \int_0^{2\pi} \cos^{2(m-i)} \alpha \cdot \sin^{2i} \alpha \cdot d\alpha \end{aligned}$$

per cui, tenendo presente che è:

$$\binom{2m}{2i} \cdot \int_0^{2\pi} \cos^{2(m-i)} \alpha \cdot \sin^{2i} \alpha \cdot d\alpha = 2\pi \cdot \frac{1 \cdot 3 \dots (2m-1)}{2 \cdot 4 \dots 2m} \binom{m}{i}$$

⁽¹⁾ Le (1) e (2) si ottengono immediatamente dall'espressione generale della resistenza d'onda data dall'Havelock nella nota citata, tenendo conto delle condizioni particolari del nostro caso.

come si può dimostrare, ad esempio, col principio d'induzione, si ricava:

$$\Re \int_0^{2\pi} (\cos \alpha + i \sin \theta \sin \alpha)^{2m} d\alpha = 2\pi \frac{1 \cdot 3 \dots (2m-1)}{2 \cdot 4 \dots 2m} \cos^{2m} \theta.$$

Si ha così:

$$(5) \quad P = \pi m r^2 \cdot e^{-\frac{\beta}{\cos^2 \theta}} \cdot \sum_0^{\infty} \frac{(\varepsilon \beta)^{2n}}{4^n \cdot (n+1) \cdot (n!)^2 \cdot \cos^{2n} \theta}$$

da cui, definendo i coefficienti a_n mediante la relazione

$$\left[\sum_0^{\infty} \frac{x^{2n}}{4^n \cdot (n+1) \cdot (n!)^2} \right]^2 = \sum_0^{\infty} a_n x^{2n}$$

si ottiene:

$$P^2 = \pi^2 m^2 r^4 \cdot e^{-\frac{2\beta}{\cos^2 \theta}} \cdot \sum_0^{\infty} \frac{a_n \cdot (\varepsilon \beta)^{2n}}{\cos^{2n} \theta}$$

e quindi si ricava l'espressione della resistenza d'onda:

$$(6) \quad R_0 = 16\pi^3 \varepsilon^2 \beta^2 \cdot \rho m^2 r^2 \cdot \int_0^{\pi/2} \sum_0^{\infty} a_n (\varepsilon \beta)^{2n} \frac{e^{-\frac{2\beta}{\cos^2 \theta}}}{\cos^{2n+3} \theta} d\theta.$$

Osserviamo che nel calcolo di R_0 è lecito effettuare l'integrazione per serie, in quanto l'espressione che compare sotto il segno d'integrale rappresenta una serie convergente in tutto l'intervallo

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, e le somme parziali

$$A_m = \sum_{i=0}^{i=m} a_i (\varepsilon \beta)^{2i} \frac{e^{-\frac{2\beta}{\cos^2 \theta}}}{\cos^{2i+3} \theta}$$

sono ugualmente limitate ⁽¹⁾, come possiamo facilmente verificare. Difatti, è:

$$A_m < \frac{P^2}{\pi^2 m^2 r^4 \cdot \cos^3 \theta}$$

⁽¹⁾ Cfr. ad es. VITALI-SANSONE, *Moderna teoria delle funzioni di variabile reale* - parte I, pag. 119.

in quanto i coefficienti a_n sono positivi; d'altra parte, per P^2 si ha la disuguaglianza (10) che dimostreremo in seguito, di modo che risulta senz'altro:

$$A_m < \frac{2e^{-2\beta(1-\varepsilon)}}{\pi(\varepsilon\beta)^3}.$$

Erguendo l'integrazione per serie ed effettuando la sostituzione di variabili

$$\frac{1}{\cos \theta} = Ch u$$

dove Ch indica il coseno iperbolico, si ottiene infine:

$$(7) \quad \frac{R_0}{\rho m^2 r^2} = 16 \pi^3 \varepsilon^2 \cdot \sum_0^{\infty} a_n \cdot \varepsilon^{2n} \cdot I_n(\beta)$$

in cui $I_n(x)$ è la funzione definita dalla relazione:

$$I_n(x) = x^{2n+2} \cdot e^{-x} \cdot \int_0^{\infty} e^{-xCh^2 u} \cdot Ch^{2n+2} u \cdot du.$$

Ponendo la resistenza d'onda della forma

$$R_0 = 8\pi\rho \cdot \left(\frac{\pi m r^2}{h}\right)^2 \cdot f$$

datale dal Dickmann, si ha per la funzione f l'espressione:

$$(8) \quad f = 2 \cdot \sum_0^{\infty} a_n \cdot \varepsilon^{2n} \cdot I_n(\beta).$$

Il Dickmann, che concentra la distribuzione di pozzi in un unico pozzo disposto nel centro dell'elica, fa $\varepsilon = 0$, e quindi trova per f il valore approssimato

$$f' = 2I_0(\beta)$$

ciò che equivale a ridurre la funzione f al suo termine della serie (8).

3. — Le funzioni $I_n(x)$ sono intimamente legate alle funzioni cilindriche K_n introdotte dal Watson, mediante le quali si potrebbero facilmente esprimere: per il calcolo numerico è però più comodo servirsi senz'altro di una relazione ricorrente che si ricava con un'integrazione per parti. Scrivendo:

$$I_n(x) = x^{2n+2} \cdot e^{-x} \int_0^{\infty} e^{-xChu} \cdot Ch^{2n+1}u \cdot Chu \cdot du$$

ed assumendo Chu come fattore da integrare, si trova immediatamente:

$$(9) \quad 4I_{n+1}(x) - 2(n+1 + 2x)x \cdot I_n(x) + (2n+1)x^3 \cdot I_{n-1}(x) = 0$$

di modo che basta conoscere i valori di I_{-1} e I_0 per dedurre successivamente i valori di tutte le I_n . Ora, dalla nota espressione delle funzioni cilindriche di terza specie con argomento immaginario puro ⁽¹⁾:

$$H_n^{(2)}(-ix) = i^{n+1} \cdot \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-xChu} \cdot Chnu \cdot du \quad (x > 0)$$

si hanno le relazioni

$$I_{-1}(x) = -\frac{\pi}{4} \cdot iH_0^{(2)}(-ix) \cdot e^{-x}$$

$$I_0(x) = -\frac{\pi}{8} [iH_0^{(2)}(-ix) + H_1^{(2)}(-ix)] \cdot x^2 e^{-x}$$

che permettono di calcolare senz'altro i valori numerici di I_{-1} e I_0 . Il calcolo numerico di f è abbastanza rapido, sino a che β non assume valori elevati, anche per $\varepsilon = 1$, in quanto è sufficiente calcolare pochi termini della serie. Per valori molto elevati di β e per ε prossimo ad 1, il calcolo di f a mezzo della (8) diventerebbe poco agevole: è facile però riconoscere direttamente che f si annulla per $\beta \rightarrow \infty$. Osserviamo che si ha ovviamente:

$$|P| < m \iint_{\sigma} e^{-\frac{uz}{V^2 \cos^2 \theta}} \cdot dy \cdot dz$$

⁽¹⁾ Cfr. JAHNKE e EMDE, *Funktionentafeln*.

per cui, essendo il cerchio σ interno alla parabola γ di equazione:

$$z = h - r + \frac{y^2}{2r}.$$

la disuguaglianza vale a maggior ragione se si estende l'integrale doppio a γ . Ora, è:

$$\begin{aligned} \iint_{\gamma} e^{-\frac{gz}{V^2 \cos^2 \theta}} \cdot dy \cdot dz &= \frac{2}{r} e^{-\frac{\beta(1-\varepsilon)}{\cos^2 \theta}} \cdot \int_0^{\infty} y^2 \cdot e^{-\frac{\beta\varepsilon \cdot (y/r)^2}{2 \cos^2 \theta}} \cdot dy = \\ &= \sqrt{\frac{2\pi\varepsilon}{\beta}} \cdot \frac{h^2}{\beta} \cdot e^{-\frac{\beta(1-\varepsilon)}{\cos^2 \theta}} \cdot \cos^2 \theta \end{aligned}$$

di modo che risulta:

$$(10) \quad P^2 < \frac{2\pi m^2 \varepsilon h^4}{\beta^3} e^{-2\beta(1-\varepsilon)} \cdot \cos^6 \theta.$$

Si ottiene così:

$$R_0 < \frac{64}{3} \pi^2 \cdot \rho m^2 h^2 \cdot \frac{\varepsilon \cdot e^{-2\beta(1-\varepsilon)}}{\beta}$$

e quindi si conclude che per $\beta = \infty$ il coefficiente f , supposto $\varepsilon < 1$, tende a zero più rapidamente di qualunque potenza negativa di β , mentre anche nel caso limite $\varepsilon = 1$ tende a zero *almeno* come $\frac{1}{\beta}$. Il diagramma della funzione f è riportato, per alcuni valori di ε , nella fig. 2, assumendo come ascisse, in luogo della variabile β , il numero di Froude F definito dalla relazione:

$$F = \frac{V_0}{\sqrt{gh}} = \frac{1}{\sqrt{\beta}}.$$

I valori di f per $\varepsilon = 1$ non sono stati calcolati nell'intervallo $0 < F < 0,35$: nella figura 2 è stato segnato a tratti l'andamento presumibile del diagramma, tenendo conto del fatto che per $F = 0$ è $f = \frac{df}{dF} = 0$. Per valori di F superiori a 2,5 si può assumere con sufficiente approssimazione l'espressione assintotica di f , che si ricava immediatamente osservando che è:

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{f}{\beta} = \frac{1}{2}$$

e quindi risulta:

$$f \sim \frac{1}{2F^2} \quad (\text{per } F \rightarrow \infty)$$

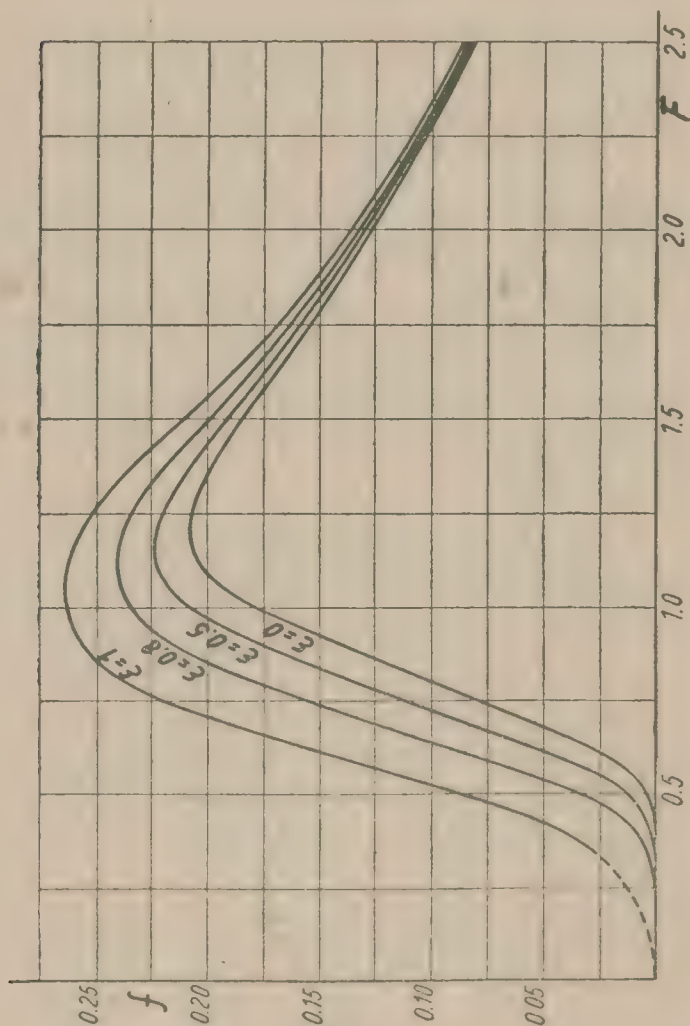


Fig. 2.

Il valore f' trovato dal Dickmann coincide col valore di per $\varepsilon = 0$: dal diagramma di fig. 2 si rileva quindi come la semplificazione introdotta dal Dickmann sia accettabile solo per valori sufficientemente elevati del numero di Fronde. Si noti che per valori di F prossimi a zero il rapporto — diventa infinito, ciò che può parere in contraddizione col fatto che il

Dickmann ha giustificato la semplificazione da lui introdotta, dimostrando come sulla superficie libera la velocità indotta dell'elica si possa calcolare con ottima approssimazione, anche nel caso di rapporti $\frac{r}{h}$ abbastanza elevati, sostituendo alla distribuzione di pozzi su σ un unico pozzo disposto nel centro di σ . Questa considerazione dimostra però soltanto che la semplificazione del Dickmann conduce a determinare in modo soddisfacente il campo addizionale che si deve sovrapporre al campo creato dall'elica per realizzare la condizione di pressione costante sulla superficie libera. Ora, la resistenza d'onda di una distribuzione uniforme di pozzi eseguita su σ è proporzionale al valore medio che la componente secondo x della velocità addizionale assume su di σ : perchè la semplificazione del Dickmann risulti accettabile, è quindi necessario che il valore medio su σ di tale componente sia prossimo al valore assunto in C , ciò che a priori è ammissibile solo se ε è prossimo a zero.

4. — L'espressione (7) rappresenta la resistenza d'onda del campo creato da una distribuzione uniforme di pozzi su σ , campo che coincide con quello creato dal propulsore soltanto nello spazio esterno alla scia: sarà quindi opportuno dimostrare in modo rigoroso che la (7) rappresenta effettivamente la resistenza d'onda del propulsore. Indichiamo con C_1 e C_2 i campi di velocità creati nel fluido indefinito dalla distribuzione di pozzi e dal propulsore, e con C^* il campo addizionale che si deve sovrapporre, tanto a C_1 quanto a C_2 perchè sia soddisfatta sulla superficie libera la condizione di pressione costante: se R_1 , R_2 , R_1^* , R_2^* rappresentano le azioni dinamiche che il fluido esercita sul disco d'elica nei campi di moto C_1 , C_2 , $C_1 + C^*$, $C_2 + C^*$, è:

$$R_1^* - R_1 = R_2^* - R_2.$$

A tale relazione si giunge immediatamente se si calcola l'azione dinamica della corrente mediante il teorema della quantità di moto applicato al fluido contenuto entro una superficie qualsiasi che racchiuda σ , ad esempio entro la superficie limitata dal piano $z = 0$ e dalla sfera di centro O e di raggio r che faremo tendere all'infinito, tenendo presente che i campi C_1 e C_2 coincidono al di fuori della scia, e che la velocità addizionale si annulla all'infinito. Ora, le componenti secondo x di $R_1 - R_1^*$ e $R_2 - R_2^*$ rappresentano per definizione la resistenza d'onda della distri-

buzione di pozzi e quella dell'elica, e quindi si può concludere che la (7) esprime effettivamente la resistenza d'onda del propulsore.

5. — Vogliamo ora indicare come si possano determinare, in modo approssimato, ma soddisfacente per gli scopi pratici, le modificazioni che le caratteristiche dell'elica subiscono per effetto della presenza della superficie libera: a tale scopo basterà osservare che l'influenza del campo addizionale si può presunibilmente rappresentare abbastanza bene supponendo che l'elica sia investita, invece che dalla sola corrente V_0 , da una corrente $V_0 + V_m^*$, dove V_m^* indica il valore medio che la velocità addizionale assume sul disco d'elica. Ora, è noto che l'inclinazione della corrente rispetto all'asse dell'elica non ha influenza sensibile, sino a che non assume valori rilevanti, sulla trazione e sulla coppia dell'elica, per cui, dato che questi sono i soli elementi che praticamente interessano, possiamo supporre che l'elica funzioni nel fluido indefinito, tenendo conto della presenza della superficie libera semplicemente col dare alla velocità assintotica V_0 l'incremento u_m^* , indicando con u_m^* la componente di V_m^* secondo l'asse x . Per determinare l'espressione di u_m^* , notiamo che la resistenza d'onda è rappresentata dalla componente secondo $-x$ dell'azione dinamica che il campo C^* esercita sulla distribuzione di pozzi, la quale ha il valore:

$$4\pi m \cdot \pi r^2 \cdot \rho \cdot u_m^*$$

per cui risulta:

$$u_m^* = 2\pi m \cdot \varepsilon^2 \cdot f(\beta, \varepsilon).$$

Convienne sostituire alla grandezza m un elemento che abbia un significato fisico più evidente; assumiamo come tale l'incremento di velocità al disco u_d che si ha nell'elica funzionante nel fluido indefinito. Tenendo conto che è $u_d = 2\pi m$, si ha senz'altro:

$$(11) \quad \frac{u_m^*}{u_d} = \varepsilon^2 \cdot f(\beta, \varepsilon).$$

È ora ovvio come si possano calcolare le caratteristiche effettive di funzionamento dell'elica. Noti i numeri di giri n e la velocità d'avanzamento V_0 , si determina l'incremento al disco u_d : dalla (11) si ottiene il valore di u_m^* , e quindi si calcolano le carat-

teristiche effettive in base al numero di giri n e alla velocità d'avanzamento $V_0 + u_m^*$. Il procedimento potrebbe evidentemente essere iterato: dato però che u_m^* risulta sempre abbastanza piccola di fronte a V_0 , è sufficiente la prima approssimazione.

L'elemento che presenta maggior importanza nel funzionamento dell'elica è il rendimento: è quindi particolarmente interessante determinare la perdita di rendimento provocata dal moto ondoso della superficie libera. Se con P si indica la potenza assorbita dall'elica e con T la trazione sviluppata, si ha:

$$\eta_e = \frac{TV_0}{P}$$

$$\bar{\eta} = \frac{T(V_0 + u_m^*)}{P}$$

dove η_e ed $\bar{\eta}$ rappresentano rispettivamente il rendimento effettivo dell'elica e il rendimento che si avrebbe nel fluido indefinito. Risulta così:

$$\eta_e = \bar{\eta} \frac{1}{1 + \frac{u_m^*}{V_0}}$$

da cui, tenendo presente che $\frac{u_m^*}{V_0}$ è piccolo di fronte all'unità, si ottiene per la perdita di rendimento relativa l'espressione:

$$(12) \quad \frac{\bar{\eta} - \eta_e}{\bar{\eta}} \sim \varepsilon^2 \cdot f \cdot \frac{u_d}{V_0}.$$

La perdita di rendimento è sempre molto bassa: anche per i numeri di Froude per cui f ha i valori massimi, e per elica molto caricata, occorre che ε sia prossimo all'unità per avere dei valori sensibili. Ad esempio per $\frac{u_d}{V_0} = 0,25$ il valore massimo di $\frac{\bar{\eta} - \eta_e}{\bar{\eta}}$ per $\varepsilon = 1$ è 0,066 ($F = 1,05$), mentre per $\varepsilon = 0,8$ scende a 0,0384 ($F = 1,1$) e per $\varepsilon = 0,5$ a 0,016 ($F = 1,15$).

Le esperienze confermano bene, anche numericamente, i risultati che abbiamo ottenuti, sino a che ε è inferiore a $0,75 \div 0,8$. Per valori di ε dell'ordine di $0,8 \div 0,9$ e tanto più quando parte dell'elica esce dall'acqua, la perdita di rendimento è molto supe-

riore a quella che si ricaverebbe dalla (12): in queste condizioni è però ovvio che le ipotesi poste a base della nostra teoria cadono completamente e quindi non è più da attendersi che essa dia risultati attendibili.

6. — Sinora abbiamo supposto che la perturbazione nel fluido sia creata unicamente dal funzionamento di un propulsore: vogliamo ora considerare il caso in cui siano presenti due o più eliche. Per determinare la modificazione che la presenza della superficie libera apporta alle caratteristiche di un generico propulsore P_i dobbiamo, secondo quanto è stato indicato nel paragrafo precedente, calcolare il valore medio u_{mi}^* che la componente secondo x della velocità addizionale complessiva assume sul cerchio σ_i che costituisce il disco d'elica di P_i . Ora, il valore medio della velocità addizionale creata dal propulsore P_i stesso è data dalla (11): si tratta quindi soltanto di calcolare il valore medio della velocità addizionale creata dagli *altri* propulsori, ciò che si può fare, come vedremo, semplicemente riducendo i vari dischi d'elica ai loro centri. Infatti, per quanto è stato osservato a fine del paragrafo 3, la velocità addizionale creata da una distribuzione uniforme di pozzi eseguiti sul disco σ_j può essere calcolata sostituendo la distribuzione di pozzi con un unico pozzo disposto nel centro C_j di σ_j : d'altra parte, è presumibile, dato che C_j è esterno a σ_i ed ha da C_i una distanza dell'ordine di grandezza del diametro di σ_i , che su di σ_i la velocità addizionale considerata sia espressa abbastanza bene da una funzione lineare in y e z , in modo da poter assumere come suo valore medio il valore assunto nel centro C_i ⁽¹⁾. Abbiamo così ricondotto il problema della determinazione di u_{mi}^* al calcolo della componente u^* della velocità addizionale creata da un pozzo: tenendo poi presente che in pratica i propulsori sono sempre disposti press'a poco in uno stesso piano, potremo limitarci a calcolare u^* nei punti appartenenti allo stesso piano $x = \text{cost.}$ in cui è collocato il pozzo.

7. — Disponiamo un pozzo di portata $-4\pi m$ nel punto di coordinate $0, 0, h$: il potenziale Φ^* del campo aggiuntivo che la

(1) Si osservi che quanto abbiamo esposto non è in contraddizione col rilievo fatto alla teoria del Dickmann nel paragrafo 3: infatti, nel caso del Dickmann si tratta di calcolare il valore medio che la velocità addizionale creata da un pozzo disposto in C_j assume su un cerchio di cui C_i stesso è il centro, mentre nel nostro caso si tratta di calcolare tale valore medio su un cerchio a cui C_i è esterno.

singularità crea nel fluido si ricava passando al limite per $\mu = 0$ nella formola (65) della nota del Dickmann, che dà l'espressione del potenziale Φ creato dalla stessa singularità in un fluido soggetto a una forza di carattere dissipativo e di intensità proporzionale a μ . Per avere quindi il valore $u^*(y, z)$ che la componente secondo x della velocità aggiuntiva assume nei punti del piano yz , basterà derivare rispetto ad x l'espressione di Φ^* e porre $x = 0$: si ottiene così, con facili passaggi,

$$(13) \quad u^*(y, z) = 4m \frac{g^2}{V_0^4} \cdot \int_0^{\pi/2} \frac{e^{-g \frac{z+h}{V_0^2 \cos^2 \theta}}}{\cos^3 \theta} \cdot \cos \frac{gy \sin \theta}{V_0^2 \cos^2 \theta} \cdot d\theta.$$

Ponendo per semplicità:

$$g \frac{z+h}{2V_0^2} = \beta \quad \frac{2|y|}{z+h} = \lambda$$

e sviluppando in serie il termine

$$\cos \frac{gy \sin \theta}{V_0^2 \cos^2 \theta},$$

si ha:

$$(14) \quad u^*(y, z) = 4m \frac{g^2}{V_0^4} \cdot \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n!} (\lambda\beta)^{2n} \int_0^{\pi/2} e^{-\frac{2\beta}{\cos^2 \theta}} \frac{\sin^{2n} \theta}{\cos^{4n+3} \theta} \cdot d\theta$$

in cui si è supposta lecita l'integrazione per serie. Per dimostrarne la legittimità, basterà osservare che la serie

$$\sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n!} (\lambda\beta)^{2n} \cdot e^{-\frac{2\beta}{\cos^2 \theta}} \cdot \frac{\sin^{2n} \theta}{\cos^{4n+3} \theta} = \frac{e^{-\frac{2\beta}{\cos^2 \theta}}}{\cos^3 \theta} \cdot \cos \frac{\lambda\beta \sin \theta}{\cos^2 \theta}$$

è convergente nell'intervallo d'integrazione e che le somme parziali

$$A_m = \sum_0^m \frac{(-1)^n}{2n!} \cdot e^{-\frac{2\beta}{\cos^2 \theta}} \cdot \frac{\sin^{2n} \theta}{\cos^{4n+3} \theta} \cdot (\lambda\beta)^{2n}$$

sono, come vedremo, ugualmente limitate. Per la formola del resto di Lagrange, è:

$$\cos x = \sum_0^m \frac{(-1)^n}{2n!} x^{2n} + \varepsilon \frac{x^{2m+2}}{(2m+2)!}$$

con $|\varepsilon| < 1$, di modo che, ponendo in luogo di x la quantità $\frac{\lambda\beta \sin \theta}{\cos^2 \theta}$ e moltiplicando per la grandezza $e^{-\frac{2\beta}{\cos^2 \theta}}$, risulta senz'altro:

$$A_m < \left| \frac{e^{-\frac{2\beta}{\cos^2 \theta}}}{\cos^3 \theta} \cos \frac{\lambda\beta \sin \theta}{\cos^2 \theta} \right| + \left| \frac{(\lambda\beta)^{2m+2}}{(2m+2)!} e^{-\frac{2\beta}{\cos^2 \theta}} \frac{\sin^{2m+2} \theta}{\cos^{4m+7} \theta} \right|$$

Ora, il primo termine del secondo membro è una funzione di θ finita e continua in tutto l'intervallo $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, compreso l'estremo $\theta = \frac{\pi}{2}$, in quanto β è diverso da zero, e pertanto ammette un valore massimo: basterà quindi dimostrare che altrettanto avviene del secondo termine, che per semplicità indicheremo con $f_{m+1}(\theta)$. Ponendo $\xi = \frac{1}{\cos^2 \theta}$, $f_n(\theta)$ risulta inferiore od al più uguale alla quantità

$$\frac{(\lambda\beta)^{2n}}{2n!} \cdot e^{-2\beta\xi} \cdot \xi^{2n+2}$$

che nel campo di variabilità $\xi \geq 1$ ammette il valore massimo

$$\varphi_n = \left(\frac{n+1}{e} \right)^{2n+2} \cdot \frac{\lambda^{2n}}{\beta^2 \cdot 2n!}.$$

Si verifica facilmente che è:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}} = \frac{\lambda^2}{4}$$

di modo che per $\lambda < 2$ le quantità φ_n ammettono un massimo: si conclude così che le somme parziali A_m sono, per qualsiasi valore di θ e di m , inferiori in valore assoluto ad una quantità fissa, e quindi è lecita, *limitatamente al campo* $\lambda < 2$, l'integrazione per serie. Effettuando la sostituzione di variabili

$$\frac{1}{\cos \theta} = Ch \frac{u}{2}$$

e definendo le funzioni $A_n(x)$ e $B_n(x)$ mediante le relazioni:

$$A_n(x) = \frac{e^{-x} \cdot x^{2n+2}}{2n!} \cdot \int_0^\infty e^{-xChu} \cdot Sh^{2n}u \cdot d\dot{u}$$

$$B_n(x) = \frac{e^{-x} \cdot x^{2n+2}}{2n!} \cdot \int_0^\infty e^{-xChu} \cdot Chu \cdot Sh^{2n}u \cdot du$$

la (14) assume la forma definitiva:

$$(15) \quad u^* \cdot \frac{(z+h)^2}{4m} = \sum_0^\infty (-1)^n \cdot (A_n(\beta) + B_n(\beta)) \cdot \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{2n}.$$

Per calcolare i valori delle quantità A_n e B_n si procede in modo del tutto analogo a quanto si è fatto nel paragrafo 3 per le funzioni I_n . Con un'integrazione per parti si ottengono difatti le relazioni ricorrenti:

$$(16) \quad \begin{aligned} x^2 \cdot A_{n-1}(x) + 4n^2 \cdot A_n(x) - 2nx \cdot B_n(x) &= 0 & (\text{per } n \geq 1) \\ B_n(x) - (2n+2) \cdot A_{n+1}(x) &= 0 & (\text{per } n \geq 0) \end{aligned}$$

che unite alle espressioni:

$$(17) \quad \begin{aligned} A_0(x) &= -\frac{\pi}{2} e^{-x} \cdot x^2 \cdot iH_0^{(2)}(-ix) \\ B_0(x) &= -\frac{\pi}{2} e^{-x} \cdot x^2 \cdot H_1^{(2)}(-ix) \end{aligned}$$

permettono di calcolare successivamente con facilità i valori delle varie funzioni A_n e B_n ⁽¹⁾. È interessante ricavare, come già fatto per la funzione f , l'espressione assintotica di u^* per

⁽¹⁾ Si osservi che avendo dimostrato la legittimità dell'integrazione per serie della (14) nell'ipotesi $\lambda < 2$, risulta che la (15) è convergente almeno sino a $\lambda = 2$: ora, si può riconoscere più precisamente che il raggio di convergenza della (15) è proprio $\lambda = 2$. Dalle relazioni ricorrenti si deduce infatti con facili passaggi che è:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n(x) + B_n(x)}{A_{n-1}(x) + B_{n-1}(x)} = 1.$$

numeri di Froude tendenti all'infinito, cioè per β tendente a zero. Dalle (16) si ricava, per $x \rightarrow 0$,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{A_n(x)}{B_n(x)} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{B_n(x)}{B_{n-1}(x)} = 1 \quad (\text{per } n \geq 1)$$

mentre dalle (17) si ha, tenendo presente il comportamento delle funzioni $H_0^{(2)}$ e $H_1^{(2)}$ per $x \rightarrow 0$,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{A_0(x)}{x} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{B_0(x)}{x} = 1$$

e quindi si ottiene immediatamente:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{A_n(x) + B_n(x)}{x} = 1 \quad (\text{per } n \geq 0).$$

Si ha così:

$$u^* \cdot \frac{(z+h)^2}{4m} \sim \beta \cdot \sum_0^{\infty} (-1)^n \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{2n} \quad (\text{per } \beta \rightarrow 0)$$

ossia

$$(18) \quad u^* \cdot \frac{(z+h)^2}{4m} \sim \frac{\beta}{1 + \left(\frac{\lambda}{2}\right)^2} \quad (\text{per } \beta \rightarrow 0)$$

formola che naturalmente è valida soltanto per $\lambda < 2$.

8. — Sostituiamo alla grandezza m la sua espressione in funzione dell'incremento al disco u_d e del raggio r dell'elica

$$m = \frac{r^2}{2} \cdot u_d$$

e poniamo la velocità addizionale in una forma analoga alla (11): la (15) si trasforma allora nella

$$(19) \quad \frac{u^*}{u_d} = \left(\frac{2r}{z+h}\right)^2 \cdot \varphi(\beta, \lambda)$$

in cui la funzione φ ha l'espressione:

$$(20) \quad \varphi = \frac{1}{2} \cdot \sum_0^{\infty} (-1)^n \cdot (A_n(\beta) + B_n(\beta)) \cdot \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{2n}$$

Nella fig. 3 sono stati segnati i diagrammi di φ per alcuni valori di λ , assumendo come ascisse, in luogo dei coefficienti β , i numeri di Froude

$$F = \frac{V_0}{\sqrt{g \frac{z+h}{2}}} = \frac{1}{\beta}.$$

Per valori di F superiori a 2,5 si può assumere per φ la sua espressione assintotica, che si ricava immediatamente dalla (18):

$$(21) \quad \varphi \sim \frac{1}{2F^2} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{\lambda}{2}\right)^2} \quad (\text{per } F \rightarrow \infty)$$

Possiamo così determinare l'espressione del valore medio della velocità addizionale nel caso siano presenti n eliche disposte in uno stesso piano $x = 0$: se indichiamo con y_i , z_i e r_i le coordinate del centro e il raggio del propulsore P_i , e con u_{di} il relativo incremento al disco, si ha:

$$u_{mi}^* = u_{di} \cdot \varepsilon_i^2 \cdot f(\beta_i, \varepsilon_i) + \sum_j u_{dj} \cdot \left(\frac{2r_j}{z_i + z_j} \right)^2 \cdot \varphi(\beta_{ij}, \lambda_{ij})$$

dove è:

$$\varepsilon_i = \frac{r_i}{z_i} \quad \beta_i = \frac{gz_i}{V_0^2} \quad \beta_{ij} = g \frac{z_i + z_j}{2V_0^2} \quad \lambda_{ij} = \frac{2 \cdot |y_i - y_j|}{z_i + z_j}$$

e si deve tenere presente che nella sommatoria va escluso l'indice i (1).

(1) Si osservi che la funzione φ è stata calcolata nell'ipotesi $\lambda < 2$, che può non essere soddisfatta per ogni coppia di eliche; in questo caso si può determinare ugualmente la velocità addizionale u_m^* assumendo per φ il valore approssimato che si trova nel modo seguente. Dalla fig. 3 si rileva che la legge di variazione di φ con λ è press'a poco la stessa, qualunque sia il valore di F , e quindi si può scrivere, utilizzando l'espressione assintotica di φ ,

$$\varphi \approx \frac{[\varphi]_{\lambda=0}}{1 + \left(\frac{\lambda}{2}\right)^2}$$

Ora, tale relazione è valida a rigore soltanto sino a $\lambda = 2$: dato però che φ deve evidentemente diminuire al crescere di λ e tendere assintoticamente a 0 per $\lambda = \infty$, essa può essere accettata, come *estrapolazione*, anche per $\lambda > 2$.

Consideriamo il caso particolare di due eliche uguali, poste alla stessa profondità h : indicando con d la distanza fra i

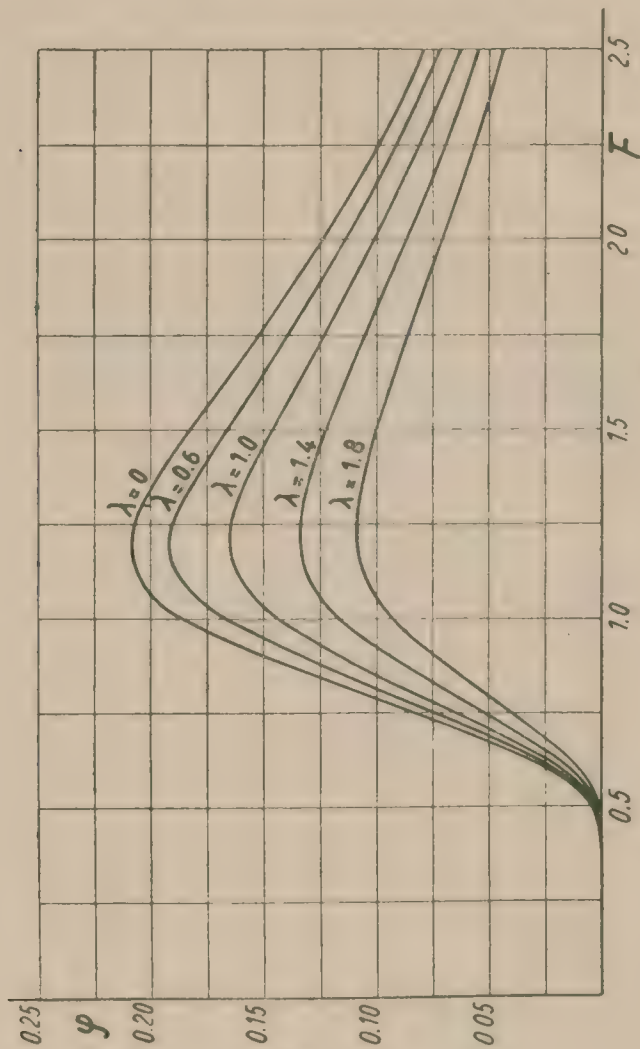


Fig. 3.

loro centri e con u_d il comune valore dell'incremento al disco, si avrà:

$$u_{m1}^* = u_{m2}^* = u_d^* \cdot \varepsilon^2 (f[\beta, \varepsilon] + \varphi[\beta, \lambda])$$

dove è:

$$\varepsilon = \frac{r}{h} \quad \beta = \frac{gh}{V_0^2} \quad \lambda = \frac{d}{h}$$

Si può osservare come il termine di u^* corrispondente alla mutua interferenza tra le due eliche sia una parte non trascurabile della velocità addizionale complessiva: ad es. per

$$\varepsilon = 0.8 \qquad \lambda = 1.8$$

si ha, supponendo $F = 1.25$,

$$j = 0.235 \qquad \varphi = 0.108$$

e quindi il termine dovuto all'interferenza rappresenta il 46% del valore complessivo, percentuale che rimane praticamente la stessa, qualunque sia il numero di Froude. In altre parole, si può rilevare che, nelle condizioni del nostro esempio, la perdita di rendimento di ciascuna elica aumenta della metà circa per effetto della presenza dell'altra elica.

IV TEMA.

RICERCHE SPERIMENTALI
SULL'ELICA AREA
E SUI CONDOTTI DI EMISSIONE
DEI GAS NEI SISTEMI A REAZIONE

LABORATORIO DI AERONAUTICA DEL R. POLITECNICO
DI TORINO**Diagrammi logaritmici di eliche a passo variabile,
definienti le loro caratteristiche aerodinamiche
per la progettazione dei propulsori.**

Riassunto. — *I coefficienti aerodinamici caratteristici di eliche sperimentate dal 1937 al 1939 nella galleria del vento di 6 m. di diametro del N.A.C.A. (descritta nel « Technical Report » n. 300 anno 1928) a cura del National Advisory Committee for Aeronautics, e già pubblicati nei « Technical Reports » degli anni 1938-39 (N. 640-643-650-658) sono stati raccolti in diagrammi dal Laboratorio di Aeronautica del R. Politecnico di Torino a seguito di quelli già pubblicati dallo stesso Laboratorio nel 1928. Questi diagrammi, che furono elaborati con molta diligenza dal Perito industriale Enrico Bordoni, Capo disegnatore del Laboratorio, sono contenuti in apposito Albo, mentre alcuni di essi, a titolo di esempio, sono riportati nella presente Nota.*

Lo scopo della raccolta è quello di esprimere i risultati sperimentali per mezzo dei coefficienti che sono normalmente adottati nella nostra Aeronautica secondo il diagramma logaritmico di Eiffel, così da mettere a disposizione del progettista grafici che permettano la determinazione rapida dell'elica adatta ad un dato motore per una data velocità dell'apparecchio, e della potenza disponibile alle varie quote, se è nota la curva di calibratura del motore a pressione normale di alimentazione e a numero di giri normale.

Nella presente nota sono poi indicate e discusse le conseguenze di carattere generale che i risultati sopra indicati hanno permesso di ricavare, così da guidare il progettista nella scelta fra le varie famiglie, a seconda dei requisiti che egli domanda all'elica, e da indicare quali sono i perfezionamenti che si possono ancora portare per migliorare le caratteristiche dell'elica stessa.

Nel corso della Nota le varie famiglie di eliche sono indicate coi numeri dal 27° al 44° corrispondentemente alla numerazione usata nell'albo citato. Per comodità del lettore si riportano le denominazioni

usate dal N.A.C.A. nelle pubblicazioni originali, dalle quali i risultati sperimentali sono stati dedotti.

Famiglia	Ellica	Motore raffreddato con	Pale	Technical Report N.A.C.A.
27	6101	liquido	3	642
27 bis	6101	aria	3	642
27 ter	ICI-0	liquido	3	642
28	6129	liquido	3	642
28 bis	6129	aria	3	642
29	6131	liquido	3	642
29 bis	6131	aria	3	642
30	5868-9	liquido	2	640
31	5868-9	liquido	3	658
31 bis	5868-9	aria	3	642
32	5868-9	liquido	4	640
33	5868-R6	liquido	2	640
34	5868-R6	liquido	3	640
34 bis	37-3647	liquido	2	640
35	5868-R6	liquido	4	640
36	6623-A	liquido	3	650
37	6623-B	liquido	3	650
38	6623-C	liquido	3	650
39	6623-D	liquido	3	650
40	5868-X2	liquido	3	658
41	5649	liquido	2	643
42	5923-G	liquido	2	643
43	5924-H	liquido	2	643
44	5868-9	liquido	3	658

È in fine qui riportato (illustrandolo con un esempio) il procedimento indicato nel T. R. N.A.C.A. N. 639 per correggere i risultati ottenuti sperimentalmente con un numero di Mach (relativo alla velocità periferica dell'elica) inferiore od uguale a 0,5, quando la applicazione che interessa si riferisca a numeri di Mach più elevati (inferiori però sempre a 0,9), quali spesso oggi si raggiungono.

PREMESSE

1. Tutte le eliche, delle quali sono riportate le caratteristiche aerodinamiche nei diagrammi sopra detti, e sulle quali gli esperimenti sono stati fatti, erano a passo variabile ed avevano un diametro di 3,05 m. (10 piedi), così che il numero di Reynolds della prova risulta sempre assai prossimo a quello corrispondente

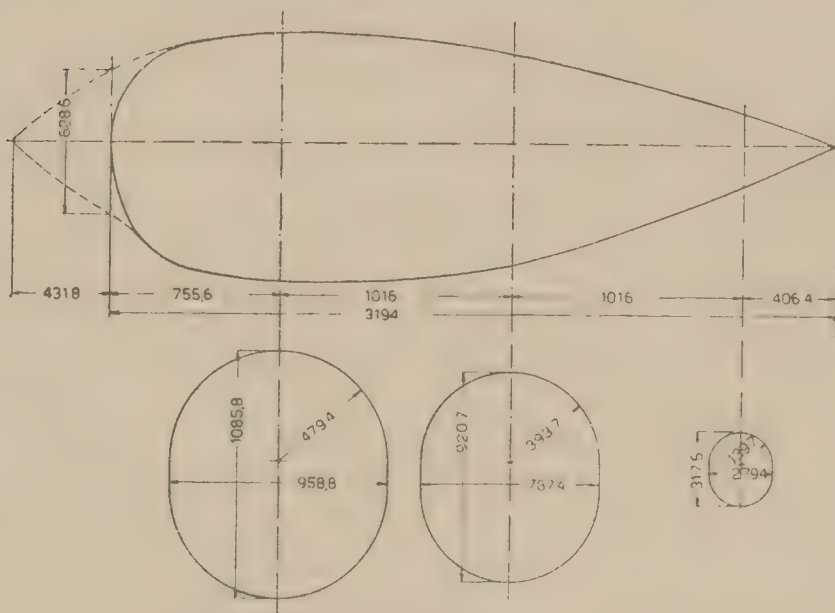


GONDOLA PER MOTORE RAFFREDDATO AD ARIA
usata nelle prove con elica $\phi = 3,048 \text{ m}$

Fig. 1.

al vero. Poichè la forza che l'aria esercita sopra ciascun elemento di pala dipende in notevole misura dall'ostacolo innanzi al quale l'elica opera, tutte le eliche furono sperimentate in presenza di due sole forme di *gondole motrici*: l'una adatta per motore raffreddato con aria e l'altra per motore raffreddato con liquido. La forma e le dimensioni caratteristiche di ognuna di esse sono date nelle figure 1 e 2. È appena necessario osservare che, a rigore, i coefficienti di coppia, di spinta e di rendimento che sono dati dai diagrammi allegati possono essere usati solo se nell'aeroplano in progetto il propulsore dovrà lavorare davanti ad una gondola simile a quella adoperata nell'esperimento. È tuttavia da presumere che, qualitativamente almeno, per quanto si riferisce al confronto delle caratteristiche aerodinamiche delle varie eliche operanti in presenza di uno stesso corpo, i risultati che si ottengono, servendosi dei diagrammi qui dati, siano corretti. L'ordine di grandezza dell'errore assoluto, invece, che si commette appli-

cando i coefficienti qui dati, quando si varii la forma della gondola rispetto a quella usata negli esperimenti, lo si può dedurre confrontando i valori dei coefficienti stessi ottenuti con una medesima elica per uno stesso rapporto di funzionamento e colle due forme di gondole prima dette; esso verrà, del resto, discusso al n. 4.



GONDOLA PER MOTORE RAFFREDDATO A LIQUIDO
usata nelle prove con elica $\phi = 3048$ m.

Fig. 2.

Il coefficiente di trazione è definito per mezzo della formula $\tau = \frac{T - \Delta R_r}{\rho R^4 \omega^2}$, dove T è la trazione sviluppata dall'elica e ΔR_r l'incremento di resistenza della gondola motrice in conseguenza della corrente generata dal propulsore; gli altri simboli hanno i significati consueti. Ne deriva che, per ottenere la *spinta netta*, basta sommare alla $\tau \rho R^4 \omega^2$ la resistenza della gondola determinata senza elica. Poichè poi il rendimento è sempre definito per mezzo della $\eta = \frac{\tau}{\kappa} \gamma$ ($\kappa =$ coefficiente di coppia $= \frac{\text{coppia motrice}}{\rho R^5 \omega^2}$; $\gamma =$ rapporto di funzionamento $= \frac{V}{\omega R}$) se ne deduce il carattere convenzionale che necessariamente viene ad assumere η .

2. I diagrammi relativi a ciascuna famiglia danno i coefficienti di coppia α in funzione del rapporto di funzionamento γ di una medesima elica a pale orientabili per i vari calettamenti delle pale, ciascuno dei quali è definito dando l'angolo che la corda di riferimento del profilo a 0,75 del raggio forma col piano normale all'asse dell'elica. Sulle curve dei coefficienti α sono poi segnati i rendimenti corrispondenti, e sono tracciate le linee di uguale rendimento.

Per definire le caratteristiche geometriche di ciascuna elica sono riportati i diagrammi che danno la legge di variazione della larghezza relativa $\frac{l}{2R}$, dello spessore relativo $\frac{s}{l}$, e del rapporto $\frac{\text{passo}}{\text{diametro}}$ in funzione del raggio relativo $\frac{r}{R}$ per un dato calettamento β del profilo a 0,75 del raggio. I profili usati per le varie sezioni di ciascuna elica risultano poi da figura apposta nei grafici relativi ad ogni famiglia, nella quale le ordinate sono quotate in percentuali dell'ordinata massima.

L'uso dei diagrammi logaritmici per la scelta dell'elica e per la determinazione delle potenze disponibili alle varie quote è quello notissimo, già spiegato nella prima raccolta sopra citata.

La velocità periferica delle pale nelle prove, delle quali i diagrammi danno i risultati, fu sempre tenuta inferiore (od al limite uguale) ad una metà della velocità del suono alla quota zero. Per numeri di Mach (riferiti alla velocità periferica) superiori a 0,5 si debbono pertanto portare ai risultati dedotti dai diagrammi stessi delle correzioni, come verrà indicato al n. 10.

DISCUSSIONE DEI RISULTATI

Gli esperimenti eseguiti sulle eliche qui considerate fanno parte di un programma sistematico molto esteso di ricerche, eseguite a cura del N.A.C.A., per mettere in evidenza l'influenza dei parametri di forma dell'elica sulle sue caratteristiche aerodinamiche. È molto interessante ricordare i principali risultati fino ad ora ottenuti:

3. Influenza della variazione della solidità.

Come è noto, si definisce *solidità* di un'elica il rapporto fra la somma delle aree delle pale (non svergolate) all'area totale del disco d'elica. La solidità può essere variata sia aumentando il numero delle pale, sia aumentando la larghezza di ogni pala,

lasciandone invece invariato il numero. L'influenza che ha sulle caratteristiche aerodinamiche la variazione della *solidità*, ottenuta sia nell'uno sia nell'altro dei modi indicati, risulta dai diagrammi relativi alle famiglie N° (30); (31); (32); (33); (34); (34 *bis*); (35) (figure 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9). Di fatto, le eliche a passo variabile corrispondenti alle famiglie N° (33); (34); (35) non differiscono l'una dall'altra che per il numero delle pale; mentre la famiglia N° 34 *bis* è uguale a quella N° (33) in tutto, ad eccezione della larghezza relativa delle pale, che è, in questa, una volta e mezzo più grande che in quella. Così pure le famiglie N° (30); (31); (32) non differiscono fra loro che nel numero delle pale, mentre si differenziano dalle altre sopra indicate solo perchè i profili in esse usati appartengono alla Serie Clark Y invece che alla Serie RAF 6 usata nelle famiglie (33); (34) ecc...

I risultati principali che si ricavano sono i seguenti:

a) Aumentando il numero z delle pale i rapporti $\frac{\tau}{z}$, $\frac{\kappa}{z}$ in generale diminuiscono (tanto meno quanto più γ è prossimo ai valori corrispondenti ai passi aerodinamici inferiore e superiore), mentre il γ , a cui corrisponde la massima efficienza, aumenta leggermente.

b) Aumentando il numero delle pale, ma tenendole inalterate, il rendimento diminuisce assai meno di quanto prevede la teoria elementare, che tiene conto della sola *larghezza relativa* totale delle pale e non del numero di queste; di fatto, l'elica a tre pale risulta avere, negli esperimenti qui considerati, un rendimento massimo uguale (od anche leggermente superiore) a quello dell'elica a due pale, a parità di ogni altra condizione, mentre quella a 4 pale ha un rendimento massimo dei massimi inferiore di solo il 2% a quello corrispondente al propulsore a 2 sole pale. Significativi a questo proposito risultano i diagrammi delle figure 10 e 11 che danno le curve inviluppo dei rendimenti in funzione del coefficiente $\frac{\gamma}{\kappa^{1/5}}$ per le varie famiglie sopra indicate (¹).

(¹) Si considera la curva inviluppo dei rendimenti in funzione di $\frac{\gamma}{\kappa^{1/5}}$, invece che di γ , perchè è il coefficiente $\frac{\gamma}{\kappa^{1/5}}$ che risulta univocamente definito dai dati di progetto, che sono ovviamente: potenza massima del motore P e numero di giri corrispondente (e quindi velocità angolare ω); velocità massima dell'apparecchio, quota di volo (e quindi densità ρ dell'aria): è di fatto

$$\frac{\gamma}{\kappa^{1/5}} = \sqrt[5]{\frac{2 P V^5}{P \omega^2}}$$

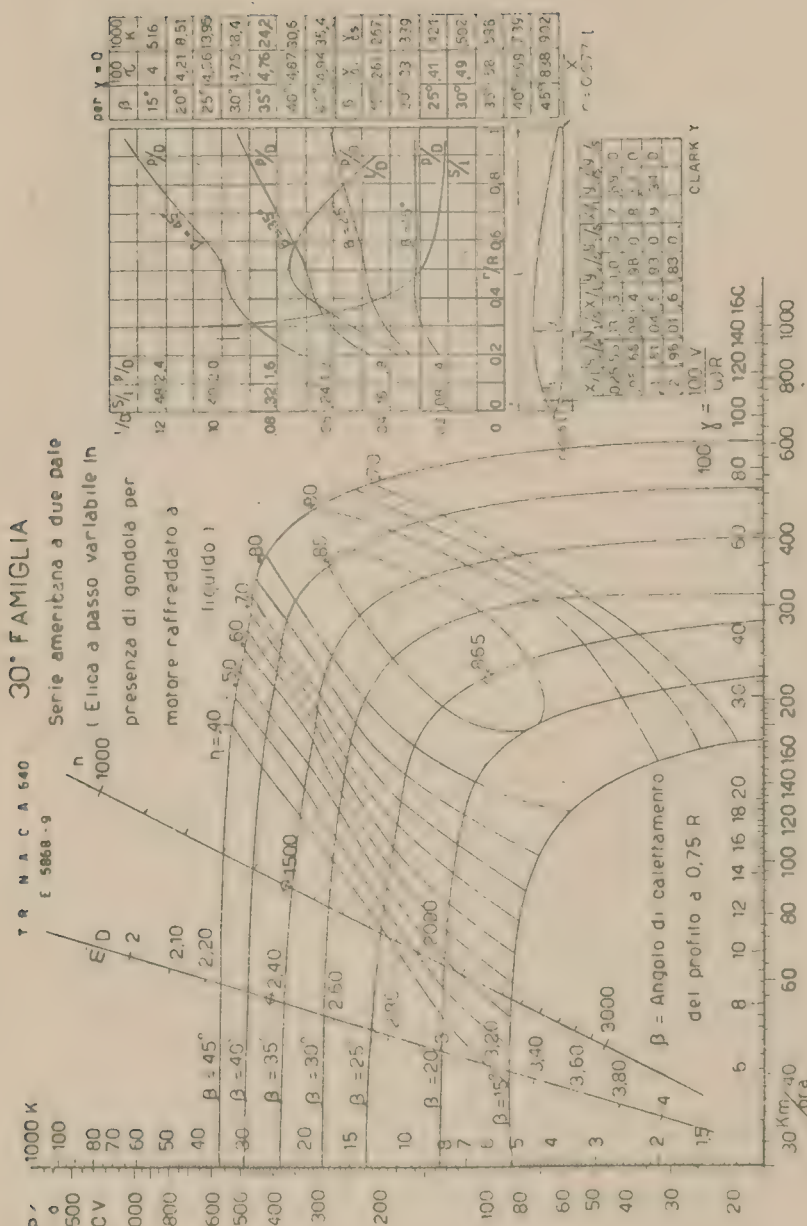
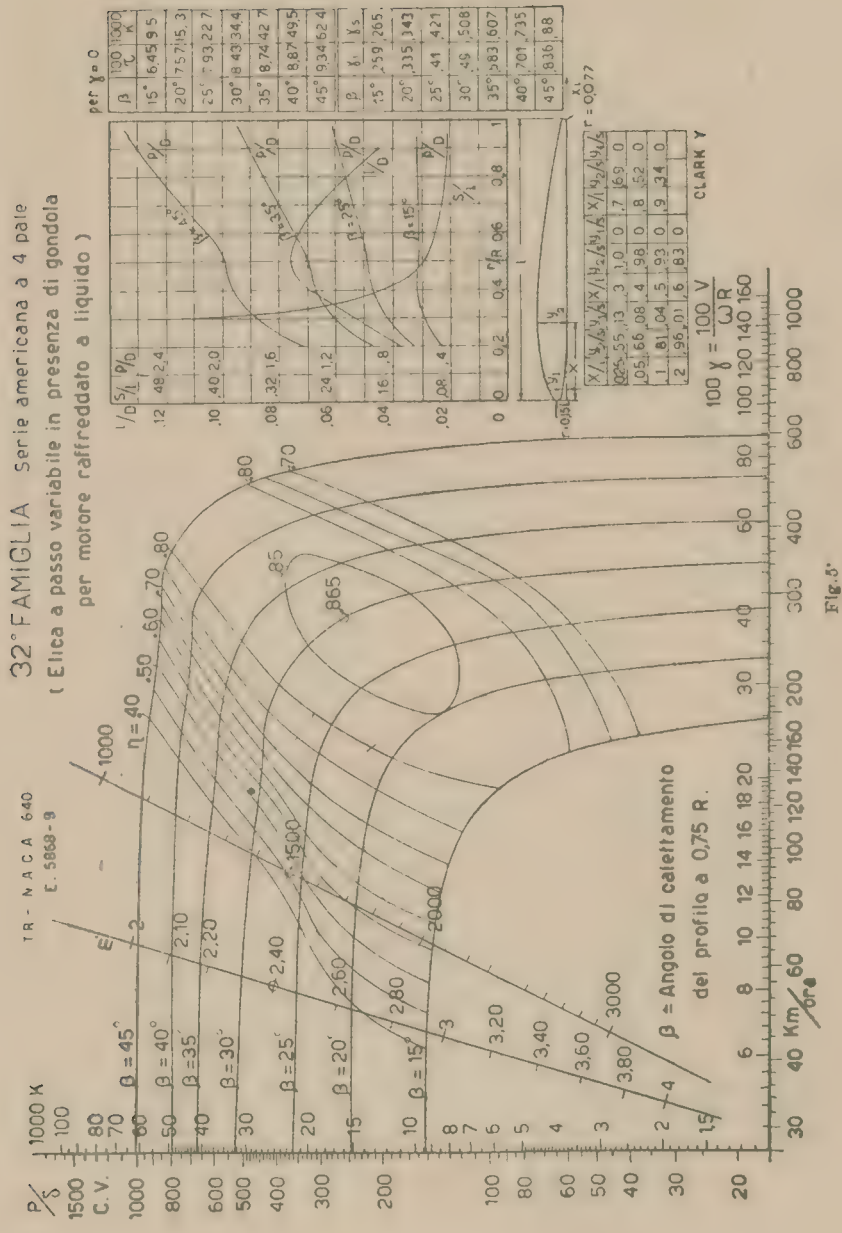


Fig. 3.



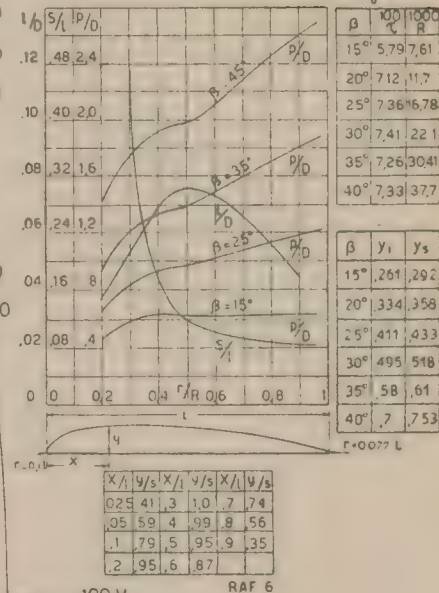
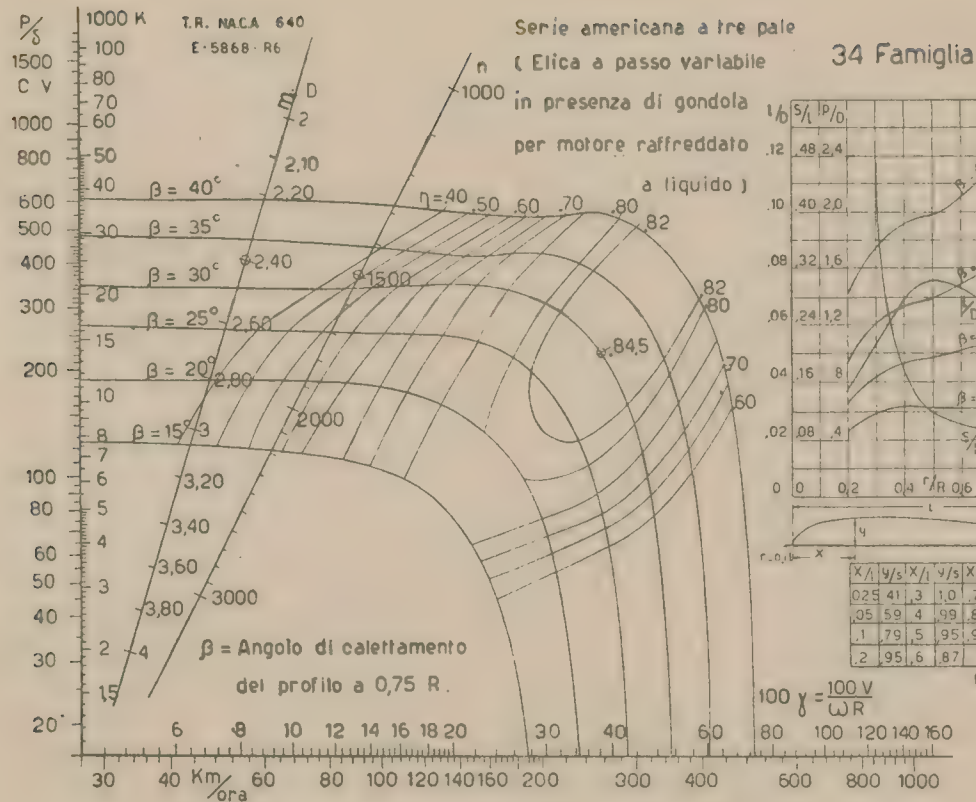
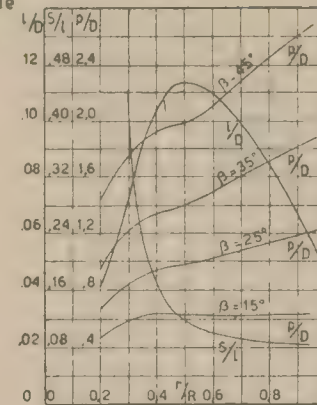
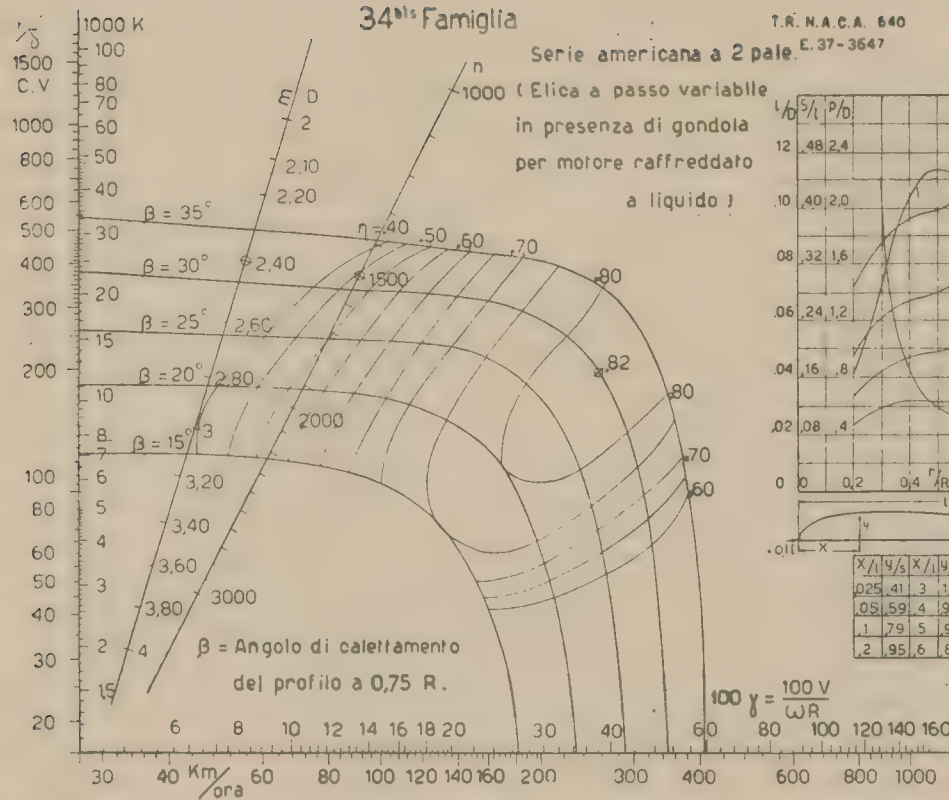


Fig. 7.



per $\gamma = 0$

β	$\frac{100}{C}$	$\frac{1000}{K}$
15°	5,85	7,23
20°	6,66	11,4
25°	7,67	16,45
30°	7,77	25
35°	7,65	

β	γ_1	γ_2
15°	2,58	2,86
20°	3,31	3,56
25°	4,09	4,29
30°	4,93	5,15
35°	5,75	6,05

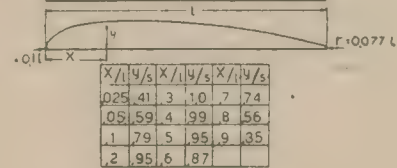


Fig. 8.

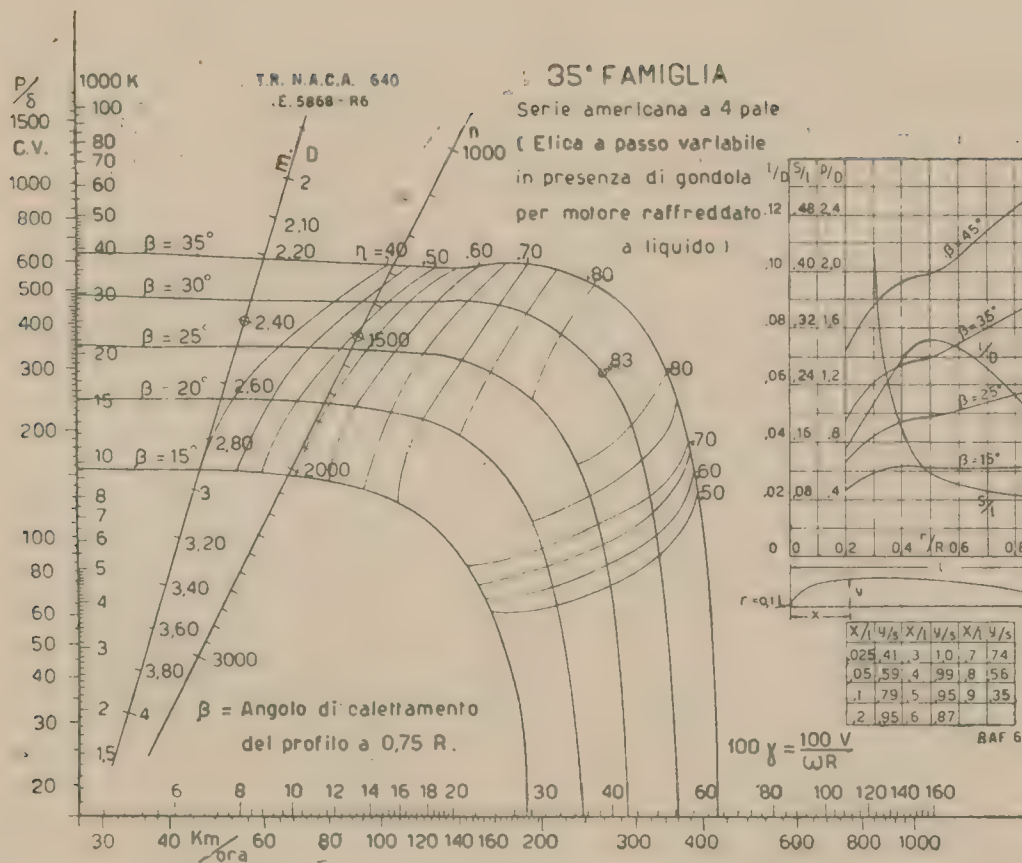
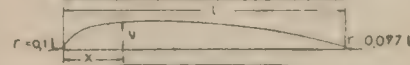


Fig. 9.

per $\gamma = 0$

β	100	1000
15°	6,95	9,8
20°	8,52	15,15
25°	9,2	21,1
30°	9,32	29,8
35°	9,05	39,3

β	γ_1	γ_2
15°	261	289
20°	334	361
25°	416	436
30°	501	530
35°	595	63



$X/1/4$	$X/1/3$	$X/1/2$	$X/2/3$	$X/3/4$	$X/1$
0,25	0,41	0,59	0,79	0,95	1,0
0,05	0,19	0,34	0,49	0,64	0,79
0,1	0,29	0,49	0,69	0,89	0,99
0,2	0,59	0,79	0,99	1,0	1,0

RAF 6

e) L'elica a tre pale ha una efficienza più grande (dal 2% al 3%) dell'elica a due pale di uguale solidità, a parità di ogni altra

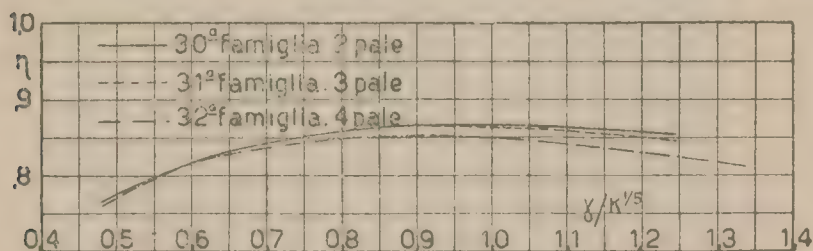


Fig. 10.

circostanza: questa proprietà è bene indicata dal diagramma di fig. 12 che dà le curve inviluppo di η in funzione di $\frac{\gamma}{\pi^{1/5}}$ per le famiglie N° 34 e N° 34 bis, che sono appunto nelle condizioni sopra dette.

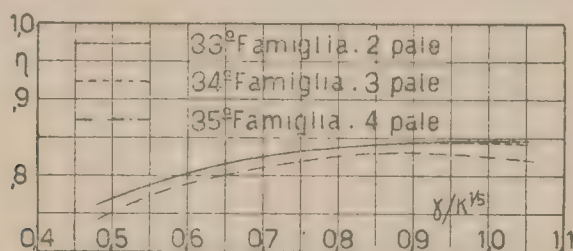


Fig. 11.

d) L'aumento della solidità porta in generale ad aumentare il rendimento, a parità delle altre condizioni, per i valori di γ che si verificano durante la manovra di involo degli aerei;

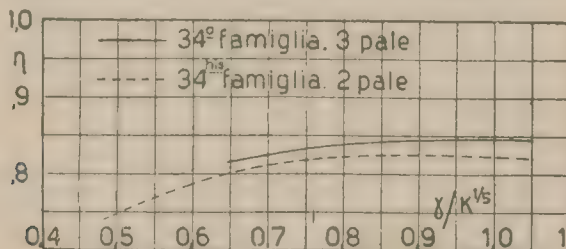


Fig. 12.

questo aumento di efficienza è tanto più sentito quanto maggiore è l'angolo di calettamento delle pale, ed è dovuto al fatto che la maggiore velocità indotta, che si produce nei propulsori a solidità più grande, porta le incidenze dei profili delle pale a valori più lontani dall'incidenza critica.

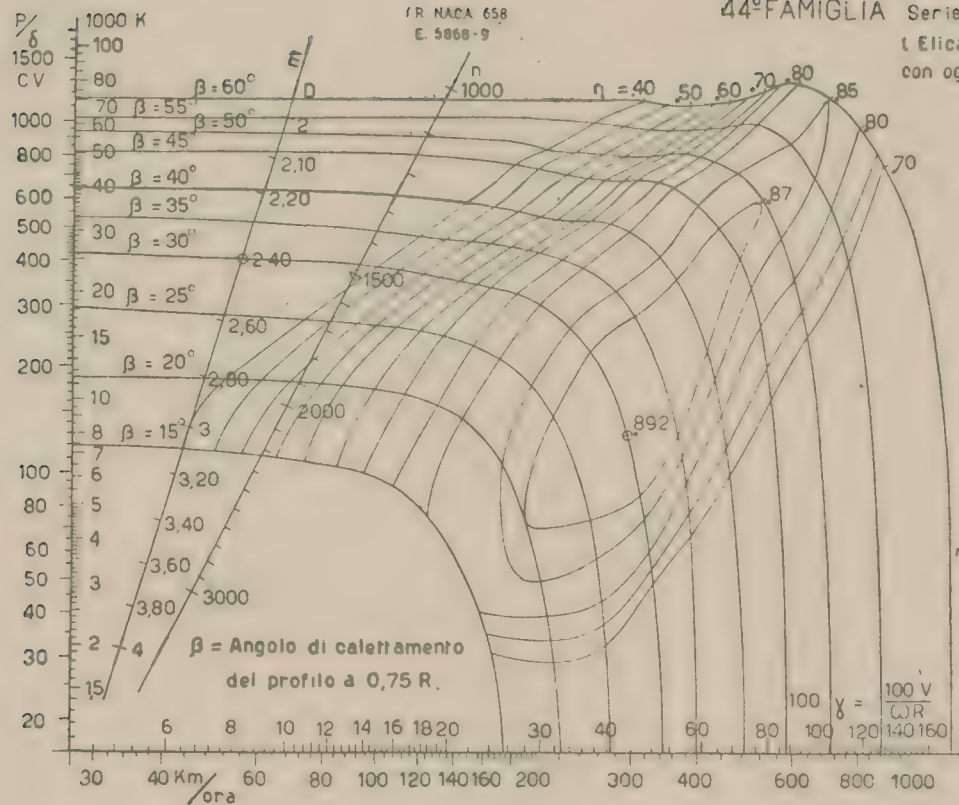
4. *Influenza della forma della gondola motrice e della profilatura delle sezioni delle pale prossime al mozzo.*

Le eliche delle famiglie indicate nell'albo coi N¹ (27); (28); (29); (31) operano davanti alla gondola rappresentata in fig. 2, adatta per motore raffreddato con liquido, mentre quelle delle famiglie (27 bis); (28 bis); (29 bis); (31 bis), ciascuna delle quali è identica alla famiglia che porta lo stesso numero prima indicato, operano davanti alla gondola rappresentata in figura 1 e adatta per motore raffreddato con aria. Le eliche della famiglia (44), le cui caratteristiche sono riportate nella figura 13, sono identiche a quelle della (31) e le caratteristiche aerodinamiche di esse sono state dedotte in presenza della stessa gondola per motore raffreddato con liquido, la cui prora era però stata opportunamente profilata in modo da raccordarsi con una impruatura portata dall'elica corrispondente alla famiglia (31), come è rappresentato nella fig. 2. La famiglia (27 ter) infine si differenzia dalla (27) solo per il fatto che le sue sezioni prossime al mozzo sono profilate, mentre quelle della (27) hanno la forma circolare caratteristica delle eliche a passo variabile.

I principali risultati che si possono dedurre dalle caratteristiche aerodinamiche delle eliche delle famiglie sopra dette sono:

a') I propulsori che operano davanti alla gondola per motore raffreddato con liquido, per i valori di γ uguali a quelli che si producono durante l'involo degli aerei, hanno un rendimento più elevato di quello che i medesimi propulsori hanno se lavorano davanti alla gondola per motore raffreddato con aria. I rendimenti massimi sono invece più grandi in quest'ultimo caso che non nel precedente. Se però l'elica è provvista di una impruatura, il rendimento massimo viene così notevolmente aumentato (fino al 6%) da risultare maggiore di quello corrispondente alla stessa elica con gondola per motore raffreddato con aria. L'aumento di rendimento prodotto dall'impruatura è poi tanto più grande quanto maggiore è l'angolo di calettamento delle pale: questa proprietà è bene indicata dal diagramma di fig. 14 nel quale sono tracciate le curve involuppo dei rendimenti in funzione di $\frac{\gamma}{x^{1.5}}$ per le eliche della famiglia (31) e della famiglia (44), identica alla precedente, ma provvista di impruatura.

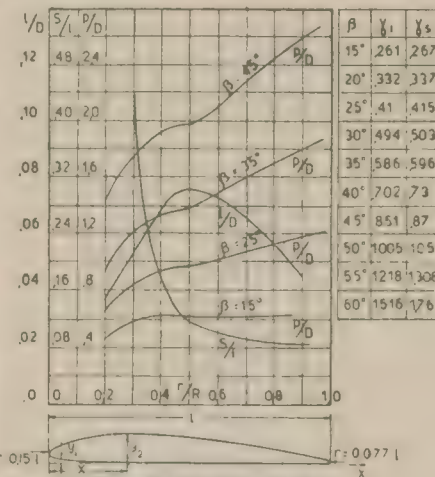
b') I propulsori che hanno pale profilate fino al mozzo hanno a parità di ogni altra circostanza rendimento più elevato (dal 2% al 3%) di quelli le cui pale in vicinanza del mozzo sono



IR NACA 658
E. 9868-9

44°FAMIGLIA Serie americana a tre pale

(Elica a passo variabile in presenza di gondola
con ogiva per motore raffreddato a liquido)



X_1	Y_1	U_1	X_2	Y_2	U_2	X_3	Y_3	U_3	X_4	Y_4	U_4
0.25	55	13	3	10	0	7	09	0			
0.5	66	08	4	98	0	8	52	0			
1	81	04	5	93	0	9	34	0			
2	96	01	6	83	0						

per $\gamma = 0$

CLARK Y

β	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°	50°	55°	60°
1000 K	5.69	6.22	6.28	6.6	7.24	7.16	6.96	6.47	6.88	6.12
1000 K	7.66	11.4	19.2	27.1	33.9	39.9	50.3	57.1	62.4	70.1

arrotondate, sia che esse operino davanti a gondola per motore raffreddato a liquido, sia che esse operino davanti a gondola per

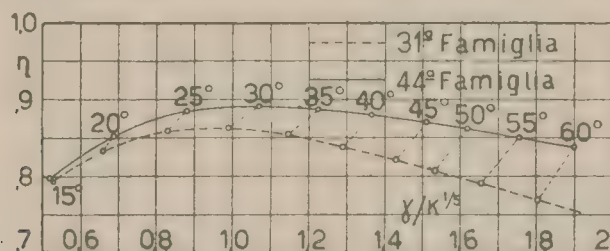


Fig. 14.

motore raffreddato ad aria; l'aumento di rendimento è però maggiore nel primo caso che nel secondo, ed è tanto più grande quanto maggiore è l'angolo di calettamento delle pale.

5. Influenza della forma del profilo delle sezioni delle pale.

L'influenza della forma del profilo sulle caratteristiche aerodinamiche delle eliche è indicata dai grafici relativi alle eliche delle famiglie N° (31); (34); (36); (37); (38); (39); di fatto esse sono *identiche* fra loro in tutto, ad eccezione che nella forma dei profili delle sezioni delle pale, che, per le eliche sopra indicate, sono dati dal seguente prospetto:

Famiglia	Profilo delle sezioni delle pale
N. 31	Serie Clark Y
» 34	» R.A.F. 6
» 36	» N.A.C.A. 4400
» 37	{ » N.A.C.A. 4400 per $\frac{r}{R} \leq 0,5$
	{ » N.A.C.A. 2400-34 per $\frac{r}{R} > 0,5$
» 38	» N.A.C.A. 2R ₁₀₀
» 39	» N.A.C.A. 6400

La legge secondo la quale varia lo spessore del profilo lungo la linea d'asse è molto prossimamente la medesima per tutti i profili considerati ⁽²⁾, cosicchè la differenza sostanziale fra di

⁽²⁾ Fa un poco eccezione la serie dei profili NACA 2400-34 che presentano al bordo di attacco un raggio di curvatura alquanto minore, e che hanno lo

essi sta appunto nella forma della linea d'asse; si deve poi osservare che, mentre per i profili delle Serie N.A.C.A. la curvatura è indipendente dallo spessore (e pertanto esso ha valore costante lungo il raggio) per quelli delle Serie Clark Y e RAF 6 la curvatura è funzione dello spessore e quindi varia lungo la pala.

I risultati principali che si possono dedurre dall'esame dei diagrammi sopra indicati sono:

a'') Il coefficiente di trazione critico τ_c , definito come quello corrispondente al valore di γ per il quale, per ogni calettamento delle pale, i profili cominciano a presentarsi al vento relativo con una incidenza uguale o superiore a quella critica, è tanto più elevato quanto più grande è il parametro di inarcamento dei profili. Per i valori di γ , e per gli angoli di calettamento delle pale, per i quali l'angolo d'incidenza critico dei profili è raggiunto e superato, i propulsori con profili di maggiore inarcamento hanno invece coefficienti di coppia minori.

b'') La differenza nel rendimento massimo delle varie eliche prodotta dalla variazione dei profili è dell'ordine del 3%; il rendimento massimo è più elevato per le eliche con profili di minore inarcamento, e precisamente l'ordine di merito di questi, per quanto si riferisce ad $\eta_{\max}$, è il seguente: NACA 2400-34; Clark Y; NACA 2R₂00; NACA 4400; RAF 6; NACA 6400. Si ha inoltre che tanto più piccola è la curvatura dei profili, e quindi tanto minore è il loro $(c_r)_{\min}$, tanto più grande, a parità delle altre circostanze, è il valore di γ a cui corrisponde $\eta_{\max}$; ne viene che, se l'elica è scelta in modo che essa abbia rendimento massimo alla massima velocità di volo, poichè a valori più elevati di γ corrispondono minori valori del coefficiente di coppia τ , i propulsori con profili meno inarcati avranno diametri più grandi.

La differenza di rendimento ⁽³⁾ delle eliche ai valori di γ che si producono durante la manovra di involo degli aerei, e agli

spessore massimo al 40% della lunghezza della corda invece che al 30%. Si deve probabilmente a tali caratteristiche di forma la migliore efficienza che il profilo NACA 2400-34 ha ai numeri di Mach più grandi di 0,5.

(³) Per valutare questa differenza di rendimento nei Report NACA è stata considerata come velocità di avanzo quella uguale a $\frac{1}{4}$ della velocità massima dell'aereo; tale valore corrisponde a 0,7 della velocità di involo per un aereo-

plano che ha un rapporto $\frac{\text{Velocità massima}}{\text{Velocità di involo}} = 2,8$.

angoli corrispondenti delle pale per le eliche a pale orientabili, varia dal 2 all'8%, al variare del profilo, a seconda del valore del coefficiente $\frac{\gamma}{\alpha^{1,5}}$, che corrisponde ai dati di progetto, e a seconda del criterio di confronto fra le eliche stesse. Se queste sono state scelte in modo che tutte abbiano il medesimo diametro, l'ordine di merito dei profili è il seguente:

RAF 6; NACA 4400; Clark Y; NACA 6400; NACA 2R₂OO; NACA 2400-34; se invece i propulsori che si confrontano sono stati scelti in modo da sviluppare il massimo rendimento alla massima velocità, *senza limitazioni di diametro*, l'ordine di merito è, per la condizione ora considerata:

NACA 2R₂OO; Clark Y; NACA 4400; NACA 2400-34; RAF 6; NACA 6400.

Se l'elica non è a passo variabile, ma a passo fisso, qualunque sia il criterio col quale si faccia il confronto, l'ordine di merito dei profili per l'efficienza dell'elica all'involo è invece: RAF 6 oppure NACA 6400; NACA 4400; Clark Y; NACA 2R₂OO; NACA 2400-34.

Si ricava di conseguenza dai risultati sopra indicati, che, se non vi sono limitazioni nella scelta del diametro dell'elica, i profili delle sezioni delle pale di un'elica a pale orientabili dovrebbero essere scelti essenzialmente in base alla condizione che essi presentino, per ogni dato spessore massimo, la più piccola resistenza minima, poichè il valore del coefficiente di portanza massima ha una piccola influenza sulla grandezza della trazione sviluppata dall'elica stessa anche durante la manovra di involo.

Un criterio così netto non vale invece se l'elica è a passo fisso, in quanto, se il coefficiente di portanza massima dei profili non è sufficientemente elevato, la trazione sviluppata alla partenza risulta eccessivamente ridotta.

6. Influenza della distribuzione del passo lungo il raggio.

Tutte le eliche delle famiglie qui considerate, ad eccezione di quella N° 40, hanno un passo che è quasi costante per un angolo di calettamento del profilo a 0,75 *R* uguale a 15°; d'altra parte i diagrammi delle caratteristiche aerodinamiche ad esse corrispondenti dimostrano che il rendimento massimo dei massimi si raggiunge per un valore dell'angolo di calettamento del profilo a 0,75 *R* compreso tra 25° e 30°, a cui corrisponde un passo crescente rapidamente col raggio.

È stato fatto perciò un tentativo per migliorare le caratteristiche aerodinamiche dell'elica riducendo il passo geometrico dei profili di estremità rispetto a quello delle sezioni più prossime al mozzo; tale tentativo è stato realizzato coll'elica a passo variabile corrispondente alla famiglia N° 40, che è identica a quella N° 31 in tutto, ad eccezione che nella legge secondo la quale varia il calettamento relativo dei vari profili lungo il raggio; questa di fatto è in essa tale da rendere il passo costante (per $\frac{r}{R} \approx 0,5$) per un angolo di calettamento β della sezione a $0,75 R$ uguale a 35° . Dal confronto dei risultati sperimentali si ricava che l'elica N° 40 (a passo costante per $\beta = 35^\circ$) rispetto all'elica N° 31 (a passo costante per $\beta = 15^\circ$) ha:

$a''')$ un rendimento massimo leggermente minore, e tanto più piccolo quanto più elevato è il valore del coefficiente $\frac{\gamma}{x^{1/5}}$ che corrisponde ai dati di progetto;

$b''')$ un rendimento più elevato ai valori di γ e agli angoli di calettamento delle pale che si hanno durante la manovra di involo.

Dal confronto dei risultati relativi a due sole leggi di variazione del passo lungo il raggio non è possibile evidentemente dedurre alcuna conseguenza di carattere generale; è affermato tuttavia nel Rendiconto del NACA n° 658, che da altri risultati, non ancora pubblicati, pare si possa effettivamente sperare di ottenere un miglioramento delle caratteristiche aerodinamiche realizzando una legge di variazione relativa dell'angolo di calettamento dei vari profili lungo il raggio, tale da rendere il passo costante per un angolo compreso tra 22° e 34° .

7. Influenza della forma in pianta delle pale.

L'influenza della legge secondo la quale varia la larghezza relativa delle pale lungo il raggio si deduce dalla considerazione dei diagrammi relativi alle famiglie (33); (41); (42); (43). Esse di fatto differiscono soltanto in questo, che, mentre la prima ha una legge di variazione di $\frac{l}{2R}$ con $\frac{r}{R}$ uguale a quella che si è, fino ad ora, usata normalmente nella tecnica, per le altre $\frac{l}{2R}$ varia in funzione di $\frac{r}{R}$ con leggi diverse tali da accostarsi maggiormente alla legge di variazione teorica della circolazione lungo il raggio

per l'elica di massimo rendimento. La curva involuppo dei rendimenti massimi dimostra che l'ordine di merito delle eliche sopra citate è il seguente: (41); (43); (42); (33), indicando che vi è, come prevede la teoria, un effettivo vantaggio, per quanto riguarda il rendimento massimo, a portare la sezione di larghezza massima maggiormente verso il mozzo, rispetto alla posizione che tale sezione ha nelle eliche la cui pala ha la forma normale. Così, ad esempio, la curva involuppo degli $\eta_{\max}$ per il propulsore N° (41) è in media più elevata del 3% rispetto a quella del propulsore N° (33).

Per contro il rendimento per i valori più piccoli di γ , quali quelli che si verificano all'involò, è peggiorato da tale spostamento della sezione corrispondente a $\left(\frac{l}{2R}\right)_{\max}$

8. Influenza della compressibilità.

A cura del NACA furono eseguite anche numerose ricerche sperimentali dirette a studiare la influenza della compressibilità dell'aria sulle caratteristiche aerodinamiche delle eliche. Per quanto il programma sperimentale non sia stato ancora esaurito, fu tuttavia possibile dai risultati fino ad ora ottenuti dedurre alcune proprietà generali, che qui riportiamo:

a^{IV}) Si incomincia a produrre una diminuzione del rendimento, in conseguenza della compressibilità dell'aria, non appena il numero di Mach n (riferito alla velocità periferica delle pale) supera 0,5, nelle condizioni corrispondenti alla manovra di involò ed al volo in salita. La grandezza di questa diminuzione dipende dalla forma in pianta delle pale (ossia dalla legge secondo la quale varia col raggio la larghezza relativa delle pale), dall'angolo di incidenza dei profili e dal valore del rapporto di funzionamento γ . Se $n > 0,7$, la perdita di rendimento può aumentare rapidamente fino a più del 20% per un valore di $n = 0,8$. La diminuzione di η per i valori di γ prossimi a quello per il quale si ha $\eta_{\max}$ è invece assai piccola, almeno fino a che $n \leq 0,9$.

b^{IV}) La diminuzione di rendimento nelle condizioni di involò, a parità di numero di Mach, aumenta col crescere dell'angolo di calettamento delle pale fino a un valore dell'angolo di calettamento β (riferito al profilo a $0,75 R$) inferiore ad un determinato limite (che negli esperimenti del NACA, riportati nel Report N° 639, è risultato 20°); per valori superiori a detto limite la perdita di rendimento diminuisce.

c^{iv}) La diminuzione di rendimento, per la condizione di volo in salita, cresce, a parità di numero di Mach, col crescere dell'angolo β di calettamento fino ad un valore di β inferiore ad un determinato limite (che negli esperimenti sopra citati del NACA è uguale a 25°); quindi la perdita di rendimento diventa più piccola.

d^{iv}) La compressibilità peggiora le caratteristiche aerodinamiche dei propulsori, che hanno profili ricavati dalla Serie RAF 6, più che quelle delle eliche con profili della serie Clark Y. Le eliche con profili dedotti dalla serie RAF 6 hanno però, per valori di $n < 0,5$, un rendimento η più elevato di quelli con profili della serie Clark Y per i valori di γ e di β ai quali la sopradetta diminuzione di η si produce.

e^{iv}) Così pure, risultano peggiorate, per effetto della compressibilità, le caratteristiche aerodinamiche delle eliche le cui pale hanno larghezza normale, più di quanto non lo siano quelle delle eliche con pale di larghezza maggiore; però le prime hanno, per $n < 0,5$ e per i valori di γ e di β , ai quali il sopradetto peggioramento si produce, un rendimento maggiore, a parità di ogni circostanza.

f^{iv}) La perdita di rendimento prodotta dalla compressibilità è più grande per le eliche, i cui profili hanno uno spessore relativo più grande; però per numeri di Mach più piccoli di 0,5, e per i valori di γ per i quali, per ogni calettamento delle pale, si producono dette perdite, le eliche con profili di medio spessore hanno un rendimento più elevato di quello delle eliche con profili più sottili.

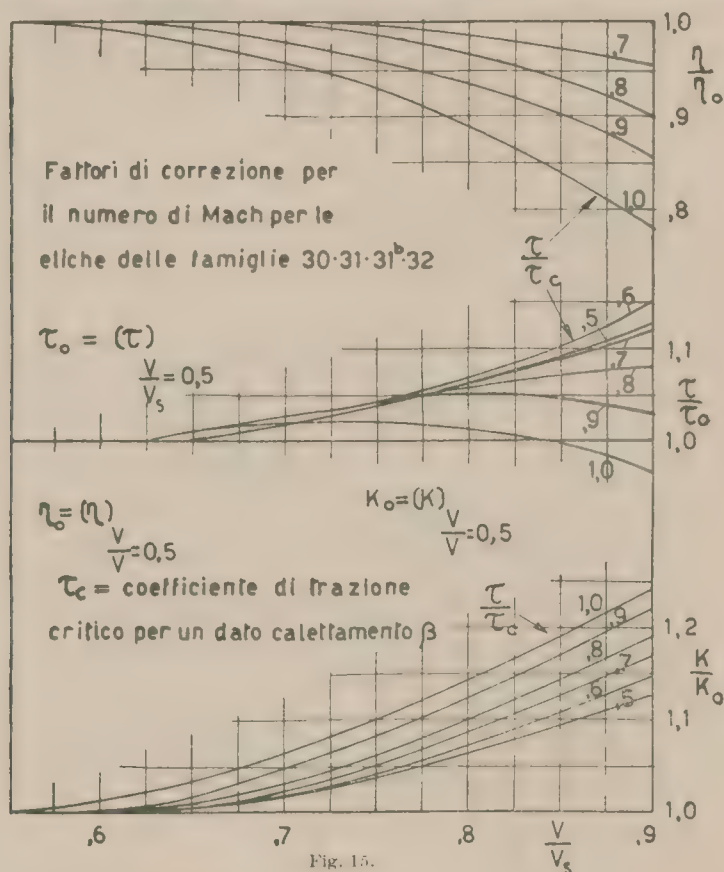
g^{iv}) I coefficienti di trazione e di coppia tendono ad aumentare col crescere del numero di Mach n , anche prima del valore di n a partire dal quale comincia a diminuire il rendimento.

h^{iv}) Le perdite di rendimento per un'elica a pale orientabili, nelle condizioni di involo e di volo in salita, sono attenuate dal fatto che gli angoli di calettamento, secondo i quali si devono disporre le pale per assorbire una data potenza, risultano minori di quelli che si avrebbero se l'aria fosse incompressibile, in conseguenza dei valori più elevati dei coefficienti di coppia.

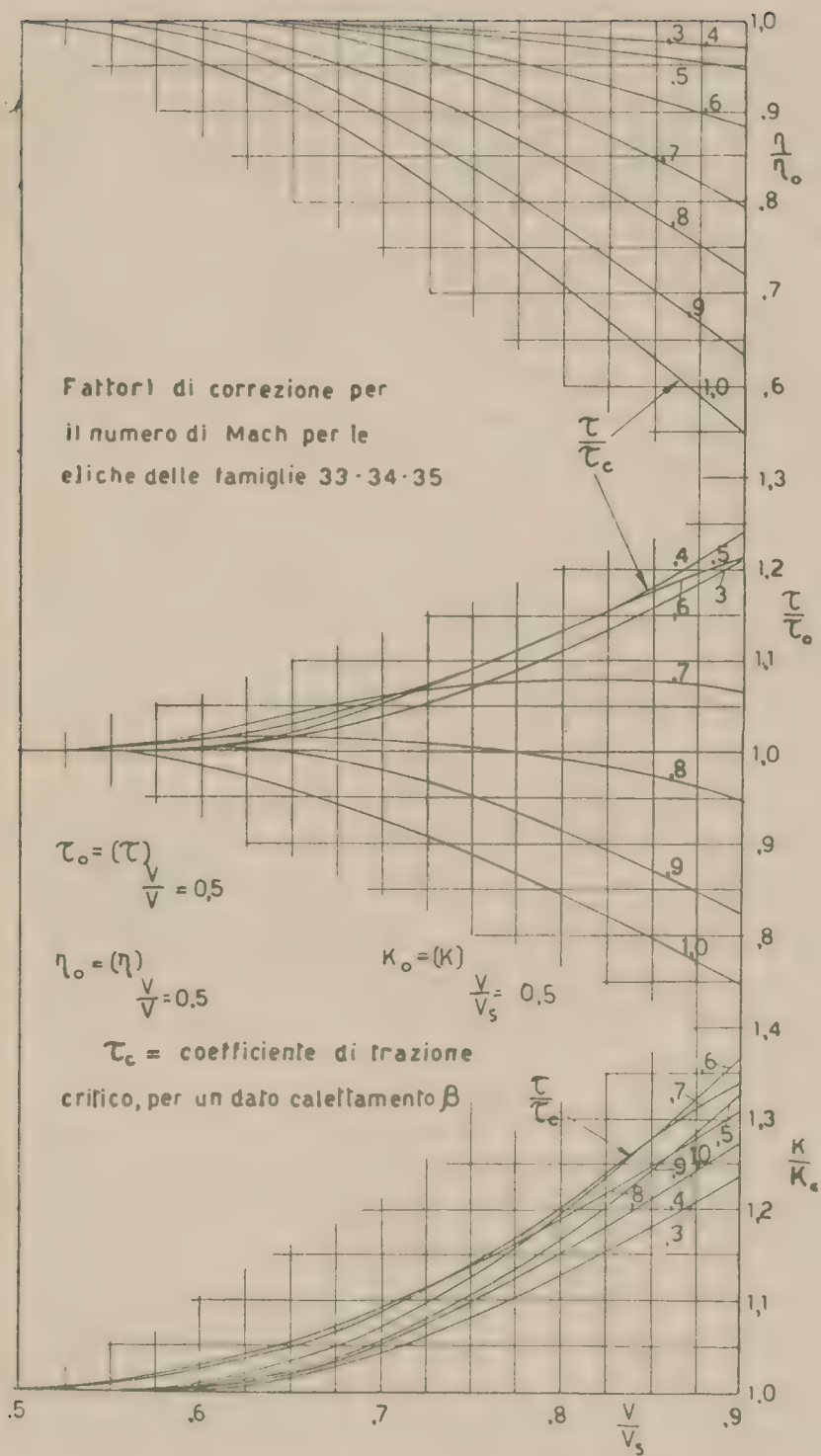
La diminuzione di η , in conseguenza della compressibilità, è invece, per la stessa ragione, esaltata per un'elica a pale fisse.

9. *Correzione delle caratteristiche in relazione al numero di Mach.*

Le ricerche sperimentali sopracitate hanno permesso anche di ricavare dei grafici (figure 15; 16) per mezzo dei quali le caratteristiche aerodinamiche di eliche, dedotte applicando i risultati



ottenuti sperimentando ad un numero di Mach inferiore a 0,5, possono essere corrette, così da tener conto dell'effetto delle compressibilità a numeri di Mach più elevati. Questi grafici, a rigore, non possono essere applicati che alle eliche delle famiglie (30); (31); (31 bis); (32); (33); (34); (35), data la complessità degli elementi dai quali dipende detto effetto di compressibilità; tuttavia, in mancanza di altri dati, ed in una prima grossolana approssimazione, essi potranno essere applicati anche a famiglie diverse da quelle prima citate, almeno per conoscere qualitativamente in che modo variano per effetto della compressibilità le loro caratteristiche aerodinamiche.



Questi grafici sono riportati nella figura 15, corrispondente alle eliche delle famiglie (30); (31); (31 bis) e (32); e nella figura 16, che invece corrisponde alle eliche delle famiglie (33); (34); (35). Essi danno le leggi ricavate sperimentalmente colle quali variano, col variare del numero di Mach, i rapporti $\frac{\eta}{\eta_0}$; $\frac{\tau}{\tau_0}$; $\frac{\kappa}{\kappa_0}$; essendo η , τ , κ i coefficienti di rendimento, di trazione e di coppia ad un numero di Mach n qualsiasi (compreso tra 0,5 e 0,9) ed η_0 , τ_0 , κ_0 i valori degli stessi coefficienti per $n = 0,5$. Sia per $\frac{\eta}{\eta_0}$, che per $\frac{\tau}{\tau_0}$ e per $\frac{\kappa}{\kappa_0}$, è tracciata, ad esprimere tale legge, una linea per ogni valore del rapporto $\frac{\tau}{\tau_c}$, in cui con τ_c è indicato il coefficiente di trazione critico già prima definito (vedi n° 5-a''). Per ogni valore dell'angolo di calettamento delle pale, τ_c (*) si può assumere uguale al valore di τ in corrispondenza del quale la curva dei coefficienti di trazione in funzione di γ presenta il caratteristico incurvamento, analogo a quello presentato dal diagramma (c_p ; α) per ogni profilo alare. Appare pertanto che in questa rappresentazione si è assunta l'incidenza dei profili delle pale come unico parametro per definire l'effetto della compressibilità ad un dato numero di Mach (sempre riferito alla velocità periferica), e questo se non è rigoroso, perchè gli elementi dai quali dipende l'effetto di compressibilità (come già si è osservato) sono molteplici, si può tuttavia ritenere sufficientemente approssimato, almeno se i grafici sopra detti sono applicati alle eliche delle famiglie già prima citate e per angoli di calettamento delle pale normali.

10. Esponiamo ora il procedimento che si deve seguire per determinare le correzioni da apportare ai valori delle trazioni e dei rendimenti di una data elica accoppiata ad un dato motore, ricavati in base alle caratteristiche aerodinamiche ottenute sperimentalmente ad un numero di Mach inferiore (od uguale) a 0,5.

(*) La giustificazione di tale assunzione consiste nel fatto che, grosso modo, il coefficiente di trazione dipende essenzialmente dal coefficiente di portanza dei profili delle pale, e che il diagramma di τ in funzione di γ presenta un incurvamento rapido solo se l'incidenza della maggior parte dei profili ha raggiunto e superato il valore critico.

Consideriamo prima il caso che l'elica sia a pale orientabili sia regolata in modo che il numero dei giri del motore rimanga costante ad ogni quota.

Il coefficiente di coppia dell'elica, qualunque sia la velocità dell'aereo, deve allora rimanere costante, e, qualunque sia il numero di Mach, deve avere il valore κ'_0 dato dalla $\kappa'_0 = \frac{\text{potenza}}{\rho R^5 \omega^3}$ in cui per ρ , R , ω si debbono porre i valori che si hanno in ogni particolare problema in esame. A questo valore costante di κ'_0 del propulsore operante ad un numero di Mach n elevato corrisponde, per ogni valore del rapporto di funzionamento, un valore κ_1 diverso per la medesima elica operante ad un valore di n minore di 0,5. In una prima approssimazione, che d'altra parte è sufficiente se le correzioni da portare sono abbastanza piccole, si possono determinare i valori κ_1 corrispondenti a κ'_0 per i vari γ in grazia dei grafici delle figure 15 e 16 nel modo seguente:

per ogni γ , dai diagrammi relativi alla famiglia alla quale l'elica data appartiene, si ricavano gli angoli di calettamento β_1 che corrispondono al valore noto κ'_0 , e quindi i valori corrispondenti dei coefficienti di trazione τ_1 . Si possono ora calcolare i rapporti $\frac{\tau_1}{\tau_c}$, osservando che non è necessaria, dato l'ordine di approssimazione della presente ricerca, una grande accuratezza nella determinazione di τ_c ; ammettendo che i coefficienti τ_1 così trovati non siano molto diversi dai coefficienti di trazione τ , che l'elica effettivamente dà, così che sia lecito, per il calcolo dei fattori di correzione, porre $\frac{\tau_1}{\tau_c} = \sim \frac{\tau}{\tau_c}$, i grafici dei fattori di correzione permettono di ricavare senz'altro, per ogni γ , i rapporti dei valori corrispondenti $\frac{\kappa'_0}{\kappa_1}$, che si possono leggere sulla intersezione dell'ordinata corrispondente al numero di Mach dell'elica data colle varie linee $\frac{\tau}{\tau_c} = \text{costante} = \frac{\tau_1}{\tau_c}$ disegnate nei grafici stessi.

Si ricavano così i coefficienti di coppia κ_1 che la medesima elica, operante agli stessi γ , avrebbe se il suo numero di Mach fosse inferiore a 0,5, dividendo κ'_0 per i valori ora determinati di $\frac{\kappa'_0}{\kappa_1}$.

Dagli stessi diagrammi sperimentali delle caratteristiche aerodinamiche dell'elica in esame si possono così dedurre i valori

dell'angolo di calettamento β_2 , e del coefficiente di trazione τ_2 che corrispondono, per ogni γ , al valore noto κ_1 . I valori di β_2 danno gli angoli coi quali deve effettivamente essere orientata la pala perchè, ad ogni γ , il coefficiente di coppia dell'elica, operante al numero di Mach prefissato, sia uguale a κ'_0 . Si ricavano poi i valori dei coefficienti di trazione effettivi τ_3 dell'elica, prima leggendo nei grafici dei fattori di correzione sulle linee $\frac{\tau}{\tau_f} = \text{costante}$

$= \frac{\tau_1}{\tau_c}$ i coefficienti $\frac{\tau_3}{\tau_2}$, che corrispondono al numero di Mach fissato, e quindi moltiplicando detti coefficienti $\frac{\tau_3}{\tau_2}$ per i valori di τ_2 ai vari γ .

Si ha così sia la trazione corretta dell'elica $T = \tau_3 \rho R^4 \omega^2$, sia il rendimento corretto $\eta = \frac{\tau_3}{\kappa'_0} \gamma$.

11. Esempio.

A maggior chiarimento del procedimento sopra spiegato, ne facciamo qui una applicazione.

L'elica è stata scelta nella 34^a famiglia (E 5866 ÷ R6), per una potenza di 950 HP a 2000 giri, in modo da realizzare il massimo rendimento per una velocità di 500 Km/ora a quota zero. Ne è risultato un diametro di 2,65 m. e quindi una velocità periferica di 278 m-sec., a cui corrisponde un numero di Mach $n = 0,84$.

Il coefficiente di coppia ha il valore costante $\kappa'_0 = 0,015$, di modo che sulla orizzontale $\kappa'_0 = 0,015$ del diagramma della 34^a famiglia si legge, per ogni γ , il calettamento β_1 della pala e il rendimento η_1 , da cui, mediante la relazione $\tau_1 = \frac{\eta_1 \times \kappa'_0}{\gamma}$, si ricava il coefficiente di trazione τ_1 (4^a colonna della tabella). Per τ_c si assume il valore 0,072, sicchè si hanno senz'altro i valori τ_1/τ_c (5^a colonna) mediante i quali, per $n = 0,84$, si deducono dai diagrammi di fig. 16 i rapporti $\frac{\kappa'_0}{\kappa_1}$ segnati nella 6^a colonna.

Essendo noto κ'_0 si trova senz'altro il coefficiente di coppia effettivo κ_1 in corrispondenza del quale si trovano sul diagramma dell'elica, per il prefissato γ , i valori del rendimento η_2 , e di conseguenza del coefficiente di trazione $\tau_2 = \frac{\eta_2 \times \kappa_1}{\gamma}$ nonchè il calettamento effettivo β_2 (8^a colonna).

Dal diagramma di fig. 16, sempre in funzione di τ_1/τ_c e di $\eta = 0,84$, si legge il rapporto τ_3/τ_2 , sicchè si ha infine il valore del coefficiente *effettivo* di trazione τ_3 .

Si è anche fatto il calcolo della potenza disponibile effettiva, nonchè di quella P_d , che si avrebbe se non esistesse l'influenza

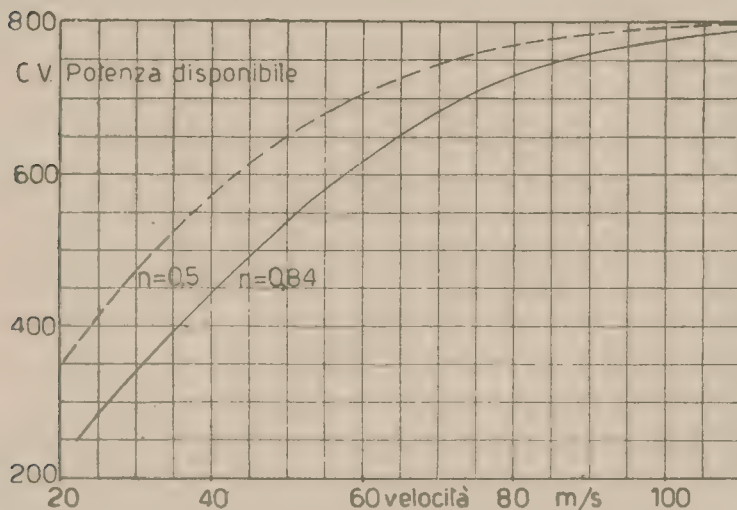


Fig. 17

della compressibilità dell'aria. I valori di P_d e P_d si ricavano immediatamente dalle relazioni

$$P_d = \eta \times P_{\text{motore}} \quad P_{d_1} = \frac{\tau_1}{\tau_3} P_{d_1}.$$

Nella figura 17 sono riportati i diagrammi di P_d e P_d , in funzione della velocità d'avanzamento V_0 .

12. Un procedimento analogo, ma alquanto più laborioso, permette di determinare le correzioni da apportare alle trazioni e ai rendimenti di un'elica data, determinati in base ai risultati sperimentali ottenuti a basso numero di Mach, se l'elica è a pale fisse. Illustriamo senz'altro il procedimento coll'esempio seguente.

Si sceglie un'elica della 34ª famiglia, che assorba 700 HP a 1800 giri, dando il massimo rendimento ad una velocità di 400 Km/h a quota zero. Procedendo nel modo consueto si trova un'elica di

100γ	β	η	100τ	τ, τ_e	$\frac{\kappa_e}{\kappa_1}$	$1000 \kappa_1$	β_s	η_s	$100 \tau_s$	$\frac{\tau_s}{\tau_e}$	$100 \tau_s$	V_s (m/sec)	P_{d_s} (c. v.)	P_d (c. v.)
8.3	23°	0.40	7.2	1	1.23	12.2	21°	0.43	6.3	0.80	5.05	23	380	266
9.6	id.	0.45	7.0	0.97	1.23	12.2	id.	0.48	6.1	0.82	5.0	26.7	428	306
11	id.	0.50	6.8	0.94	1.23	12.2	id.	0.53	5.9	0.84	4.95	30.6	475	345
12.6	id.	0.55	6.5	0.90	1.23	12.2	id.	0.58	5.6	0.87	4.9	35	523	394
14.5	id.	0.60	6.2	0.86	1.23	12.2	id.	0.63	5.3	0.92	4.88	40.3	570	450
16.5	24°	0.65	5.9	0.82	1.235	12.15	22°	0.68	5	0.96	4.8	46	618	504
18.8	24° 1/2	0.70	5.6	0.78	1.24	12.1	22° 1/2	0.72	4.63	1.00	4.63	52.2	665	550
22	25°	0.75	5.1	0.71	1.25	12.0	23°	0.78	4.25	1.06	4.5	61.1	710	626
26.8	27° 1/2	0.80	4.5	0.62	1.26	11.9	24° 1/2	0.81	3.60	1.17	4.2	74.5	760	706
32	29°	0.82	3.84	0.535	1.24	12.1	27°	0.83	3.14	1.17	3.7	89	778	759
40	31° 1/2	0.84	3.06	0.425	1.21	12.4	30°	0.84	2.60	1.17	3.04	111	798	790

diametro $D = 2,58$ m., con un calettamento di 35° . Per essa, nelle condizioni di massimo rendimento per cui è stata scelta, è

$$\begin{aligned} 100 \gamma &= 45 & 1000 \kappa &= 17 & \eta &= 0,83 \\ 100 \tau &= 3,14 & V_t &= 244 \text{ m/sec.} \\ n^0_{\text{Mach}} &= 0,74. \end{aligned}$$

Calcoliamo il rapporto τ_1/τ_c assumendo per τ_c il coefficiente di trazione che si ha per $\eta = 0,40$ e che risulta:

$$100 \tau_c = 7,25$$

mentre è

$$1000 \kappa = 27 \quad 100 \gamma = 14,8 \quad \eta = 0,40.$$

Si ha così un rapporto $\tau_1/\tau_c = 0,432$ a cui corrisponde, per $\eta = 0,74$, un rapporto $\kappa'_0/\kappa_2 = 1,1$. L'elica scelta assorbe effettivamente, per $100 \gamma = 45$ e 1800 giri, una potenza di $700 \times 1,1$ HP, per cui è necessario fare un secondo tentativo, scegliendo un'elica che assorba, coi coefficienti validi per bassi numeri di Mach, una potenza di $\frac{700}{1,1} = 636$ HP. Ripetendo le operazioni fatte, si trova:

$$\begin{aligned} D &= 2,50 \text{ m.} & \beta &= 36^\circ & V_t &= 232 \text{ m/sec.} \\ n^0_{\text{Mach}} &= 0,70 \end{aligned}$$

e nelle condizioni di massimo rendimento:

$$\eta = 0,84 \quad 1000 \kappa = 18,2 \quad 100 \tau = 3,2.$$

Assumendo per $100 \tau_c$ il valore corrispondente ad $\eta = 0,40$, che risulta 7,35, si ha $\tau_1/\tau_c = 0,435$ a cui corrisponde, per $\eta = 0,70$, un rapporto $\kappa'_0/\kappa_1 = 1,06$. Questa elica assorbirebbe quindi una potenza di $1,06 \times 636$ HP, cioè minore di 700 HP, per cui si fa il calcolo definitivo assumendo come fattore di riduzione della potenza la media fra i valori 1,10 e 1,06 trovato nei due tentativi fatti, e cioè assumendo l'elica per una potenza di $\frac{700}{1,08} = 650$ HP.

Risulta:

$$D = 2,55 \text{ m.} \quad \beta = 35^\circ . 40'.$$

Per determinare le caratteristiche corrette di quest'elica si procede nel modo seguente:

a) per ogni γ si determinano, sul diagramma della 34^a famiglia corrispondente al calettamento $\beta = 35^\circ . 40'$, i valori del

rendimento η_1 e del coefficiente di coppia 1000 κ_1 dai quali si deduce il coefficiente di trazione $\tau = \frac{\eta \kappa}{\gamma}$;

b) si assume, come nel caso illustrato in precedenza, il valore τ_c e quindi si hanno i rapporti τ_1/τ_c ;

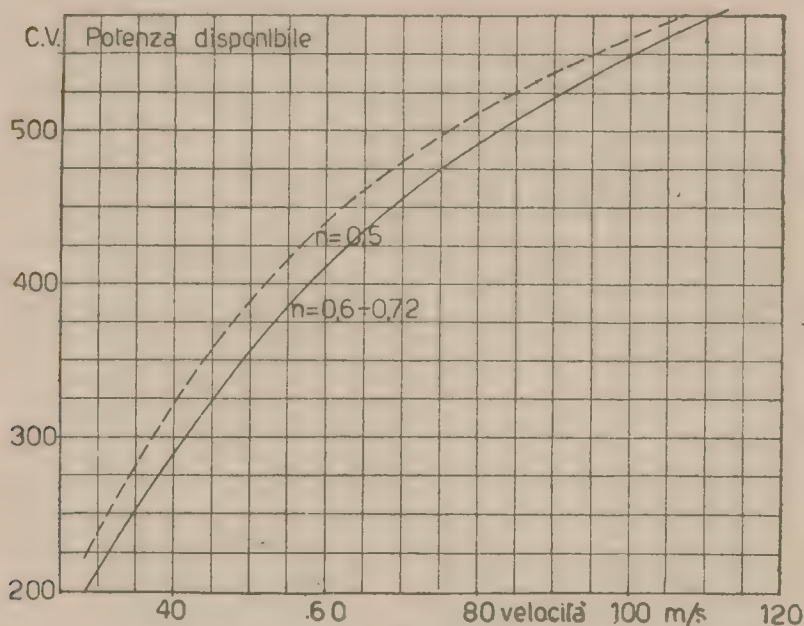


Fig. 18.

c) si determina il n° di Mach, che in questo caso risulta variabile al variare di γ in quanto l'elica è a passo fisso. Supposta la coppia del motore costante, il numero di giri è inversamente proporzionale alla radice quadrata del coefficiente di coppia, per cui indicando con n^* il numero di giri per cui è stata scelta l'elica e con κ_1 il relativo coefficiente di coppia, sarà:

$$\frac{n}{n^*} = \sqrt{\frac{\kappa_1^*}{\kappa_1}}$$

da cui

$$\frac{\text{numero di Mach alla velocità di avanzo } V}{\text{numero di Mach alla velocità max.}} = \sqrt{\frac{\kappa_1^*}{\kappa_1}};$$

d) in funzione del rapporto τ_1/τ_c e del numero di Mach si trovano, sui diagrammi di fig. 16, i fattori di correzione τ_2/τ_1 e κ_2/κ_1 con cui si determinano senz'altro gli effettivi coefficienti di trazione e di coppia τ_2 e κ_2 .

100 γ	η_1	1000 κ_1	100 τ_1	τ_1/τ_c	v^0 Mach	$\frac{\kappa_2}{\kappa_1}$	$\frac{\tau_2}{\tau_1}$	1000 κ_2	100 τ_2
15	0.40	27.5	7.35	1.00	0.60	1.03	0.98	28.4	7.2
16.5	0.45	26.8	7.3	1.00	0.61	1.035	0.975	27.8	7.1
18.1	0.50	26.3	7.25	0.99	0.62	1.04	0.97	27.4	7.05
19.9	0.55	26.2	7.2	0.98	0.62	1.04	0.97	27.25	7
21.5	0.60	26.1	7.2	0.98	0.62	1.04	0.97	27.15	7
24	0.65	26	7.05	0.96	0.62	1.04	0.98	27	7.1
26	0.70	26	7	0.95	0.62	1.04	0.99	27	7
30	0.75	26	6.5	0.89	0.62	1.04	1.00	27	6.5
35	0.80	25	5.7	0.77	0.626	1.04	1.02	26	5.8
40	0.82	22	4.5	0.61	0.67	1.05	1.05	23.1	4.73
44	0.84	19	3.63	0.50	0.72	1.07	1.07	20.3	3.88

Nella tabella precedente sono effettuati i vari calcoli per l'elica che si è scelta sopra, e nella figura 18 sono disegnate le curve delle potenze disponibili P_a , calcolate in base ai coefficienti validi per basso numero di Mach e in base ai coefficienti veri.

13. Dalla serie dei risultati sperimentali ottenuti dal N.A.C.A. e sopra ricordati appare pertanto che vi è realmente una possibilità di migliorare il rendimento delle eliche:

1° determinando la legge di variazione della larghezza relativa delle pale lungo il raggio, ed anche il calettamento dei vari profili, in modo da realizzare, per il rapporto di funzionamento corrispondente alla massima velocità di volo, la legge di variazione teorica della circolazione lungo il raggio che corrisponde al massimo rendimento. È assai probabile che, in tal modo, anche le caratteristiche all'involo, se l'elica è a pale orientabili, come avviene ormai quasi sempre, verranno migliorate, od almeno non peggiorate, rispetto alle attuali;

2° scegliendo i profili delle pale fra le serie che presentano la minima resistenza per un dato spessore massimo, e che conservino efficienza elevata ai numeri di Mach più alti; per le caratteristiche all'involo vale la stessa osservazione fatta prima, se l'elica è a pale orientabili;

3° profilando le sezioni delle pale fino al mozzo, e provvedendo questo, se il motore che comanda l'elica è raffreddato con liquido, di una larga impruatura in modo da nascondere tutte le sezioni non profilate;

4° aumentando il numero delle pale, se è necessario limitare il numero di Mach. Anche la legge di variazione della circolazione lungo il raggio (e quindi della larghezza relativa e del calettamento dei vari profili) deve, se il numero di Mach è abbastanza elevato, essere calcolata in modo da tener conto della variazione delle caratteristiche aerodinamiche dei profili col numero di Mach.

A. CASTAGNA

Eiettori per corrente gassosa.
Relazione tra la loro forma e la propulsione sviluppata.
Primo controllo sperimentale.

Riassunto. — *Ammessa la ipotesi che la evoluzione del fluido sia adiabatica e senza attrito lungo l'intero condotto, salvo in corrispondenza dell'eventuale onda d'urto che è considerata piana, vengono determinati i possibili regimi di deflusso in funzione del proporzionamento dell'eiettore e del rapporto delle pressioni estreme, deducendo per ogni caso i valori della propulsione ottenibile per reazione.*

Viene stabilito che con l'eiettore semplicemente convergente si realizza grande efficienza di propulsione.

Appare inoltre che parte dei risultati della presente teoria valgono invariati anche nel caso che si conteggino i fenomeni di attrito.

Alcuni dei primi risultati sperimentali qui esposti provano che la complessiva azione aerodinamica sul fuso eiettore dovuta ai concomitanti effetti della resistenza all'avanzamento e della reazione del getto equivale alla somma algebrica delle azioni sviluppate da ciascuna delle due cause operanti separatamente.

1. — L'applicazione alla propulsione degli aeromobili della forza di reazione sviluppata da parte di un fluido proiettato ad alta velocità mediante un conveniente eiettore, può essere presa in considerazione soltanto nell'ipotesi che l'energia spesa venga utilizzata con un rendimento sufficientemente elevato. Perchè ciò si verifichi è necessario eliminare o ridurre per quanto è possibile le più gravi cause di perdita, che nel fatto accennato assumono aspetti del tutto particolari.

Invero, elemento caratteristico delle trasformazioni di energie in questione è che i fenomeni che possono manifestarsi nell'interno del tubo eiettore, profilato per una corrente gassosa molto veloce, sono tali da determinare regimi di deflusso profondamente differenti fra loro.

Corrispondentemente a tali diversi regimi, i valori delle pressioni esercitate dal fluido contro le pareti del tubo eiettore differiscono pure grandemente; e di conseguenza anche la reazione sull'eiettore, che di tali pressioni è la risultante, può assumere valori assai disparati.

La conoscenza della reazione nei vari casi, e dei mezzi da mettere in opera per ottenere di essa reazione i valori più convenienti, è uno degli scopi più notevoli delle ricerche su questo argomento.

Anche a prescindere da future probabili applicazioni su vasta scala di questo sistema di propulsione, che potrebbero svilupparsi in balistica ed in aeronautica, già fin d'ora sarebbe assai utile, in alcuni importanti casi della tecnica, l'applicazione del procedimento alla utilizzazione della energia necessariamente posseduta da gas che vengono attualmente espulsi senza ricavarne alcun profitto.

Il lavoro verrebbe raccolto sotto forma di spinta data dai gas sull'eiettore in movimento.

Nella presente Nota vengono appunto stabiliti quali siano, in corrispondenza ai regimi di deflusso che si hanno nella eiezione di gas a velocità elevata, i valori della reazione nel caso ideale; risulta che l'eiettore semplicemente convergente possiede caratteristiche eccezionalmente favorevoli al raggiungimento della grande efficienza di propulsione e si riconosce che buona parte dei risultati acquisiti valgono pienamente anche nel caso effettivo. Infine viene dato conto dei risultati sperimentali ottenuti in una prima serie di prove effettuate con eiettore sia immobile, sia in rapido moto rispetto al fluido che lo circonda.

2. *Valore della reazione del fluido sul tubo eiettore.* — Sia il condotto AB (fig. 1) di forma esterna ed interna qualsiasi; il gas, animato da un moto comunque vario nel tempo, entra in A ed esce da B dopo aver subito entro il condotto evoluzioni pure qualsiasi. Si prescinde dall'azione del peso.

Il corpo è soggetto, sulla sua superficie esterna, delimitata dai contorni di A e di B , alla pressione dell'atmosfera circostante p , supposta per ora uniforme; mentre sulla superficie interna, cioè quella del condotto tra le sezioni A e B , subisce la pressione — variabile con il punto considerato — del fluido corrente entro il corpo.

Il complesso delle azioni ora elencate è la cercata reazione sul corpo dovuta alla corrente fluida, come si riconosce osservando che se il fluido fosse in tutti i punti in quiete la pressione

sarebbe necessariamente uniforme ovunque e quindi l'azione complessiva sul corpo sarebbe nulla.

Poichè la superficie esterna del corpo manca delle sezioni A e B per essere chiusa, l'azione risultante della pressione p_e uniforme su di essa non è nulla; essa vale precisamente le due forze A_e , B_e uguali e contrarie alla spinta che per effetto di p_e verrebbe esercitata su A e B .

L'azione sulla parete interna del condotto viene determinata a sua volta applicando il teorema della quantità di moto alla massa fluida contenuta entro AB .

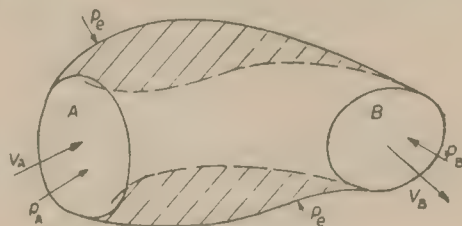


Fig. 1.

Si giunge così alla seguente proposizione che definisce la reazione cercata:

La reazione Z del fluido sull'eiettore entro cui scorre è data dalle spinte sulle facce d'entrata e di uscita del condotto considerato, dovute all'eccesso della pressione del fluido su quella ambiente, meno la somma della variazione della quantità di moto del fluido dall'ingresso all'uscita nel tempo unitario $Q_B - Q_A$ con la variazione nel tempo unitario della quantità di moto del fluido contenuto nel condotto, Q'_{AB} .

Se A_e e B_e sono le azioni (analoghe alle A_e , B_e) che, per effetto delle pressioni p_A e p_B esistenti nei singoli punti di A e B , vengono applicate su queste stesse facce del tronco fluido racchiuso nell'eiettore, si può scrivere l'equazione vettoriale

$$(1) \quad Z = A_e + A_a + B_e + B_b - (Q_B - Q_A + Q'_{AB}).$$

Analogamente si calcola il momento della reazione sull'eiettore, M . Riferendo i momenti ad un certo punto origine, e indicando con la lettera M i momenti delle forze di pressione, con la N i momenti delle quantità di moto e con N' la derivata di questi ultimi rispetto al tempo, si deduce una equazione del tutto corrispondente alla (1):

$$(2) \quad M = M_{ea} + M_{ea} + M_{eb} + M_b - (N_B - N_A + N'_{AB}),$$

che si enuncia:

Il momento della reazione applicata da parte del fluido sull'eiettore entro cui scorre è dato dal momento delle spinte sulle sezioni

di ingresso e di uscita corrispondenti all'eccesso della pressione del fluido su quella ambiente, meno la somma della variazione del momento della quantità di moto nel tempo unitario dall'ingresso all'uscita con la variazione del momento della quantità di moto del fluido contenuto nel condotto.

3. Sulla definizione di reazione. — Si è ammesso che la pressione esterna p_e sia uniforme su tutta la superficie esposta.

Tale ipotesi può essere più generalmente interpretata nel senso che la legge di distribuzione della pressione esterna al corpo è supposta indipendente dal deflusso in seno al corpo stesso.

Ora, se il corpo è mobile in seno ad una certa atmosfera, la pressione p_e ha una propria distribuzione non uniforme, tanto che la risultante delle azioni di pressione sul corpo costituisce una parte della resistenza all'avanzamento.

Si vede di qui come non sia affatto evidente che cosa debba intendersi per reazione del getto sull'eiettore, in quanto la presenza del getto ha per effetto una alterazione del campo di pressione preesistente con conseguente variazione della corrispondente azione del fluido esterno sul corpo.

Reciprocamente la stessa forma del getto e la corrispondente spinta sull'eiettore dipendono dal campo di velocità esterno al corpo stesso.

La reazione del getto e l'azione del fluido esterno si manifestano dunque confuse assieme alle variazioni dovute alle mutue influenze.

Risulta da ciò inopportuna la definizione di reazione del getto sul corpo quale variazione della azione fluidodinamica sul corpo nel passaggio al regime con getto attivo conservando il moto relativo del corpo rispetto al fluido nelle regioni lontanissime indisturbate — definizione apparentemente più aderente al fatto fisico di quanto non sia quella corrispondente alla ipotesi della pressione ambiente uniforme, ammessa nel n. 2.

Le mutue influenze del campo di velocità dovuto al moto del corpo nel fluido e di quello del getto sarebbero eliminate per l'efflusso nel vuoto. Ma questo regime particolare esclude quelli che si hanno in seno all'atmosfera.

Si riconosce così che non si può scindere il deflusso entro il condotto da quello esterno, e che in definitiva l'azione dovuta al getto e quella sulla superficie esterna costituiscono l'effettiva azione sul corpo derivante dall'unico fenomeno fluidodinamico definito dal moto di tutta la massa fluida circostante l'eiettore.

Queste considerazioni riportano a contentarsi di una definizione convenzionale della reazione del getto, della quale si può definire un *valore nominale*, analogamente del resto a quanto si usa in altri casi in cui si incontrano difficoltà per una più precisa valutazione dei fatti.

Si approfitta allora per scegliere quale definizione una che, pur essendo soddisfacente per quanto è aderenza alla concezione intuitiva del fenomeno, sia di forma particolarmente semplice, ed esprimibile con forme algebriche elementari e di chiara interpretazione.

Tale è appunto la definizione espressa nelle formole (1), (2) e nei corrispondenti enunciati. Essa significa che quale *reazione del getto si intende la spinta prodotta sul corpo eiettore supposto immerso in un fluido immobile* — o meglio di cui sia uniforme, ed uguale a quella lontana dal corpo, la pressione sulla superficie esterna del corpo (superficie non lambita dalla massa traversante il condotto).

In altri termini, *la reazione del getto è la variazione della spinta sul corpo dovuta all'effetto del getto stesso e nella ipotesi di influenza mutua nulla tra getto e campo di velocità preesistente.*

In particolare, se il corpo è immobile nell'atmosfera circostante, potrà accadere che siano trascurabili i fenomeni secondari accennati, e la spinta di reazione sarà allora misurabile sull'eiettore a fermo quale unica forza ad esso applicata dal fluido.

Di essa reazione sarà poi luogo a considerare le influenze reciproche con le azioni del campo di velocità esterno al corpo, le variazioni dal valore teorico ecc.

4. *Casi particolari.* — Allorchè la massa uscente dall'eiettore viene prelevata dal corpo stesso, mancano la sezione di imbocco A e, quindi, anche i termini A_a , A_e , Q_A relativi ad essa sezione. La equazione (1) diventa allora:

$$(3) \quad Z = B_b + B_e - (Q_B + Q'_{AB})$$

cioè, nel caso che la massa lanciata sia contenuta inizialmente nell'eiettore, la reazione del getto contro il corpo è la differenza dei due termini: l'azione sulla sezione di uscita dovuta all'eccesso della pressione nel fluido su quella esterna, e la somma della quantità di moto uscente nell'unità di tempo dell'eiettore con la variazione nel tempo unitario della quantità di moto del fluido contenuto entro il condotto.

Analogamente si riduce per questo caso la equazione (2).

Un caso semplice e notevole si ha quando tutti i vettori della equazione (1) appartengono alla stessa retta. Allora la (2) è identicamente verificata; essendo nulli i momenti presi rispetto ad un punto qualunque del sostegno dei vettori. Questo caso si verifica, per esempio, se l'eietttore ed il campo di velocità presentano un asse di simmetria, che appare il comune sostegno dei vettori. La (1) diventa una semplice equazione algebrica fra grandezze scalari.

La reazione Z si ottiene allora considerando la componente dei diversi vettori, compresi nella (1), parallela alla direzione dell'asse di simmetria.

Così, se si ha lo stato di regime delle velocità e se la massa fluente viene tolta al corpo dell'eietttore, si tratterà di proiettare i vettori B_o , B_e , Q_B .

Orientando la retta di riferimento col verso positivo opposto al verso della velocità di uscita del fluido dal corpo V_B , la proiezione dell'azione B_o della pressione nel fluido p_B risulta diretta nel verso positivo e vale $p_B \cdot B$; la proiezione dell'azione B_e della p_e risulta, giusta la sua definizione, diretta in senso negativo e vale dunque $-p_e \cdot B$; infine la quantità di moto — vettore diretto come la velocità V_B — dà proiezione negativa, cioè a Q_B corrisponde lungo l'asse di riferimento la quantità $-M \cdot V_B$, dove M è la portata di massa. Si deduce:

$$(4) \quad Z = (p_B - p_e)B + M V_B.$$

Infine, questa stessa equazione vale evidentemente anche per il caso in cui, ferma restando l'ipotesi dello stato di regime delle velocità, i vettori B_o , B_e , Q_B appartengano alla retta di riferimento o ad essa siano paralleli, mentre i vettori A_o , A_e , Q_A siano perpendicolari a tale retta; ciò che accade, per esempio, allorché il fluido entra in un eietttore, il cui ugello di lancio ha forma di rivoluzione, attraverso un tubo normale all'asse dell'ugello.

5. *Possibilità di un massimo della spinta.* — La reazione del fluido può essere utilizzata dall'eietttore, supposto mobile, quale forza propulsiva o, in generale, quale azione atta a variare comunque in grandezza o direzione la velocità del corpo mobile.

La equazione (4) mostra che, per ottenere grandi valori di questa azione, in particolare nel caso che la massa da proiettare sia contenuta nel corpo mobile, è opportuno comunicare al fluido velocità di efflusso V_B elevata.

Bisogna però rilevare un punto fondamentale. Se è vero che una grande spinta si può ottenere con velocità elevate, non è affatto vero in generale che ad ogni aumento della velocità di lancio si sia autorizzati a far corrispondere un incremento della reazione ottenuta. Questo succede solamente se l'eiettore scarica nel vuoto.

Difatto, per ottenere le grandissime velocità di efflusso V_B , viene utilizzata la energia del fluido facendogli seguire entro l'ugello di lancio una conveniente espansione. Lungo questa evoluzione, all'aumento di velocità V_B di uscita corrisponde necessariamente la diminuzione della pressione del fluido, la quale, ad un certo punto, diventa minore di quella ambiente p_e .

Allora, mentre la quantità di moto MV_B — secondo addendo a secondo membro nella equazione (4) della reazione — continua a crescere, l'altro addendo $(p_B - p_e)B$ diventa negativo e crescente in valore assoluto al diminuire della pressione di uscita p_B .

Si tratta ora di riconoscere quale delle due variazioni è prevalente, o meglio di stabilire le condizioni occorrenti per ottenere il valore più conveniente della spinta.

6. Pressione di uscita e pressione ambiente in rapporto col regime di deflusso. Rapporto di espansione disponibile e rapporto di espansione effettivo.

a) *Velocità di uscita maggiore di quella del suono.* — Si è accennato a valori della pressione di uscita p_B diversi da quelli della pressione ambiente p_e . Si osserva a questo proposito che la pressione del fluido uscente, in corrispondenza alla sezione terminale del condotto, p_B , può essere maggiore di quella ambiente — ed allora segue una espansione fuori del tubo; oppure essere la pressione all'uscita minore di quella ambiente, nel qual caso l'uscita del gas dal tubo è possibile solo se la pressione può risalire al valore p_e . Queste due forme di efflusso possono verificarsi nel solo caso che la velocità del fluido uscente sia superiore a quella del suono.

Per quanto riguarda il deflusso con pressione $p_B > p_e$ si osserva difatto che, se viene raggiunta la velocità del suono, la portata fluida M è definita in funzione dello stato iniziale del fluido e dell'area della sezione di gola, ma affatto indipendentemente dalla pressione ambiente p_e . In queste condizioni, finchè procede la espansione entro il condotto, lo stato del fluido in una qualunque sezione è univocamente determinato in funzione del solo rapporto dell'area della sezione a quella della gola del tubo: e

di conseguenza, l'area della sezione generica occorrente al deflusso corrisponde univocamente alla pressione ivi regnante, e reciprocamente. Tanto minore è la pressione, tanto maggiore è la sezione.

Cosicchè si può dire che entro un determinato eietttore è impossibile la espansione fino a pressioni più basse di un ben determinato valore, perchè esso non presenta sezioni più ampie della sua massima, quella di uscita, per esempio. Dunque, se la pressione ambiente p_c è più piccola di tale determinato valore, l'espansione fino al valore p_c deve necessariamente svolgersi a valle della sezione di uscita.

D'altra parte la pressione nella sezione terminale del condotto può essere minore, in certa misura, di quella esterna, solo nel caso che la velocità corrispondentemente sia maggiore di quella del suono, perchè solo allora può determinarsi l'onda d'urto in seno al fluido, che ha appunto per effetto di elevare la pressione del gas in movimento consentendone l'uscita dal condotto.

Infine nel deflusso a velocità ultrasonora con pressione d'uscita uguale a quella esterna, il gas procede nel suo cammino entro l'ambiente senza variazione di pressione.

b) *Velocità di uscita minore di quella del suono.* — Se invece la velocità del fluido nella sezione terminale del condotto è inferiore a quella del suono, ivi la pressione necessariamente deve essere uguale a quella esterna . .

Difatto, minore non può essere perchè non si può verificare l'onda d'urto, che sola potrebbe far crescere localmente la pressione del fluido, mentre esso attraversa la sezione terminale, in modo da consentirgli di penetrare nell'ambiente esterno a pressione elevata.

Nemmeno può essere maggiore perchè, anche immaginando che ciò fosse in un dato istante, la pressione stessa si abbasserebbe fino al valore p_c determinando istantaneamente una espansione che si propaga controcorrente entro il condotto.

La diversità dell'andamento rispetto al caso analogo per velocità elevata procede da ciò che, mentre con velocità del fluido ultrasonora una espansione che avvenisse in corrispondenza ad una certa sezione richiederebbe il dilatarsi della sezione stessa — e quindi tale espansione può verificarsi soltanto nell'atmosfera ambiente, subito fuori della sezione d'uscita del condotto — invece nel caso in cui la velocità è inferiore a quella del suono, la espansione richiede che la sezione diminuisca, ciò che può essere soddisfatto senza impedimenti in seno alle stesse sezioni preesistenti.

La velocità di spostamento rispetto al fluido in moto della perturbazione determinata dall'espansione nella sezione terminale è in ciascuna sezione pari alla velocità del suono corrispondente allo stato del gas in quella sezione.

Possono quindi verificarsi più casi.

A) La velocità del fluido è ovunque inferiore a quella del suono. Allora la perturbazione prodottasi nella sezione d'uscita riesce a risalire la corrente fino alla sezione di gola e, infine, all'ambiente di partenza, provocando in tutte le sezioni una espansione del fluido e dando luogo in definitiva all'aumento della velocità del gas (e quindi della portata), fino al valore corrispondente al nuovo salto di pressione effettivamente disponibile p_0/p_e .

B) Ma la velocità di uscita minore di quella del suono può risultare, oltre che dal deflusso completamente iposonoro, anche dall'abbassamento di velocità che, in una corrente animata da velocità ultrasonora, viene provocato da un'onda d'urto. La velocità è iposonora nel tratto di condotto a valle dell'onda d'urto.

Allora la espansione che nella bocca di uscita trae origine da un ipotetico improvviso abbassarsi della pressione esterna, si propaga controcorrente fino al fronte d'urto; ma non oltre, perchè a monte dell'onda d'urto la corrente è più veloce della propagazione della perturbazione.

È intuitivo, e d'altronde risulta più precisamente da quanto viene svolto più oltre, che la fronte d'urto avanza allora per un certo tratto nel condotto, dato che essa si affaccia ad un ambiente a pressione ridotta. Avendo ammesso implicitamente che la sezione dell'effusore vada aumentando verso l'uscita, alla nuova posizione della fronte d'urto corrispondono l'aumento dell'espansione a monte e la riduzione della pressione sia a monte sia a valle dell'onda d'urto, il tutto in accordo con la perturbazione intervenuta. L'andamento del fenomeno presenta dunque il carattere della stabilità.

In questo caso, naturalmente, la portata non viene aumentata per effetto della perturbazione.

C) Vi sono poi i regimi di transizione. Se la velocità nella gola è prossima a quella del suono, l'espansione a valle provoca dapprima l'apparizione di tale velocità critica nella gola, e più oltre un'onda d'urto a valle. Si ricade nel caso ora veduto. La portata aumenta fino al massimo corrispondente alla velocità del suono nella gola, per poi rimanere costante.

Infine, potrebbe l'onda d'urto essere assai prossima all'uscita del condotto, e l'espansione a valle portarla proprio nella sezione terminale, dopo di che si ripete il caso *a*). La pressione nella sezione terminale diventa invariabile mentre la portata rimane costante.

c) Rapporto di espansione disponibile e rapporto di espansione effettivo. — Risulta da quanto è stato svolto in questo numero che vi è luogo a distinguere il *rapporto di espansione disponibile* (o semplicemente *rapporto di espansione*) — tra la pressione iniziale p_0 e la pressione ambiente p_e — dal *rapporto di espansione effettivamente utilizzato* entro il condotto — tra la pressione iniziale p_0 e la pressione esistente nella sezione terminale dell'eiettore p_B .

La pressione p_B può essere maggiore o minore della pressione esterna p_e , e la velocità nella sezione di uscita deve allora essere necessariamente ultrasonora.

Può altrimenti essere $p_B = p_e$, ed allora la velocità nella sezione di uscita può essere ultrasonora oppure iposonora; ed in questo secondo caso può risultare o da un deflusso effettuato a velocità minore di quella del suono per l'intero condotto, oppure da un'onda d'urto operante in una sezione interna al condotto stesso.

I caratteri della evoluzione e la efficienza che ne risulta agli effetti della reazione sviluppata, e cioè della propulsione applicata all'eiettore, sono differenti da caso a caso e vengono esaminati nelle pagine seguenti.

7. *Scelta dei parametri adimensionali.* — Le formole acquistano veste semplice e significato generale se si introducono convenienti parametri adimensionali.

Si considera *iniziale* lo stato del fluido in cui la velocità è nulla, e dunque anche quello raggiungibile mediante compressione ideale adiabatica ad inerzia fino a velocità zero partendo da uno stato qualunque raggiunto pure con evoluzioni adiabatiche e senza lavoro esterno. Siano p_0 , T_0 , ρ_0 , p , T , ρ pressione, temperatura e densità nello stato iniziale, e nella sezione generica del condotto di efflusso rispettivamente; C , c i calori specifici a pressione ed a volume costante per l'unità di massa in unità meccaniche, k il loro rapporto.

I valori numerici dichiarati nel seguito sono tutti stati calcolati per $k = 1,4$, che corrisponde sensibilmente al caso dell'aria a temperatura ordinaria. È dunque:

$$(5) \quad C - c = gR$$

dove g è l'accelerazione di gravità, R la costante di elasticità del gas.

Per l'aria, $R = 29,3$ m/grado, con che risulta

$$(6) \quad C - c = 287 \text{ m}^2/\text{s}^2 \cdot \text{grado} \quad \text{e} \quad C = 1005 \text{ m}^2/\text{s}^2 \cdot \text{grado}.$$

La *velocità limite*, corrispondente all'espansione adiabatica ideale nel vuoto, è data da

$$(7) \quad V_L = (2CT_0)^{1/2}$$

Le grandezze *pressione*, *temperatura*, *densità*, *velocità relative* possono ora essere definite:

$$(8) \quad \lambda = p/p_0 \quad \tau = T/T_0 \quad \delta = \varrho/\varrho_0 = \lambda/\tau \quad \varphi = V/V_L.$$

Con queste posizioni, la equazione di stato del gas risulta

$$(9) \quad \lambda/\tau\delta = 1$$

assumendo la forma generale comune a tutti i gas (ideali).

Poichè le note esperienze su questo argomento dimostrano che la espansione in un effusore convenientemente progettato si approssima molto a quella adiabatica ideale del fluido, quest'ultima evoluzione può essere scelta a rappresentare l'andamento ideale del fenomeno in esame.

Sotto la sola condizione di scambio termico nullo con l'esterno, e dunque anche senza che sia necessario escludere la presenza di resistenze passive, vale la nota relazione tra velocità e temperatura

$$(10) \quad \varphi^2 + \tau = 1$$

e se, in più, il fluido è perfetto, si ha pure la relazione tra pressione e temperatura

$$(11) \quad \lambda = \tau^{\frac{k}{k-1}}$$

8. *Sezione limite. Sezione relativa.* — Conviene definire pure un *valore relativo della sezione* del condotto. Perciò si introduce ora la *sezione limite* F_L , stabilita in funzione della portata di massa M , della densità corrispondente allo stato iniziale ϱ_0 e della *velocità limite* V_L :

$$(12) \quad F_L = \frac{M}{\varrho_0 V_L}.$$

La grandezza così definita è quella *sezione ideale* che *occorrerebbe all'efflusso della portata M del fluido, supposto incompressibile, e dotato della velocità corrispondente alla trasformazione di tutta la energia contenuta inizialmente nel fluido, e dunque tale velocità da conferirgli la energia cinetica equivalente al suo calore totale.*

a) *Velocità acustica nella sezione minima.* — A complemento di questa definizione si osserva che, per un qualsiasi stato iniziale assegnato al fluido, la velocità nella sezione minima F_s — di gola, in un tubo di Laval — assume il suo massimo valore, che è quello invariabile della velocità del suono V_s , per lo stato del fluido in detta sezione (distinto perciò con l'indice s), tutte le volte che la pressione a valle del condotto p_e è inferiore a un certo valore. Ciò accade sempre allorchè si sviluppano elevate velocità di efflusso. Corrispondentemente la portata di massa del fluido raggiunge il suo valore massimo, che rimane pure fisso per tutti i valori della pressione a valle testè accennati.

È chiaro che in queste condizioni la sezione limite F_L ha un valore costante ben definito, e così pure il rapporto tra la sezione di gola del condotto F_s e la stessa F_L .

Ma addirittura, ricordando le espressioni delle due sezioni

$$F_L = \frac{M}{\varrho_0 V_L} \quad F_s = \frac{M}{\varrho_s V_s}$$

e che, per una espansione adiabatica ideale dallo stato $T_0 \varrho_0$ allo stato $T_s \varrho_s$, si ha

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tau_s = T_s / T_0 = \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k}{k-1}} \quad \lambda_s = \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k}{k-1}} \\ \delta_s = \varrho_s / \varrho_0 = \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{1}{k-1}} \quad \varphi_s = V_s / V_L = (1 - \tau_s)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{k-1}{k+1} \right)^{\frac{1}{2}} \end{array} \right.$$

risulta che il rapporto tra sezione di gola F_s e sezione limite F_L è una costante assoluta:

$$(14) \quad \mathfrak{F}_s = \frac{F_s}{F_L} = \left(\frac{2}{k+1} \right)^{-\frac{1}{k-1}} \left(\frac{k-1}{k+1} \right)^{-\frac{k}{2}} = \frac{1}{\delta_s \varphi_s}$$

su cui non influiscono la forma e la grandezza dell'ugello, nè lo stato iniziale del fluido o quello nell'ambiente in cui il gas viene

lanciato, e quindi neanche la portata. Esso rapporto dipende solo dalla natura del gas.

I valori numerici delle quantità indicate calcolati per $k = 1,4$, sono

$$\tau_s = 0,833 \quad \lambda_s = 0,529 \quad \varphi_s = 0,408 \quad \delta_s = 0,635 \quad \mathfrak{F}_s = 3,86$$

A meno che non sia dato esplicito avviso contrario, nel seguito verrà sempre ritenuto che la (14) — la quale riassume le precedenti considerazioni di questo numero — sia verificata.

In funzione della sezione limite F_L viene definita la *sezione relativa* del condotto, cioè della vena gassosa fluente, corrispondente a quella effettiva F :

$$(15) \quad \mathfrak{F} = F/F_L.$$

L'introduzione di questo parametro semplifica grandemente la grafia di molte formole di uso frequente.

b) *Velocità inferiore a quella del suono nella sezione minima.* — Si consideri ora il caso in cui la pressione a valle dell'elettore sia così alta che la velocità nella sezione minima del tubo risulti inferiore a quella del suono.

La portata cessa di essere costante per un dato stato iniziale del fluido p_0, T_0 , ma acquista un valore M_b dipendente dal salto di pressione disponibile p_0/p_e . La sezione limite assume allora un valore F'_L variabile, proporzionalmente alla portata M_b . Precisamente la sezione limite andrà diminuendo man mano aumenta la pressione d'uscita p_e . Sussiste cioè la relazione

$$(12') \quad F'_L = F_L \frac{M_b}{M}.$$

La definizione di sezione relativa $\mathfrak{F}'$ in queste condizioni assume la forma:

$$(15') \quad \mathfrak{F}' = \mathfrak{F} \frac{M_b}{M}.$$

Salvo la sostituzione di F'_L ad F_L e di $\mathfrak{F}'$ ad $\mathfrak{F}$, tutte le formole conservano la stessa forma nei due casi considerati; di grande ovvero piccola velocità di efflusso.

Con l'introduzione della definizione (15) di $\mathfrak{F}$, la espressione della sezione del getto ovvero del condotto — e cioè la equazione di continuità.

$$F = M/\rho V,$$

diventa

$$(16) \quad \mathfrak{F} = \frac{F}{F_L} = \frac{M/\varrho V}{M/\varrho_0 V_L} = \tau/\lambda\varphi.$$

Per la evoluzione adiabatica ideale valgono poi le espressioni

$$(17) \quad \mathfrak{F} = \tau^{-\frac{1}{k-1}} (1-\tau)^{-1/2} = \lambda^{-1/k} (1-\lambda^{\frac{k-1}{k}})^{-1/2} = \varphi^{-1} (1-\varphi^2)^{-\frac{1}{k-1}}$$

ottenibili dalla precedente mediante le (10) e (11). A titolo di esempio, esse sono applicabili fintantochè il fluido segua una espansione, ma non seguitano a valere dopo l'attraversamento di un'onda d'urto, quale può verificarsi se la velocità è superiore a quella del suono.

Ora si osserva che le (17) fanno corrispondere a ciascun valore della sezione $\mathfrak{F}$ due distinti valori della pressione λ , o della temperatura τ , o della velocità φ ; salvo che per il particolare valore (14) della sezione

$$\mathfrak{F}_s = \left(\frac{k+1}{k-1} \right)^{1/2} \left(\frac{k+1}{2} \right)^{\frac{1}{k-1}}$$

che definisce l'unico valore $\tau_s = 2/(k+1)$ della temperatura, o quello della pressione $\lambda_s = (2/[k+1])^{k/(k+1)}$, o della velocità $\varphi_s = \left(\frac{k-1}{k+1} \right)^{1/2}$

Sono questi i parametri caratteristici della sezione di gola del condotto, in corrispondenza alla quale la velocità del fluido è proprio quella del suono per lo stato del gas in detta sezione.

I due valori di τ , ovvero di λ , determinati dalla (17) per ogni valore di $\mathfrak{F}$ maggiore di $\mathfrak{F}_s$, corrispondono il maggiore al deflusso a velocità inferiore a quella del suono, e il minore al moto con velocità superiore a quella sonora; mentre l'opposto è per la velocità φ .

9. *Spinta relativa.* — Una conveniente espressione numerica della spinta Z viene dedotta immediatamente partendo dalla considerazione che esiste per Z il valore massimo assoluto $Z_{\max}$, corrispondente alla espansione ideale adiabatica nel vuoto. Tale forma dell'efflusso annulla il termine $(p_B - p_e) B$ della equazione (4), mentre la spinta assume il valore

$$(18) \quad Z_{\max} = M V_L.$$

Basta ora dividere Z per il suo massimo valore. Si ottiene:

$$\frac{Z}{MV_L} = \frac{p_0 F_L}{MV_L} (\lambda_B - \lambda_s) \mathfrak{F}_b + \varphi_B$$

e ricordando le precedenti (7), (8) e (12) si deduce

$$(19) \quad \frac{Z}{MV_L} = \theta = \frac{k-1}{2k} (\lambda_B - \lambda_s) \mathfrak{F}_b + \varphi_B.$$

Il numero θ è sempre minore dell'unità ed esprime quale aliquota della massima spinta idealmente disponibile viene effettivamente sviluppata. Questa spinta relativa può essere determinata ed analizzata quando sia stabilita la natura dell'evoluzione seguita dal fluido nella espansione entro il divergente dell'eiettore.

Così, ancora nel caso dell'evoluzione ideale adiabatica, volendo esprimere la spinta relativa in funzione della sola temperatura, si ottiene

$$(20) \quad \theta = \frac{k-1}{2k} (\tau_b^{\frac{k}{k-1}} - \tau_s^{\frac{k}{k-1}}) \tau_b^{-\frac{1}{k-1}} (1 - \tau_b)^{-1/2} + (1 - \tau_b)^{1/2}$$

avendo chiamato con τ_b la temperatura relativa nella sezione terminale B corrispondentemente a detta evoluzione.

10. *Il massimo della spinta variando l'espansione compiuta entro l'ugello.* — È ora facile studiare il comportamento della grandezza Z ovvero θ .

Il massimo nel valore della spinta viene qui ricavato per il caso in cui siano verificate le condizioni seguenti.

Lo stato iniziale $p_0 T_0$ del gas sia costante — e quindi sia fissa la portata M , avendo pure supposto che la velocità nella assegnata sezione di gola sia quella del suono — e data sia pure la pressione ambiente p_s . Con essa resta definito il rapporto di espansione disponibile p_0/p_s .

Viene ammesso che l'espansione effettivamente seguita dal fluido nel condotto si svolga adiabaticamente ed in assenza di resistenze passive lungo l'intero percorso nel condotto.

La grandezza in funzione della cui variazione viene stabilito il massimo della spinta θ è appunto la pressione raggiunta dal fluido nella sezione terminale dell'eiettore dopo avere effettuato la espansione conforme l'ipotesi.

D'altra parte, per consentire la variazione della pressione di uscita occorre necessariamente ammettere pure variabile la sezione terminale dell'eiettore, insieme con la velocità di uscita, correlativamente alla pressione stessa.

In quanto si ammette che la pressione all'uscita possa essere diversa da quella ambiente p_e , la ricerca si riferisce a velocità di uscita superiore a quella del suono (n. 6, a).

Se la velocità nella sezione terminale è inferiore a quella del suono, la pressione in tale sezione è necessariamente uguale a p_e , costante, e quindi non è luogo a considerare alcun massimo di Z in dipendenza di una variazione della pressione.

I regimi corrispondenti alla ipotesi di piccola velocità verranno discussi più oltre.

Per determinare la condizione di massimo della spinta Z si differenzia la seguente (4 ripetuta) (avendo chiamato con F la sezione terminale, in cui sono la velocità V e la pressione p , tutte e tre variabili)

$$(4 \text{ ripetuta}) \quad Z = (p - p_e)F + MV.$$

Si trae

$$(21) \quad dZ = (p - p_e)dF + F \cdot dp + M \cdot dV.$$

Sostituendo ora ad F , p e V i valori deducibili dalle precedenti (8), (10) e (17) si riconosce che la somma dei due ultimi termini della (19) è identicamente nulla.

$$(22) \quad F \cdot dp + M \cdot dV = \frac{M}{\rho_0 V_L} \tau^{-\frac{1}{k-1}} (1-\tau)^{-1/2} p_0 d\tau^{\frac{k}{k-1}} + M V_L d(1-\tau)^{1/2} = 0$$

Allora la (21) si scinde nelle due

$$(23) \quad dZ = (p - p_e)dF \quad \text{e} \quad -F \cdot dp = M \cdot dV.$$

Dalla prima discende immediatamente che l'incremento dZ della spinta si annulla per $p = p_e$.

Viene così riconosciuta la proprietà fondamentale che, per un dato salto di pressione disponibile p_0/p_e , il valore massimo della spinta ottenibile per reazione su un eiettore viene raggiunto facendo espandere fino alla pressione ambiente il fluido eiettato. In particolare, nella sezione di uscita dal condotto regna la pressione minima della intera evoluzione.

Con $\lambda_b = p_b/p_0$ viene qui indicata tale pressione, che si manifesta nella sezione terminale del condotto per effetto della espansione adiabatica e senza attrito per l'intero sviluppo.

Per la condizione enunciata si ha, nella (19), $\lambda_b = \lambda_c = \lambda_e$ ed il valor massimo di θ nelle ipotesi sopradette è dato da

$$(24) \quad \theta = \varphi_b$$

Valgono inoltre le seguenti:

$$(25) \quad \theta = \varphi_b = (1 - \tau_b)^{1/2} = (1 - \lambda_b^{\frac{k-1}{k}})^{1/2}.$$

Naturalmente, perchè questo si verifichi, occorre che il condotto sia opportunamente dimensionato in modo da consentire la espansione richiesta; in particolare, che offra la sezione terminale $\mathfrak{F}$ definita dalla portata e dallo stato del fluido corrispondenti alla detta espansione $1/\lambda_e$.

La equazione (17) consente appunto il calcolo di $\mathfrak{F}$ per ogni dato λ_e .

11. *Seconda definizione della spinta.* — La proprietà (22) è stata riconosciuta per la evoluzione adiabatica ideale. Ma essa è vera sempre, solo che sia normale alla parete l'azione del fluido. Nel problema tecnico l'approssimazione corrispondente a tale ipotesi è in molti casi accettabile. Ammesso ciò, si applichi di fatto il teorema della quantità di moto all'elemento di volume racchiuso tra le due sezioni vicinissime P e Q (fig. 2).

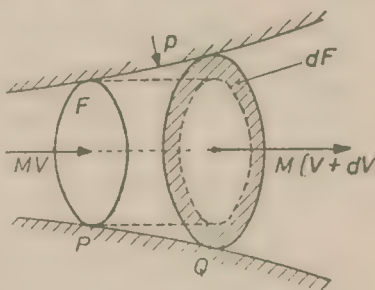


Fig. 2.

La variazione di quantità di moto vale $M(V + dV) - MV = M \cdot dV$; la somma delle spinte sulle facce Q e P vale $-d(pF)$; infine la parete dell'elemento di tubo che si proietta assialmente nell'incremento dF della sezione applica al fluido la forza $p \cdot dF$. Risulta

$$-d(pF) + p \cdot dF = M \cdot dV = -F \cdot dp.$$

Del resto, la stessa proprietà risulta anche indirettamente.

La $dZ = (p - p_e)dF$, esprime l'incremento di spinta dovuto alla variazione dF della sezione terminale del tubo (misurata

normalmente alla velocità) si può applicare a uno qualsiasi degli incrementi di tale sezione, e cioè la F di cui si tratta va intesa come sezione corrente della vena. È di fatto evidente che *ciascuna* variazione dF della sezione apporta alla propulsione il contributo dato dal prodotto dell'incremento di sezione per la differenza fra la pressione interna e quella esterna, se si ammette nulla l'azione tangenziale di parete.

In altri termini la

$$(26) \quad dZ = (p - p_e)dF$$

si interpreta addirittura come definizione della *propulsione dovuta alle forze di superficie* e si poteva quindi scrivere a priori.

E siccome la espressione (4 ripet.) della Z e la conseguente (21) sono state dedotte senza fare ipotesi limitative sulla natura dell'evoluzione del fluido, si ha la riprova che la somma degli ultimi termini della (21) deve essere nulla, sempre che sia nulla l'azione tangenziale.

12. *Relazioni generali della velocità o della temperatura, con la pressione e la sezione.* — Si osserva che dalla

$$(27) \quad M \cdot dV = -F \cdot dp$$

si deducono la velocità V e la quantità di moto corrispondenti ad una certa sezione F conoscendo la pressione in un numero sufficiente di sezioni a monte, sempre però accettando l'approssimazione di azione tangenziale nulla. Questo modo di calcolare V è dunque tarato.

La velocità V è invece calcolabile direttamente per qualsiasi sezione F nella quale sia nota la pressione p — per misura diretta, per esempio — tenendo conto anche dell'effetto dell'attrito e del calore trasmesso alla parete, mediante le formole note ⁽¹⁾ dell'efflusso dei gas nei tubi.

In proposito si osserva che, con le notazioni qui introdotte, le formole si semplificano grandemente. Così la formola (13) della Nota citata diventa:

$$(28) \quad F_s = F_L \left(\frac{k+1}{k-1} \right)^{1/2} \left(\frac{k+1}{2} \right)^{1/(k-1)}$$

(qui F_s è la sezione ideale di gola) cioè la stessa (14) della presente.

⁽¹⁾ A. CASTAGNA, *Formole per lo studio sperimentale delle trasformazioni di energie di un gas scorrente in un tubo*. « Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino ». Vol. 70 (1934-35-XIII).

Analogamente si trovano le nuove espressioni della velocità della temperatura:

$$(29) \quad \varphi = \left(1 + \left(\frac{\mathfrak{F}\lambda}{2} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{\mathfrak{F}\lambda}{2}$$

$$(30) \quad \tau = 2 \cdot \frac{\mathfrak{F}\lambda}{2} \left[\left(1 + \left(\frac{\mathfrak{F}\lambda}{2} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{\mathfrak{F}\lambda}{2} \right].$$

Queste formole valgono qualunque sia la evoluzione, anche irreversibile, che conferisce alla pressione il valore λ nella sezione $\mathfrak{F}$ del condotto.

Si osserva ancora che volendo mettere in evidenza il rapporto della sezione corrente del condotto F a quella della gola F_* , chiamato con Φ nella Nota citata, anzichè il rapporto alla sezione limite F_L — il che può facilitare il farsi l'idea dell'andamento del profilo del tubo, poichè la sezione di gola appare col valore unitario — basta notare che la sezione relativa $\mathfrak{F}$ è proporzionale al rapporto Φ , secondo la

$$(31) \quad \mathfrak{F} = \frac{F}{F_L} = \frac{F}{F_L} \frac{F_*}{F_*} = \frac{\Phi}{\Phi_L} = 3,86 \cdot \Phi$$

dove $\Phi_L = F_L/F_*$ è la costante definita dalla (28), ovvero dalla (14). Analogamente

$$(32) \quad \Phi = \frac{F}{F_*} = \frac{F/F_L}{F_*/F_L} = \frac{\mathfrak{F}}{\mathfrak{F}_*} = \frac{\mathfrak{F}}{3,86}.$$

13. *Corrispondenza tra forma di ugello e stato del fluido per il massimo della spinta.* — La spinta sviluppata dal fluido contro l'eiettore, per un dato rapporto di espansione disponibile, diventa massima allorchè la pressione nella sezione di uscita è uguale a quella esterna: in termini relativi,

$$\lambda_b = \lambda_e.$$

Siccome λ_b è definito per un dato ugello, si può anche dire, in altre parole, che per una data pressione iniziale d'espansione del fluido, la pressione ambiente $p_e = \lambda_e p_0$ corrispondente alla ottima utilizzazione del salto di pressione disponibile è determinata.

Ma intanto di qui consegue una proprietà fondamentale.

Per ogni valore della pressione lungo l'espansione è definito, insieme col valore $\lambda = p/p_0$ anche (formola 17) il valore della sezione relativa $\mathfrak{F} = F/F_L$; e cioè le proporzioni delle sezioni dell'ugello adatto, agli effetti della spinta massima, ad un certo rapporto di espansione, risultano completamente individuate dalle precedenti relazioni.

Per la misura assoluta delle sezioni occorrerà naturalmente che siano noti lo stato iniziale p_0 , T_0 del fluido nonchè la portata di massa M , poichè questi elementi definiscono la misura della sezione limite F_L . Risulta di fatto

$$(33) \quad F_L = \frac{M}{\rho_0 V_L} = \frac{k-1}{2k} \sqrt{2C} \frac{M \sqrt{T_0}}{p_0}.$$

Conviene tuttavia approfondire questa osservazione. Fino a che l'evoluzione seguita dal fluido entro l'eiettore è molto prossima alla adiabatica ideale, è sempre vera la relazione (17) tra λ ed $\mathfrak{F}$, e cioè la pressione relativa in una sezione qualsiasi del tubo è sempre la stessa anche cambiando, con la portata M , le condizioni iniziali del fluido e particolarmente p_0 .

Però, all'uscita si ha $p_b = p_e$ solo se la pressione iniziale p_0 ha il valore per cui fu proporzionato il condotto, definito dal rapporto $\lambda_b = p_b/p_0$ corrispondente secondo la stessa (17) al valore relativo $\mathfrak{F}_b = F_b/F_L$ che compete alla sezione terminale F_b dell'eiettore.

Vale dunque la proposizione reciproca di quella anzi enunciata e cioè, che, per un determinato ugello è adatto, agli effetti dello sviluppo della spinta massima, soltanto un certo rapporto fra le pressioni estreme. Naturalmente, il fatto che siano note pressione e sezione di uscita dal tubo, e quindi, coi valori relativi, pressione p_0 e sezione limite F_L , impone il valore anche al prodotto $M \sqrt{T_0}$.

In altri termini, nota la temperatura iniziale T_0 , solo una certa portata M potrà fluire attraverso il condotto, utilizzandolo tuttavia nel migliore dei modi agli effetti della reazione prodotta.

Dato l'ugello, occorre dunque la conoscenza diretta di due dei tre parametri $p_0 T_0 M$ per determinare il terzo, mentre la conoscenza della sola pressione iniziale stabilisce la pressione in una qualsiasi sezione (purchè l'evoluzione sia adiabatica fino a tale sezione).

14. Parametri determinanti i diversi regimi. — Nelle applicazioni che si prospettano, è frequente il caso che lo stato iniziale del fluido varii continuamente nel tempo, e così pure la portata.

E perciò fondamentale riconoscere il comportamento dell'eiettore convenientemente disegnato per un dato regime di deflusso allorchè esso viene percorso da fluido avente caratteristiche diverse da quelle previste.

Ora, il regime di deflusso entro l'intero condotto è determinato se sono noti i valori della pressione iniziale p_0 e di quella ambiente p_e . Precisamente, *i parametri adimensionali sopra definiti acquistano valori univocamente determinati per ciascuna sezione quando sia assegnato il rapporto tra la pressione p_0 iniziale e quella esterna p_e .*

Risulta così la notevole proprietà che si possono studiare tutti i diversi regimi di deflusso possibili per un dato eiettore mediante la variazione di un solo parametro, che è lo stesso per tutti gli eiettori.

Di fatto questi regimi possono essere ottenuti per l'ugello assegnato, e cioè di cui siano note le sezioni, conservando invariato lo stato iniziale del fluido, cioè pressione e temperatura iniziali p_0 , T_0 e variando soltanto la pressione esterna p_e dell'ambiente entro cui si trova l'eiettore.

In quanto alla portata M , essa risulta determinata e addirittura costante finchè la pressione p_e è minore di un valore ben definito per ciascun ugello; per divenire essa stessa funzione univoca della pressione p_e allorchè questa supera detto valore, secondo quanto si tratterà più oltre.

Tutto questo è esatto se si considera un gas perfetto.

Nella trattazione che segue viene ammessa tale ipotesi.

Lo studio dei regimi possibili viene dunque qui effettuato per un dato eiettore, di cui in particolare siano note le sezioni di gola F_s e di uscita F_b , ovvero $\mathfrak{F}_b$ ($\mathfrak{F}_s$ risulta dalla (14)) essendo altresì noto lo stato iniziale $p_0 T_0$ del fluido che lo percorre.

Facendo allora crescere la pressione esterna p_e dal valore nullo fino al valore p_0 si ottengono tutti i possibili regimi di deflusso e si può così conoscere il comportamento dell'eiettore in tutto il campo di azione. Coi valori relativi, la pressione $\lambda_e = p_e/p_0$ cresce corrispondentemente da 0 a 1.

È qui opportuno un cenno alla influenza delle resistenze passive sulla determinazione della configurazione del deflusso nel caso effettivo.

Da quanto viene svolto in appresso si riconosce che tale influenza può essere molto diversa da caso a caso; e che tuttavia, per i regimi che più interessano, è possibile proporzionare gli ugelli in modo che tali resistenze incidano solo in piccola parte le energie determinanti il fenomeno principale. Anzi si può affer-

mare che esistono forme particolari di eiettori per le quali le perdite per resistenze passive riescono in tutte le condizioni di funzionamento così piccole che si può senz'altro trascurare la loro influenza a tutti gli effetti.

I risultati della presente ricerca sono per tale riguardo in larga parte applicabili senza alcuna alterazione al caso effettivo.

15. *Regimi per i quali la velocità nella sezione di uscita è maggiore di quella del suono.*

a) *Pressione nella sezione di uscita maggiore o uguale di quella ambiente.* — Allorchè la pressione ambiente p_e varia conservando valori piccolissimi, la pressione del fluido in corrispondenza alla sezione di uscita $p_b = \lambda_b p_0$ è certo maggiore di p_e . Di fatto la pressione in detta sezione per il caso di espansione adiabatica λ_b è definita in funzione esclusivamente di $\mathfrak{F}_b$ (formola 17) ed è piccolissima soltanto se $\mathfrak{F}_b$ è grandissima. Dunque il fluido subisce una espansione a valle della sezione di uscita. Corrispondentemente, la variazione del grado di propulsione θ si deduce subito dalla sua espressione

$$(19 \text{ ripetuta}) \quad \theta = \frac{k-1}{2k} (\lambda_b - \lambda_e) \mathfrak{F}_b + \varphi_b.$$

(avendo dato a λ_b, φ_b i valori particolari λ_b, φ_b) osservando che la pressione λ_b e la velocità φ_b rimangono costanti almeno finchè $\lambda_e < \lambda_b$ e definiti dal valore che loro compete in corrispondenza della sezione $\mathfrak{F}_b$ di cui sono funzioni. Per $\lambda_e = 0$ si ha dunque il massimo di θ . Precisamente

$$(34) \quad \theta = \frac{k-1}{2k} \lambda_b \mathfrak{F}_b + \varphi_b$$

è il massimo valore del grado di propulsione raggiungibile con l'eietttore assegnato.

Ciò non è in contrasto con quanto stabilito nel n. 10 e seguenti. Di fatto, ivi è stata determinata la $\lambda_b = \lambda_e$ quale condizione di massimo di θ per un dato rapporto di espansione disponibile $1/\lambda_e$ intendendo che l'ugello va proporzionato in modo di consentire il verificarsi di tale condizione, mediante scelta conveniente della sezione terminale $\mathfrak{F}_b$.

Così il massimo definito dalla (34) risulta minore del valore ottenibile proporzionando l'ugello per l'espansione fino a quella qualsiasi pressione ambiente p_e compresa fra $\lambda_b p_0$ e 0; ma a sua

volta è maggiore di quello corrispondente al regime di ottima utilizzazione del salto di pressione per cui l'ugello fu costruito.

Questo regime ottimo è caratterizzato dal particolare valore della pressione ambiente p_b definito dal rapporto λ_b corrispondente alla sezione $\mathfrak{F}_b$ assegnata all'ugello; cioè:

$$(35) \quad p_b = \lambda_b p_0.$$

Variando p_e da 0 a p_b il grado di spinta θ varia linearmente dal massimo

$$(36) \quad \theta = \frac{k-1}{2k} \lambda_b \mathfrak{F}_b + \varphi_b, \quad \text{per } \lambda_e = 0,$$

e cioè per l'espansione nel vuoto, fino a quello di ottima utilizzazione del salto di pressione

$$(37) \quad \theta = \varphi_b \quad \text{per} \quad \lambda_e = \lambda_b.$$

b) Pressione ambiente maggiore di quella nella sezione di uscita. — Se si fa crescere ulteriormente la pressione p_e l'andamento del deflusso si complica.

Di fatto, con espansione estesa all'intero condotto, la pressione nella sezione d'uscita vale pur sempre λ_b , che è minore di λ_e . Dunque non può il fluido in queste condizioni uscire dal tubo.

Si verifica allora un'onda d'urto che eleva il valore della pressione. Nella ipotesi che l'urto sia retto, il salto di pressione che viene da esso determinato è funzione esclusivamente dello stato del fluido nella sezione immediatamente a monte del fronte d'urto.

Le note formole relative a questa ipotesi recano (avendo segnato con l'indice 1 i parametri dello stato del fluido nella sezione immediatamente a monte urto, con l'indice 2 quelli immediatamente a valle)

$$(38) \quad e_1 V_1 = e_2 V_2, \quad V_1 V_2 = V_s^2, \quad p_2 - p_1 = (e_2 - e_1) V_s^2.$$

Scritte in termini relativi esse diventano

$$(39) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\lambda_1 \varphi_1}{\tau_1} &= \frac{\lambda_2 \varphi_2}{\tau_2} \\ \varphi_1 \varphi_2 &= \varphi_s^2 = \frac{k-1}{k+1} = \frac{1}{6} \\ \frac{\Delta \lambda}{\lambda_1} &= \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1} = \frac{4k}{k^2 - 1} \frac{1}{\tau_1} - \frac{2k}{k-1} = \frac{5,83}{\tau_1} - 7 \end{aligned} \right.$$

essendo stati per le ultime due calcolati i coefficienti numerici nel caso $k = 1,4$.

Come si riconosce mediante l'ultima (39), il salto di pressione in rapporto alla pressione a monte urto $\Delta\lambda/\lambda_1$ va continuamente crescendo con l'estendersi della espansione effettuata fino alla sezione d'urto, $1/\lambda_1$. D'altra parte, ricordando $\tau = \lambda^{\frac{k-1}{k}}$, si trova che in valore assoluto il salto di pressione $\Delta\lambda$ presenta un massimo al variare dell'espansione $1/\lambda_1$.

Ciò si verifica allorchè la pressione a monte urto λ_1 ha il valore

$$(40) \quad \lambda_{1\Delta} = \left(\frac{1}{k} \frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k}{k-1}} = \left(\frac{\tau_s}{k} \right)^{\frac{k}{k-1}} = k^{-\frac{k}{k-1}} \lambda_s$$

a cui corrispondono la temperatura

$$(41) \quad \tau_{1\Delta} = \frac{1}{k} \frac{2}{k+1} = \frac{\tau_s}{k}$$

e la velocità

$$(42) \quad \varphi_{1\Delta} = \left(\frac{k+2}{k} \frac{k-1}{k+1} \right)^{1/2} = \left(\frac{k+2}{k} \right)^{1/2} \varphi_s$$

mentre dopo urto si ha

$$(43) \quad \lambda_{2\Delta} = (2k-1) k^{-\frac{k}{k-1}} \cdot \lambda_s$$

$$(44) \quad \tau_{2\Delta} = \frac{2k+1}{k+2} \tau_s$$

$$(45) \quad \varphi_{2\Delta} = \left(\frac{k}{k+2} \right)^{1/2} \varphi_s$$

Il massimo di $\Delta\lambda$ vale

$$(46) \quad \Delta\lambda_M = 2k\lambda_1 = 2k \left(\frac{1}{k} \frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k}{k-1}}$$

Esso appare allorchè l'urto avviene nella sezione

$$(47) \quad \Phi_\Delta = \mathfrak{F}_\Delta / \mathfrak{F}_s = k^{\frac{1}{k-1}} \cdot \left(\frac{k+2}{2} \right)^{-1/2}$$

Per $k = 1,4$ si hanno i seguenti valori numerici:

$$\begin{aligned} \lambda_{1A} &= 0,164 & \tau_{1A} &= 0,596 & \varphi_{1A} &= 0,638 & \Delta\lambda_M &= 0,459 \\ \lambda_{2A} &= 0,623 & \tau_{2A} &= 0,931 & \varphi_{2A} &= 0,261 & \mathfrak{F}_A &= 0,386 & \Phi_A &= 1,49. \end{aligned}$$

La sezione vale dunque 1,49 volte quella di gola del condotto.

Tuttavia il massimo dell'aumento di pressione non corrisponde al massimo valore della pressione dopo l'onda d'urto λ_{2M} .

Questo valore si manifesta quando l'espansione è meno spinta che nel caso ora veduto. Di fatto vi corrispondono i seguenti valori:

$$(48) \left\{ \begin{aligned} \lambda_{1(2)} &= \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{2k}{k-1}} = \lambda_s^2 = 0,28 \\ \tau_{1(2)} &= \left(\frac{2}{k+1} \right)^2 = \tau_s^2 = 0,695 \\ \varphi_{1(2)} &= \frac{[(k-1)(k+3)]^{1/2}}{k+1} = \left(\frac{k+3}{k-1} \right)^{1/2} \cdot \varphi_s = 0,716. \end{aligned} \right.$$

$$(49) \left\{ \begin{aligned} \lambda_{2(2)} &= (k+1) \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{2k}{k-1}} = (k+1) \lambda_s^2 = 0,672 \\ \tau_{2(2)} &= \frac{4}{k+3} = 2 \frac{k+1}{k+3} \tau_s = 0,909 \\ \varphi_{2(2)} &= \left(\frac{k+1}{k+3} \right)^{1/2} \cdot \varphi_s = 0,233. \end{aligned} \right.$$

$$(50) \quad \Phi_{(2)} = \mathfrak{F}_{(2)} / \mathfrak{F}_s = \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{1}{k-1}} \left(\frac{k+1}{k+3} \right)^{1/2} = 1,16$$

con

$$\mathfrak{F}_{(2)} = 0,301.$$

Risulta da quanto sopra che, poichè l'onda d'urto si determina non appena la pressione esterna supera quella nella sezione terminale del tubo, la pressione nella sezione a valle d'urto (che è vicinissima e praticamente può essere supposta coincidente con la sezione a monte) risulta più elevata di quella ambiente. Il fluido può dunque uscire dal condotto; ed anzi esso subisce la immediata espansione fino alla pressione ambiente.

Aumentando la pressione λ , il salto di pressione dato dall'onda d'urto rimane dapprima costante. Tale precisamente rimane fino a che esso salto risulti sufficiente a riportare la pressione dal valore λ_b , il minore di quelli corrispondenti secondo la (17) alla sezione di uscita $\mathfrak{F}_b$, fino al valore λ . La espansione continua così ad interessare il condotto per l'intera sua lunghezza.

Ciò vale evidentemente fino a quando la pressione λ sia salita al valore dato dalla somma della pressione nella sezione di uscita λ_b con il salto di pressione $\Delta\lambda$, ottenibile partendo dallo stato $\lambda_1 = \lambda_b$, $\tau_1 = \tau_b$.

Il calcolo della spinta relativa in queste condizioni viene eseguito sempre con la solita formola, ed è degno di nota il fatto che è indifferente considerare la sezione a monte o quella a valle urto, nel computo dei termini λ e φ .

Di fatto, la spinta θ si può considerare somma della quantità di moto uscente dal tubo — rappresentata dalla velocità φ — con l'azione dovuta alla pressione nella sezione di uscita, espressa da due termini: $\frac{k-1}{2k} \lambda \mathfrak{F}_b$, dovuto alla pressione λ del fluido uscente, e $-\frac{k-1}{2k} \lambda_b \mathfrak{F}_b$ dovuto alla pressione ambiente nella stessa sezione.

Mentre quest'ultimo termine non dipende dall'urto, la somma dei primi due è identica a monte ed a valle urto (cioè in corrispondenza alla stessa sezione, che qui è quella di uscita): e ciò perchè, appunto, vale per le due sezioni vicinissime il teorema della quantità di moto, che si scrive (attribuendo l'indice 2 alle quantità dopo urto):

$$(51) \quad p_b F_b + M V_b = p_2 F + M V_2$$

e, dividendo per $M V_L$, si ottiene

$$\frac{p_b}{p_0} \frac{F_b}{F_L} \frac{p_0 F_L}{M V_L} + \varphi_b = \frac{p_2}{p_0} \frac{F}{F_L} \frac{p_0 F_L}{M V_L} + \varphi_2$$

cioè

$$(52) \quad \frac{k-1}{2k} \lambda_b \mathfrak{F}_b + \varphi_b = \frac{k-1}{2k} \lambda_2 \mathfrak{F}_b + \varphi_2$$

che dimostra l'asserto.

Risulta che il grado di propulsione θ decresce ancora linearmente mentre λ aumenta dal valore λ_b fino al valore $\lambda_{2b} = \lambda_b + \Delta\lambda$;

e poichè il coefficiente di λ_e è ancora $\tilde{\gamma}_b \cdot (k-1)/2k$, come nel caso precedente a), la stessa legge lineare vale dunque per λ_e compreso nell'intero intervallo tra zero e λ_{2b} .

Come appare da quanto sopra, fintanto che la pressione ambiente λ_e è compresa fra i valori λ_b e λ_{2b} , la velocità del fluido nella sezione terminale φ_b è maggiore di quella corrispondente al rapporto di espansione disponibile $1/\lambda_e$.

Questo apparente assurdo deriva dal fatto che il salto di pressione sfruttato dal fluido sino alla sezione terminale — cioè $1/\lambda_b$ — è in effetti maggiore di quello disponibile. Ma se è vero che il fluido acquista una grande energia cinetica, ciò avviene a scapito di energia di pressione che gli deve poi venire somministrata attraverso un'onda d'urto onde poter uscire dal condotto.

Ora, la quantità di energia cinetica spesa nell'onda d'urto è sensibilmente maggiore di quella di pressione richiesta per l'uscita, poichè la trasformazione di energia nell'onda avviene con perdita notevole.

In conseguenza di questo, appunto, per ciascun rapporto di espansione compreso tra $1/\lambda_b$ e $1/\lambda_{2b}$ l'ugello ottimo — e cioè utilizzante con una espansione adiabatica tutto e soltanto il salto di pressione disponibile — dà luogo ad una spinta θ maggiore di quella ottenibile nelle condizioni d'urto anzi esaminate.

16. *Regimi per i quali la velocità nella sezione di uscita è minore di quella del suono ma è ipersonora in un tronco intermedio del condotto.*

a) *Carattere del deflusso.* — La pressione ambiente λ_e può assumere valori ancora maggiori di λ_{2b} .

La pressione λ_{2b} non basta più a far allora uscire il fluido del condotto. Ma risalendo il condotto dalla sezione terminale a quella di gola si incontrano sezioni in cui la pressione è via via più alta.

L'onda d'urto può aver luogo in una di tali sezioni, in cui lo stato del fluido è λ, τ ; e la pressione dopo urto λ_2 assume il valore competente alle condizioni iniziali d'urto $\lambda_1 = \lambda, \tau_1 = \tau$.

Se si considera un condotto per forte effusione cioè con grande sezione di uscita $\tilde{\gamma}_b$, gli aumenti di pressione per effetto d'onda d'urto $\Delta\lambda$ che si sviluppano in corrispondenza a sezioni retrocedenti verso la gola del condotto sono dapprima crescenti fino a che si incontra la sezione $\tilde{\gamma}_1 = 0,386$ del massimo $\Delta\lambda$, della quale si è accennato nel numero precedente. Anche la pressione dopo urto λ_2 corrispondentemente cresce, e continua ancora ad aumentare quando $\Delta\lambda$ già diminuisce, per $\tilde{\gamma}$ compreso tra $\tilde{\gamma}_1$ e la sezione $\tilde{\gamma}_{(2)} = 0,301$ della massima pressione dopo urto.

Se la sezione d'urto si sposta ulteriormente da $\mathfrak{F}_{(2)}$ fino alla sezione di gola $\mathfrak{F}_s$, l'aumento di pressione $\Delta\lambda$ va annullandosi cosicchè la pressione dopo urto diventa uguale a quella prima dell'urto, proprio per $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_s$ e quindi $\lambda_2 = \lambda_1 = \lambda_s$.

Qualunque altro eiettore, adatto ad espansione moderata, si può sempre considerare come un troncone di quello ora esaminato; ed in tale condotto si ripetono gli stessi caratteri del deflusso ora accennati, in particolare quelli dell'onda d'urto, e proprio in corrispondenza alle stesse sezioni relative $\mathfrak{F}$ dei due condotti.

A valle della sezione d'urto, come è noto, la velocità è inferiore a quella del suono, e in quel tratto di tubo la velocità stessa diminuisce (poichè la sezione va crescendo) mentre la pressione gradatamente aumenta fino alla sezione terminale.

Come viene dimostrato nel seguente comma b), la pressione che, secondo questo processo, può determinarsi nella sezione di uscita, risulta sempre più alta quanto più si allontana la sezione d'urto da quella terminale approssimandosi a quella di gola dell'eiettore. E poichè deve ormai necessariamente aversi l'eguaglianza fra tale pressione e quella ambiente λ_e (n. 6, b) si riconosce che, ove λ_e aumenti oltre il valore λ_{2b} , l'efflusso lungo il condotto ha luogo per un tratto — dalla sezione di gola fino a quella d'urto — a velocità iperacustica, ed un altro tratto a valle, fino all'uscita, a velocità ridotta; e la sezione d'urto andrà spostandosi a monte col crescere della pressione di scarico λ_e .

b) *Relazione tra urto e stato del fluido in una qualunque sezione del condotto.* — Importa ora stabilire quali sono gli stati assunti del gas durante la evoluzione seguita a valle dell'onda d'urto.

Tali stati vengono definiti mediante le equazioni generali sempre valevoli

$$(53) \quad \text{di stato} \quad \delta\tau/\lambda = 1$$

$$(54) \quad \text{di continuità} \quad \mathfrak{F}\delta\varphi = 1$$

$$(55) \quad \text{dell'energia} \quad \varphi^2 + \tau = 1$$

(valida per l'ipotesi di scambio termico nullo)

e da quella che definisce l'evoluzione nel tratto compreso tra la sezione d'urto $\mathfrak{F}_2$ e la sezione terminale $\mathfrak{F}_b$; sia adiabatica ideale la evoluzione, con che si ha la equazione

$$(56) \quad \text{della} \\ \text{evoluzione} \quad \left(\frac{T/T_0}{T_2/T_0} \right)^{\frac{k}{k-1}} = \frac{p/p_0}{p_2/p_0} \quad \text{cioè} \quad \left(\frac{\tau}{\tau_2} \right)^{\frac{k}{k-1}} = \frac{\lambda}{\lambda_2} \dots$$

Risulta così immediatamente la pressione raggiungibile per compressione ad inerzia dopo totale estinzione della energia cinetica della corrente fluida; lo stato del gas viene distinto dall'indice 3.

Poichè la velocità φ_3 è nulla, la (55) fornisce $\tau_3 = 1$ e quindi, per la (56)

$$(57) \quad \lambda_3 = \lambda_2 / \tau_2^{\frac{k}{k-1}}.$$

La (56) diventa allora

$$(58) \quad \tau^{\frac{k}{k-1}} = \lambda / \lambda_3.$$

Se nella (54), mediante (53), (55) e (56) vengono eliminate δ , λ e φ si ottiene

$$(59) \quad \mathfrak{F} = \tau^{-\frac{1}{k-1}} (1 - \tau)^{-\frac{1}{2}} \tau_2^{\frac{k}{k-1}} / \lambda_2$$

e per la (57) si può scrivere

$$(60) \quad \mathfrak{F} \lambda_3 = \tau^{-\frac{1}{k-1}} (1 - \tau)^{-\frac{1}{2}}.$$

Analogamente si trova

$$(61) \quad \mathfrak{F} \lambda_3 = \varphi^{-1} (1 - \varphi^2)^{-\frac{1}{k-1}} = \left(\frac{\lambda}{\lambda_3} \right)^{-1/k} \left[1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_3} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right]^{-1/2}.$$

Si riconosce così che la espressione (58) della temperatura τ in funzione della pressione λ , nonché quelle (54), (60), (61) della sezione $\mathfrak{F}$ in funzione di τ , o λ , o φ , non sono altre che le corrispondenti formole già vedute (11) e (17) nelle quali si è posto p_3 invece di p_0 , e quindi λ/λ_3 al posto di λ , così come $\mathfrak{F} \lambda_3$ al posto di $\mathfrak{F}$, e $\delta \lambda_3$ al posto di δ . E questa corrispondenza risulta chiara osservando che la pressione detta iniziale (n. 7), che è p_0 per gli stati assunti avanti urto dal fluido, è quella per cui la velocità è nulla; e, per gli stati del fluido dopo l'onda d'urto tale pressione iniziale è precisamente p_3 .

Per qualsiasi sezione $\mathfrak{F}$ la (60) consente di dedurre la temperatura τ del fluido; dalla quale, mediante (55) e (58), vengono tratte immediatamente velocità e pressione.

È notevole che, siccome la (60) è sempre del solito tipo

$$(62) \quad y = x^{-\frac{1}{k-1}} \cdot (1-x)^{-1/2},$$

ove si sia in possesso di una tabella o di un diagramma di tale funzione, essi varranno per dedurne x (e cioè, qui, τ) anche in questo caso, in cui y vale $\lambda_3 \mathfrak{F}$ anzichè $\mathfrak{F}$.

In particolare, fatto $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_b$, risultano calcolabili la temperatura corrispondente con questo regime alla sezione di uscita τ ,

$$(63) \quad \mathfrak{F}_b \lambda_3 = \tau_i^{-\frac{1}{k-1}} (1 - \tau_i)^{-\frac{1}{2}}$$

e quindi, con (55) e (58), la velocità q , e la pressione λ , concomitanti.

Reciprocamente, nota la pressione λ_e dell'ambiente, e sapendo che nella sezione terminale dell'eiettore $\mathfrak{F}_b$ deve essere $\lambda_i = \lambda_e$, si possono sostituire questi valori nella (61) deducendo il valore di λ_3 . La (58) fornisce allora la temperatura τ_i , e la velocità φ , viene dedotta al solito dalla (55).

Per ricavare le condizioni dell'urto in questo caso si ha nella (57) una prima relazione tra λ_2 e τ_2 . La seconda relazione è necessariamente quella speciale dell'urto, deducibile dalle precedenti (39), che si scrive

$$(64) \quad \lambda_2 = \left(1 - \frac{\varphi_s^2}{1 - \tau_2}\right)^{\frac{1}{k-1}} \left(\frac{\varphi_s^2}{1 - \tau_2} + \frac{4k}{k^2 - 1} - \frac{1}{\varphi_s^2}\right).$$

Per ogni valore di λ_3 , ricavato come si è detto, il sistema di equazioni (57), (64) permette di ricavare — per via grafica, per esempio — i valori λ_2 e τ_2 ; e quindi, con l'ausilio delle precedenti equazioni (39), tutte le altre quantità interessanti l'urto.

Degno di nota è infine che le relazioni (56), (60) e (61) tra $\mathfrak{F}$, λ , τ e φ godono della proprietà di non essere legate ad alcun particolare valore della sezione terminale dell'eiettore. Ora, per un dato regime d'urto, tutti gli stati che il fluido può assumere a valle della sezione d'urto sono rappresentati dalle citate relazioni. E dunque tgli stati sono sempre gli stessi per tutti gli ugelli, precisamente in corrispondenza alle stesse sezioni $\mathfrak{F}$, e questo indipendentemente dalla grandezza della sezione terminale $\mathfrak{F}_b$.

Da queste proprietà risulta una conseguenza di notevole portata pratica.

Per ottenere tutti gli stati possibili del fluido negli ugelli di qualsiasi grandezza e proporzione (cioè per qualsiasi espansione

siano previsti) e per ciascuno di essi per qualunque valore della pressione ambiente, basta calcolare una volta per tutte i parametri suindicati, in corrispondenza a un certo numero di regimi d'urto, e, per ciascuno di questi, in riferimento ad una conveniente gamma di valori di uno dei parametri stessi, per esempio la pressione ambiente.

Uno qualsiasi degli stati possibili potrà così essere determinato per interpolazione tra i valori calcolati.

c) *Valutazione della spinta relativa e sua determinazione diretta.* — La valutazione della spinta θ nei regimi di deflusso parzialmente ultrasonori è molto semplice. Di fatto la pressione del fluido all'uscita dal condotto λ_i è uguale a quella esterna λ_e e quindi la spinta relativa θ è rappresentata dalla sola velocità del gas φ_i in corrispondenza alla sezione terminale $\mathfrak{F}_b$.

$$(65) \quad \theta = \varphi_i.$$

Nel comma precedente si è veduto come calcolare questo valore φ_i in relazione alle caratteristiche dell'urto intervenuto.

Se però quello che interessa conoscere è soltanto la spinta θ , senza curarsi dell'andamento del deflusso entro l'eiettore, si ha modo di calcolare la velocità φ_i a mezzo del procedimento qui appresso indicato.

Si premette che la velocità φ_i non può essere qui determinata mediante la (17) perchè si è sviluppata un'onda d'urto che rende la formola inapplicabile per le sezioni a valle. Continuano invece a valere le equazioni di stato, di continuità e di conservazione dell'energia

$$p = gR\varrho T. \quad FV\varrho = M \quad 2CT + V^2 = 2CT_0;$$

in termini relativi.

$$\lambda/\delta\tau = 1. \quad \mathfrak{F}\varphi\delta = 1 \quad \tau + \varphi^2 = 1$$

le quali sussistono con le sole ipotesi della uniformità dello stato del gas per i punti di ogni singola sezione, e di scambio termico nullo con le pareti.

Da esse, note la sezione relativa $\mathfrak{F}$, uguale ad $\mathfrak{F}_b$, e la pressione λ_i , uguale a quella esterna λ_e , si trae la velocità φ_i , nella stessa forma (29) del n. 12, e dunque la spinta

$$(66) \quad \theta = \varphi_i = \left[1 + \left(\frac{\mathfrak{F}_b \lambda_e}{2} \right)^2 \right]^{1/2} - \frac{\mathfrak{F}_b \lambda_e}{2};$$

La formola (66) fornisce sempre il valore di φ_i corrispondente ad una arbitraria pressione λ_i scelta per la qualsiasi sezione assegnata $\mathfrak{F}_b$.

Per contro non dà alcuna indicazione sull'accordo o meno della pressione λ_i con determinati regimi di deflusso che si intende debbano in concomitanza stabilirsi entro l'eiettore; in particolare, non mostra se il valore di λ_i introdottovi corrisponda ad uno dei regimi con deflusso parzialmente ultrasonoro considerati nel presente numero.

Si deve perciò avere l'avvertenza di stabilire per ogni sezione $\mathfrak{F}_b$ i limiti entro i quali può essere scelta in questo caso la pressione λ_e . Tale determinazione viene effettuata come segue.

d) *Campo di variazione del rapporto di espansione per il deflusso parzialmente ultrasonoro.* — Il limite inferiore del campo entro cui va scelta la pressione λ_e , e cioè del rapporto di espansione $p_0/p_e = 1/\lambda_e$, affinchè entro il condotto venga raggiunta la velocità del suono, è evidentemente quello corrispondente al limite superiore relativo al caso considerato nel precedente comma b), e cioè $\lambda_{2b} = \lambda_b + \Delta\lambda$, pressione dopo urto piano nella sezione terminale $\mathfrak{F}_b$.

Il limite superiore si riferisce a quella forma particolare di deflusso per la quale la velocità in corrispondenza alla gola è quella sonora, ma subito nelle sezioni aumentate, a valle, il moto è di nuovo iposonoro.

In queste condizioni il deflusso avviene — nella ipotesi di resistenze passive nulle — interamente in obbedienza alla adiabatica ideale, dato che non si forma onda d'urto a dissipare energia meccanica. Quindi la pressione λ_b nella sezione terminale $\mathfrak{F}_b$ è immediatamente definita mediante le note relazioni corrispondenti a tale evoluzione.

Poichè il moto avviene a velocità iposonora, tale limite superiore di $\lambda_e = \lambda_b$ è il maggiore dei due valori di λ forniti dalla solita equazione (17) qui ripetuta

$$(67) \quad \mathfrak{F}_b = \lambda_b^{-\frac{1}{k}} (1 - \lambda_b^{\frac{k-1}{k}})^{-\frac{1}{2}}.$$

Tenendo conto della (28), la pressione massima $\lambda_b = \lambda_e$ per queste ipotesi può essere più esplicitamente espressa con la

$$(68) \quad F_b (1 - \lambda_b^{\frac{k-1}{k}})^{\frac{1}{2}} \lambda_b^{\frac{1}{k}} = F_s \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{1}{k-1}} \left(\frac{k-1}{k} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{F_s}{3.86}.$$

Risulta così completamente definita una nuova gamma di regimi di deflusso possibili con l'eiettore in esame, per i quali la velocità è superiore a quella del suono lungo un certo tratto intermedio del condotto, che inizia nella sezione di gola e termina in una sezione del divergente a valle.

Salvo che per il valore della pressione ambiente λ_e uguale al valore λ_b deducibile dalla (68), i valori della spinta θ ottenibili con questi regimi sono inferiori a quelli corrispondenti all'ugello ottimo rispetto al rapporto p_0/p_e .

17. *Il deflusso a velocità ovunque iposonora.* — Si osserva infine che il limite superiore della pressione ambiente λ_e , uguale a quella di uscita λ_b , definito dalla (68) nel precedente numero, è minore necessariamente di 1; varrebbe l'unità solo se $\mathfrak{F}_b$ fosse infinita.

Dunque $p_e = \lambda_e p_0 < p_0$. Ma è intuitivo ed evidente che il moto del fluido non si arresta se la pressione nella sezione terminale è minore di quella iniziale p_0 .

Allora, anche aumentando ulteriormente λ_e al disopra del valore dato da (67) o (68) ha luogo il deflusso, purchè naturalmente sia λ_e minore di 1.

Con l'avvicinarsi di λ_e all'unità, la velocità in una qualunque sezione del tubo risulta sempre più piccola scostandosi dal valore, già inferiore a quello del suono, che essa assume quando nella gola la velocità è quella del suono. In tutte le sezioni la velocità tende a zero col diminuire del rapporto d'espansione disponibile p_0/p_e : essa è ovunque calcolabile semplicemente con le equazioni del moto di un gas a velocità iposonora entro un condotto.

In queste condizioni, il computo della velocità d'uscita — e quindi anche della spinta θ , essendo $\lambda_e = \lambda_b$ — è immediato.

Si ha di fatto, qualunque sia la sezione di uscita:

$$(69) \quad \theta = \varphi_b = (1 - \tau_b)^{\frac{1}{2}} = (1 - \lambda_b^{\frac{k-1}{k}})^{\frac{1}{2}}$$

essendo la seconda uguaglianza vera perchè l'intera evoluzione è adiabatica ideale.

La velocità φ nelle singole sezioni $\mathfrak{F}$, così come la temperatura τ e la pressione λ sono allora determinate.

Per stabilire le analoghe delle relazioni (17) tra sezione relativa $\mathfrak{F}$, e τ , λ , φ , occorre tenere conto che, siccome ora la velocità nella gola è minore di quella del suono, la portata cessa di essere costante per un dato stato iniziale del fluido $p_0 T_0$.

E poichè, data la pressione ambiente $\lambda_e = \lambda_b$, ciò che risulta determinato è la velocità φ_b di uscita dal condotto (formola 69), la portata diventa proporzionale alla sezione terminale dell'eiet-tore F_b .

Tale portata M_b viene definita dalla seguente espressione, in cui si è tenuto conto che $\lambda_e = \lambda_b$:

$$(70) \quad M_b = F_b V_b \rho_b = F_b V_L \rho_0 (1 - \lambda_e^{\frac{k-1}{k}})^{\frac{1}{k}} \lambda_e^{\frac{1}{k}}.$$

Ciò significa che l'essere — eventualmente — il condotto profilato a tubo di Laval è del tutto inutile in questo caso; poichè un semplice convergente con sezione di sbocco pari ad F_b darebbe luogo alla stessa portata, con pari velocità di uscita dal condotto.

Secondo quanto si è detto nel n. 8 sulla estensione del concetto di sezione limite al caso della portata variabile, e ricordando le (12') e (15'), le relazioni (17) tra $\mathfrak{F}$, λ , τ e φ si scrivono in questo caso:

$$(71) \quad \frac{M_b}{F_b} \frac{1}{\mathfrak{F}} = \frac{1}{\mathfrak{F}'} \lambda^k (1 - \lambda^{\frac{k-1}{k}})^{\frac{1}{2}} = (1 - \tau)^{\frac{1}{2}} \tau^{\frac{1}{k-1}} = \varphi (1 - \varphi^2)^{\frac{1}{k-1}}.$$

Anche le (71) danno luogo a 2 soluzioni per λ , τ e φ ; e nel caso ora considerato vanno scelti i maggiori valori della pressione λ e della temperatura τ , ed il minore della velocità φ .

18. *Valori della propulsione per tutti i possibili regimi.* — I valori della spinta relativa θ nei diversi casi sopra indicati sono stati qui calcolati per la ipotesi $k = 1,4$, corrispondente ad un gas avente le caratteristiche dell'aria a temperatura ordinaria.

È stata ammessa la evoluzione adiabatica ideale entro i con-dotti, e l'onda d'urto piana.

I valori ottenuti sono riportati nei grafici tracciati nella fi-gura 3 in funzione della pressione ambiente $\lambda_e = p_e/p_0$, segnata in ascissa. Queste coordinate risultano comprese tra i valori 0 ed 1.

a) *Curva dei massimi della spinta. Sezioni terminali.* — Allorchè l'ugello è proporzionato al rapporto di espansione $1/\lambda_e$, cioè in modo che la pressione nella sezione di uscita dovuta alla espansione adiabatica p_b sia proprio uguale a p_e , la spinta rela-tiva θ è data dalla velocità relativa nella sezione di uscita $\varphi_b = V_b/V_L$ (n. 10), ed è la massima per ciascun rapporto λ_e .

L'equazione della curva è la

$$(25 \text{ ripetuta}) \quad \theta = \varphi_b = (1 - \lambda_e^{\frac{k-1}{k}})^{1/2}$$

che ha servito al calcolo dei valori di θ in questo caso, per l'intervallo $1 \geq \lambda_e \geq 0$.

Tali valori sono riportati nel diagramma tracciato con linea continua pesante.

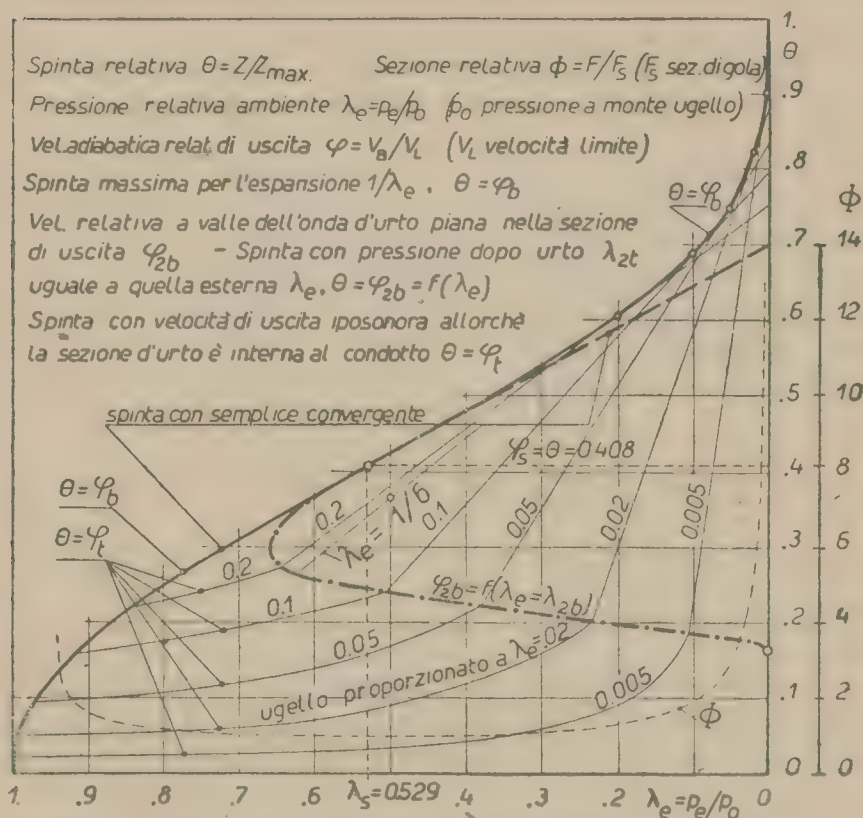


Fig. 3. — Diagramma delle spinte relative in funzione del rapporto di espansione disponibile $1/\lambda_e$, per ugelli proporzionati ai rapporti λ_e dichiarati.

La curva è tangente alle ordinate estreme $\lambda_e = 1$, $\lambda_e = 0$, presenta un flesso per

$$\lambda_e = \lambda_s = \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k}{k-1}}, \quad \text{ove} \quad \theta = \left(\frac{k-1}{k+1} \right)^{1/2} = \varphi_s,$$

ed è accompagnata da vicino per molta parte del suo sviluppo dalla tangente di flesso (segmento segnato a tratti marcati).

La spinta θ passa dal valore 0, per $\lambda_e = 1$, a 0,17 per $\lambda_e = 0,9$, la cui ordinata è secata dalla tangente di flesso a 0,20 circa;

a 0,7 per $\lambda_e = 0,1$, con 0,64 sulla tangente di flesso; a 1 per $\lambda_e = 0$, espansione nel vuoto.

La tangente seca l'ordinata $\lambda_e = 0$ nel punto $\theta = 0,70$ circa.

Con la validità delle ipotesi a suo tempo dichiarate, e particolarmente quando al fluido non venga comunicata energia sotto alcuna forma, a partire dallo stato iniziale p_0, T_0 — tutti i valori della spinta θ che possono essere raggiunti sono rappresentati da punti del piano θ, λ_e costituenti la linea delle $\theta = \varphi_b$ ora costruita, oppure da punti che stanno al disotto della linea stessa.

Come risulta da quanto viene svolto nei paragrafi che seguono, i punti che corrispondono ai regimi di deflusso ottenibili entro ugelli costituiti dal solo convergente sono soltanto quelli sul ramo $\theta = \varphi_b$ dal valore $\varphi_b = 0$ fino al punto di flesso della $\theta = \varphi_b$, cioè $\varphi_b = 0,408$, e quelli della tangente di flesso.

Viceversa tutti gli altri punti dell'area del diagramma sulla curva $\theta = \varphi_b$ e sotto di essa rappresentano spinte θ raggiungibili soltanto mediante ugelli convergenti-divergenti.

Insieme con la $\varphi_b = \theta$ viene consegnata nel grafico la linea (sottile, a tratti) rappresentante l'andamento della sezione terminale del condotto occorrente per il raggiungimento della velocità φ_b dovuta all'espansione $1/\lambda_e$ in ascissa. Sono dati i valori del rapporto Φ della sezione F_b a quella del suono F_s . Dal valore 1 corrispondente alla gola ($\lambda_e = \lambda_s = 0,529$) il rapporto Φ passa a 2 all'incirca per $\lambda_e = 0,1$, a 13 per $\lambda_e = 0,005$.

b) *Moto ultrasonoro in tutto il divergente.* — Nel caso del moto ultrasonoro per l'intero divergente del condotto (n. 15), il segmento di retta, rappresentante l'andamento della spinta θ per l'ugello caratterizzato dalla sezione terminale $\tilde{F}_b$ alla quale corrisponde secondo la (17) la pressione λ_b , è tangente alla curva $\theta = \varphi_b$ nel punto di ascissa λ_b . Non può difatto essere secante perchè altrimenti, nei punti del segmento che si trovassero al disopra della curva, l'eiettor darebbe spinta maggiore di quella dell'ugello proporzionato, secondo quanto illustrato nel n. 10, il rapporto di espansione $1/\lambda_e$ che a detti punti corrisponde.

Questa condizione, insieme con quella relativa alla superficie di esistenza dei punti θ accessibili, conduce alla conclusione che i possibili punti di tangenza sono solo quelli costituenti il ramo della curva $\theta = \varphi_b$ che presenta la concavità verso il basso: cioè a dire, i punti rappresentanti velocità maggiore del suono, per i quali $\varphi_b > 0,408$ (n. 8).

I segmenti rappresentanti la spinta θ per i diversi eiettori hanno tutti un estremo sull'ordinata $\lambda_e = 0$ (espansione infinita);

mentre il luogo dell'altro estremo dei segmenti stessi è la curva costituita dai punti aventi per ordinata la velocità subito a valle dell'onda d'urto piana verificantesi nella sezione d'uscita φ_{2b} e per ascissa la pressione λ_{2b} corrispondente.

La equazione di detta curva si deduce dalla (64) eliminando τ_2 mediante la $\tau_2 + \varphi_2^2 = 1$. Si ottiene:

$$(72) \quad \lambda_{2b} = \left(1 - \frac{\varphi_s^4}{\varphi_{2b}^2}\right)^{\frac{1}{k-1}} \left(\frac{\varphi_s^2}{\varphi_{2b}^2} + \frac{4k}{k^2 - 1} - \frac{1}{\varphi_s^2}\right).$$

La curva $\varphi_{2b} = f(\lambda_e = \lambda_{2b})$ è segnata sul diagramma con linea grossa a tratto e punto. Nasce nel punto di flesso $\varphi_b = \varphi_s$ ed ivi è tangente alla curva $\theta = \varphi_b$; mentre φ_2 decresce fino al valore $\varphi_{2(2)} = 0,233$ la pressione $\lambda_{2b} = \lambda_e$ cresce fino al suo massimo $\lambda_{2(2)} = 0,672$ (n. 15, b); infine si dirige verso l'ordinata $\lambda_e = 0$ sulla quale muore, risultandovi tangente nel punto $\varphi_2 = \varphi_s^2 = 1/6$, corrispondente alla espansione nel vuoto per la quale è $\varphi_1 = 1$ (velocità limite).

Per l'ugello avente sezione terminale data $\mathfrak{F}_b$ si trova l'estremo del segmento sull'ordinata $\lambda_e = 0$ mediante la

$$(36 \text{ ripetuta}) \quad \theta = \frac{k-1}{2k} \lambda_b \mathfrak{F}_b + \varphi_b;$$

il punto di tangenza di coordinate

$$\lambda_e = \lambda_b \quad \theta = \varphi_b$$

dove λ_b e φ_b sono date, al solito, dalla (17); e infine l'estremo sul luogo λ_{2b} , φ_{2b} , determinandone l'ascissa $\lambda_{2b} = \lambda_1 + \Delta\lambda$, essendo $\lambda_1 = \lambda_b$ e $\Delta\lambda$ calcolabili mediante la terza delle (39).

La zona del diagramma racchiusa tra l'ordinata $\lambda_e = 0$, la curva λ_{2b} , φ_2 e il ramo della curva $\theta = \lambda_b$ a convessità verso il basso rappresenta tutte le condizioni raggiungibili con deflusso ultrasonoro per tutto il divergente dell'eiettore.

Nella figura 3 sono segnati con linea sottile continua i segmenti rappresentanti l'andamento della spinta θ al variare della pressione ambiente λ_e per gli ugelli proporzionati ai seguenti valori della pressione di uscita $\lambda_b = \lambda_e$:

$$\lambda_b = 0,2 \quad 0,1 \quad 0,05 \quad 0,02 \quad 0,005.$$

c) *Deflusso con onda d'urto entro il divergente.* — Allorchè la pressione ambiente λ_e sale oltre il valore λ_{2b} corrispondente all'eietttore di sezione terminale $\mathfrak{F}_b$, il moto avviene a velocità ridotta nell'ultimo tratto dell'effusore. Vale allora la (66)

$$(66 \text{ ripetuta}) \quad \theta = \varphi_t = \left[1 + \left(\frac{\mathfrak{F}_b \lambda_t}{2} \right)^2 \right]^{1/2} - \frac{\mathfrak{F}_b \lambda_t}{2}$$

fino a che la pressione λ_e assume il maggiore dei due valori definiti per il dato eietttore dalla (67), ovvero dalla (68):

$$(68 \text{ ripetuta}) \quad F_b \left(1 - \lambda_b^{\frac{k-1}{k}} \right)^{1/2} \lambda_t^{1/2} = F \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{1}{k-1}} \left(\frac{k-1}{k+1} \right)^{1/2} = 0,259 F$$

corrispondente al moto con velocità ovunque inferiore a quella del suono, salvo che nella sezione di gola in cui la velocità è proprio quella sonora.

Le curve φ_t , λ_e sono state tracciate per i cinque ugelli poc'anzi indicati; esse sono delimitate a destra dal punto inferiore dei segmenti tangenti relativi all'ugello considerato, ed a sinistra finiscono sulla linea $\varphi_b = \theta$.

I punti racchiusi nella zona del diagramma compresa tra l'asse delle ascisse, la curva $\theta = \varphi_b$ fino al punto di flesso e la curva λ_{2b} , φ_2 corrispondono a tutti i regimi di deflusso con onda d'urto lungo il divergente.

d) *Moto ovunque iposonoro.* — Infine, se la pressione λ_e diventa maggiore del valore tratto dalla (68), il moto è ovunque lento, e la spinta θ rimane definita dalla (69)

$$(69 \text{ ripetuta}) \quad \theta = \varphi_b = \left(1 - \lambda_b^{\frac{k-1}{k}} \right)^{1/2}.$$

Questa espressione non contiene la sezione terminale dell'ugello $\mathfrak{F}_b$ e la curva che rappresenta questo stato di regime è dunque unica per tutti gli eiettori ed è la stessa $\theta = \varphi_b$ dei valori massimi di θ già tracciata. Naturalmente per ciascun ugello ciò vale per il tratto di curva compreso tra il punto intersezione della curva $\theta = \varphi_b$ e della $\varphi_t = f(\lambda_t)$ data da (66), punto che dipende dalla sezione terminale dell'ugello, ed il punto $\lambda_e = 1$, $\varphi_b = 0$.

Risulta da ciò che tutti gli eiettori sono equivalenti per i regimi di deflusso rappresentati dal tratto ad essi comune dell'arco di curva $\theta = \varphi_b$.

e) *Regimi che si svolgono entro un eiettore assegnato.* — Si può ora immediatamente stabilire il regime di deflusso che si determina entro un eiettore definito dalla sua sezione di uscita $\mathfrak{F}_b$.

Ad esempio, sia $\Phi_b = 2,9$ (corrispondente ad $\mathfrak{F}_b = 10,9$; formula (31), n. 12). È adatto alla espansione $1/\lambda_e = 1/0,05$. Se la pressione ambiente assume valori gradatamente decrescenti dal valore p_0 fino al valore nullo, si verificano successivamente le condizioni seguenti.

Per $\lambda_e = p_e/p_0$ compreso tra 1 e 0,97 il moto è tutto iposonoro, θ cresce seguendo la curva φ_b , fino al valore $\theta = 0,095$. A questo punto appare la velocità del suono nella gola.

Decrescendo λ_e da 0,97 fino a 0,38, la spinta θ segue la curva φ_1 , crescendo fino al valore $\varphi_{2b} = 0,22$; corrispondentemente l'onda d'urto che si forma entro il divergente si sposta dalla sezione di gola fino alla sezione di uscita.

Infine, mentre λ_e decresce ulteriormente fino a 0,1 la spinta θ segue la tangente alla $\theta = \varphi_b$ nel punto $\lambda_e = 0,05$.

Il moto del fluido nell'effusore è interamente ultrasonoro. L'onda d'urto rimane stazionaria nella sezione di uscita, mentre l'eccesso della pressione λ_{2b} da essa determinato, rispetto alla pressione ambiente, va man mano aumentando fino ad assumere il totale valore λ_1 corrispondente alla pressione avanti urto $\lambda_1 = \lambda_b = 0,05$. A questo punto la pressione nella sezione terminale λ_b è uguale a quella esterna λ_e e non è più necessaria l'onda d'urto per consentire l'uscita del fluido dal condotto. L'onda d'urto allora svanisce.

Per questo valore $\lambda_e = \lambda_b = 0,05$ si ha il funzionamento ottimo dell'eiettore in relazione all'espansione disponibile $1/\lambda_e = 20$.

I valori di λ_e riducentisi fino a zero danno luogo a valori della spinta ancora crescenti lungo la solita tangente alla $\theta = \varphi_b$ nel punto $\lambda_e = 0,05$, fino al valore massimo $\theta = 0,84$.

19. *Confronto del comportamento dei differenti ugelli.* — Si nota che il punto in cui al crescere dell'espansione $1/\lambda_e$ la curva φ_1 si stacca dalla $\theta = \varphi_b$, punto che segna l'apparire della velocità del suono e dell'onda d'urto entro il condotto, viene incontrato tanto prima quanto maggiore è l'espansione alla quale l'eiettore è proporzionato, cioè quanto più grande è la sezione terminale.

Questo fatto si spiega osservando che, poichè la velocità nella qualunque sezione di uscita $\Phi_b = \mathfrak{F}_b/\mathfrak{F}$, (rapporto alla sezione di gola) dipende esclusivamente dalla espansione in atto finchè si è in

regime iposonoro, per una comune espansione $1/\lambda_e$ sia la portata fluida sia di conseguenza la velocità nella sezione di gola del condotto — che vale $\Phi_s = F_s/F_e = 1$ identica e costante per tutti — sono tanto più grandi quanto maggiore è la sezione di uscita $\mathcal{F}_b$. E corrispondentemente, tanto più presto al crescere dell'espansione viene raggiunta la velocità del suono nella gola dell'eiettore.

Dunque le curve $\theta = \varphi_i$ rappresentanti gli intervenienti regimi di deflusso con onda d'urto entro l'effusore traggono origine da un punto di ordinata $\theta = \varphi_b$ piccola se l'eiettore è per grande espansione. Tutta la curva $\theta = \varphi_i$, che ha andamento quasi parallelo all'asse delle ascisse, mantiene pure piccole ordinate, e va ad incontrare la curva $\theta = \varphi_{2b}$ in un punto vicino all'ordinata di destra $\lambda_e = 0$; cosicchè anche il segmento tangente alla $\theta = \varphi_b$ rappresentante i regimi con onda d'urto all'uscita risulta eretto e prossimo alla stessa ordinata $\lambda_e = 0$.

La portata di questa osservazione risulta dalla considerazione seguente.

Al variare dell'espansione effettiva $1/\lambda_e$, i punti rappresentanti la spinta ottenibile mediante l'ugello avente grande sezione d'uscita, anzi accennato, seguono la linea φ_i indi il segmento tangente, e quindi solo in grande prossimità del rapporto di espansione adatto $1/\lambda_b$ la spinta θ assume grandi valori.

D'altra parte la spinta massima $\theta = \varphi_b$ corrispondente ai rapporti λ_e intermedi è crescente rapidamente per le deboli espansioni, indi continua a crescere gradatamente conservando valori maggiori di quelli dovuti all'ugello di cui si tratta.

Questi valori accoppiati in quanto corrispondenti ad una stessa espansione $1/\lambda_e$ si avvicinano soltanto nell'intorno dell'espansione di adattamento $1/\lambda_b$, per la quale vengono a coincidere.

E soltanto nell'intorno dell'espansione di adattamento, per la quale di fatto il segmento che indica le spinte θ per l'ugello in questione è tangente alla curva delle spinte massime $\theta = \varphi_b$, le coppie dei valori delle spinte corrispondenti ad una stessa espansione risultano da punti che si avvicinano fino ad essere coincidenti nel punto di tangenza λ_b, φ_b .

Tutti i punti del campo utile delle spinte θ , delimitato nel diagramma superiormente dalla curva $\theta = \varphi_b$, che sono situati al disopra della curva φ_i e del segmento tangente corrispondente, rappresentano altrettanti valori elevati della spinta che non possono essere raggiunti mediante l'impiego dell'eiettore di cui si tratta.

Questa zona perduta agli effetti dell'utilizzazione assume ben presto al crescere dell'espansione di adattamento una estensione relativamente molto grande.

Per l'ugello adatto alla espansione 10 ($\lambda_b = 0,1$), la spinta θ corrispondente all'espansione 2 vale circa 0,3, mentre la massima spinta ottenibile con $\lambda_e = 0,5$ vale 0,42. Per valori di λ_e discostantisi da 0,5 i valori accoppiati (dalla condizione di pari λ_e) della spinta, vanno avvicinandosi.

Con espansione più spinta la divergenza si accentua. Si prenda per esempio in esame la espansione 200 ($\lambda_e = 0,005$). L'ugello adatto alla piena utilizzazione di questo salto di pressione ha sezione terminale $F_b = 13 \cdot F_e$ che, per la sezione circolare, viene ottenuta con un diametro pari a 3,6 volte il diametro della gola.

Con tale ugello, in corrispondenza a $\lambda_e = 0,5$ si ha la spinta $\theta = 0,035$ circa, contro il già veduto valore del massimo $\theta = \varphi_b = 0,42$. La proporzione di circa 1/10 tra la reazione realizzabile con un simile eiettore e quella massima per la stessa espansione si conserva per un vasto campo di variazione della pressione λ_e : all'incirca per $0,9 > \lambda_e > 0,25$.

Si nota altresì che l'attitudine dell'ugello al suo ufficio di propulsore precipita rapidamente col diminuire dell'espansione disponibile se l'eiettore è adatto a forte salto di pressione.

Con l'ugello per $1/\lambda_e = 200$ è sufficiente che λ_e aumenti da 0,005 a 0,1 per far cadere la propulsione dal valore 0,89 a 0,19.

Risulta che la *sensibilità del regime di deflusso* — e, per esso, della spinta θ che ne è la conseguenza tangibile agli effetti della utilizzazione del dispositivo — è grande per l'eiettore adatto a forte espansione.

Si riconosce da quanto sopra l'importanza della scelta opportuna dell'ugello impiegato quale propulsore in ciascun caso determinato. L'efficienza propulsiva può in certi casi precipitare facilmente a valori assai piccoli rispetto a quelli preventivati non appena le condizioni di funzionamento si scostino da quella ottima.

20. *Rendimento di espansione.* — Si può definire il rendimento dell'ugello in quanto è eiettore, cioè funziona come trasformatore di energia potenziale in energia cinetica.

Tale *rendimento di espansione* η_e viene espresso dal rapporto dell'energia cinetica della massa fluida uscente alla energia sviluppabile nella espansione adiabatica fra le pressioni entro l'ugello e nell'ambiente, che rappresenta la energia messa a disposizione per la evoluzione.

È dunque:

$$(73) \quad \eta_e = \frac{MV^2/2}{MCT_0[1 - (p_e/p_0)^{\frac{k-1}{k}}]} = \frac{V^2}{2L}$$

essendo L il lavoro di espansione disponibile per chilogrammo massa di gas.

Se V_{ad} è la velocità raggiunta dal fluido per effetto di una espansione adiabatica pari a quella disponibile, si ha:

$$(74) \quad L = V_{ad}^2/2$$

e dunque

$$(75) \quad \eta_e = (V/V_{ad})^2.$$

Bisogna però osservare che la definizione ora enunciata vale soltanto nel caso ben definito che la pressione ambiente sia uguale a quella nella sezione terminale del condotto.

Il numero η_e risulta minore dell'unità in quanto una aliquota della energia potenziale disponibile è stata dissipata dalle resistenze passive operanti in seno all'eiettore.

Per consentire la valutazione di una grandezza corrispondente al rendimento η_e anche nelle altre condizioni si può ricorrere alla misura della spinta Z sviluppata per reazione.

Se la espansione effettiva p_0/p_b è uguale a quella disponibile p_0/p_e , è anche $Z = MV$. Quindi il rendimento η_e è esprimibile con la

$$(76) \quad \eta_e = \frac{(Z/M)^2}{V_{ad}^2}.$$

Se invece è p_0/p_b maggiore di p_0/p_e , la spinta Z viene data dalla

$$(19 \text{ ripetuta}) \quad \frac{Z}{MV_L} = \frac{k-1}{2k} (\lambda_b - \lambda_e) \mathfrak{F}_b + \varphi_b.$$

In questa formola sono noti i valori — costanti per un dato ugello — di $\mathfrak{F}_b$, λ_b , φ_b , M , oltre al valore di λ_e che definisce il regime in atto.

Per stabilire il rendimento dell'ugello come generatore di energia cinetica può apparire qui doversi prendere come termine di riferimento la velocità nella sezione terminale φ_b , valutata, secondo la (19 ripetuta), in funzione della spinta Z .

Si è già veduto però (n. 15, b), che la velocità φ_b presenta un elevato valore anomalo, in conseguenza di un particolare scambio di energie che si manifesta internamente al condotto. Quindi la formola (75) darebbe del rendimento un valore maggiore dell'unità. Ma la funzione dell'ugello non è compiuta se non quando il fluido è uscito dal tubo (ed allora la velocità è ridotta avendo il fluido dovuto superare il salto di pressione all'uscita) e dunque solo allora si può valutare l'efficienza della intiera evoluzione effettuata. Perciò la velocità φ_b non serve a determinare η_e .

Ora, osservando che la portata M è definita, si può considerare che la propulsione effettiva Z venga sviluppata per sola azione di movimento, cioè che sia ancora $Z = MV$; dove però questa volta V non è più la velocità effettiva di uscita, ma è quella che, attribuita alla portata effettiva M , dà luogo ad una quantità di moto equivalente alla spinta misurata Z .

Tale *velocità equivalente*, definita dal rapporto Z/M , cioè dalla reazione dovuta all'unità di portata in massa, non è altro che la spinta θ , che la esprime in termini relativi. In valore è

$$(77) \quad \theta = V/V_L$$

come risulta d'altronde dalle rispettive definizioni.

In questo modo si può parlare di rendimento di espansione dell'eiettore anche nel caso in cui la pressione nella sezione di uscita è diversa da quella ambiente, e la spinta Z comprende, secondo la (19 ripetuta), anche l'effetto della differenza fra dette pressioni.

E poichè il ragionamento qui svolto può essere sempre applicato, la stessa espressione (76) del rendimento risulta valida in tutte le condizioni di funzionamento degli eiettori.

La definizione così generalizzata del rendimento, rappresentata dalla (76), trova sostegno nel fatto che l'ugello, proporzionato al particolare rapporto di espansione $1/\lambda_e$ e sviluppante spinta θ uguale a quella di un eiettore diversamente proporzionato operante in corrispondenza alla stessa espansione $1/\lambda_e$ — e quindi i due ugelli danno uguale rendimento η_e , secondo la (76) — detto ugello propriamente dà luogo alla perdita di energia meccanica per resistenze passive definita dalla perdita di rendimento $1 - \eta_e$. Infatti per tale ugello conserva pieno valore anche la definizione particolare espressa dalla formola (73).

Dividendo numeratore e denominatore della (75) per la velocità limite V_L , ed osservando che il rapporto V_{ad}/V_L non è altro

che il valore di φ_b corrispondente alla espansione disponibile $1/\lambda_s$ si ottiene:

$$(78) \quad \eta_s = (\theta/\varphi_b)^2.$$

I valori numerici del rendimento di espansione degli eiettori per i regimi di funzionamento teorici sopra considerati si possono così immediatamente calcolare mediante tale formola, dopo aver letto il valore della spinta θ in ciascun caso e quello della spinta massima $\theta = \varphi_b$ corrispondente alla espansione $1/\lambda_s$ relativa al caso in questione.

Le linee di ugual rendimento (non disegnate) sono definite nella figura 3 dalla costanza del rapporto della spinta θ alla ordinata della curva $\theta = \varphi_b$ corrispondente alla stessa ascissa. Sono dunque linee corrispondenti alla $\theta = \varphi_b$ secondo una affinità ortogonale, risultando il rendimento di espansione dal quadrato del rapporto di affinità θ/φ_b relativo alla linea alla quale il rendimento si riferisce.

Anche all'esame a vista si ritrova ancora una volta, nella rapida caduta del rendimento di espansione, la cattiva utilizzazione dell'energia disponibile non appena il regime di funzionamento si allontani da quello per il quale l'ugello è proporzionato.

21. *L'eiettore bocaglio.* — Si è detto che i punti dell'area racchiusa tra la curva $\theta = \varphi_s$, il relativo segmento tangente e la curva $\theta = \varphi_b$ rappresentano altrettanti valori elevati della spinta che risultano irraggiungibili con l'eiettore a cui la $\theta = \varphi_s$ corrisponde.

Si ha dunque vantaggio con l'adozione di quell'eiettore cui compete la zona minima di punti inaccessibili.

Emerge così un fatto di grande portata.

All'eiettore conformato a semplice convergente, a guisa di bocaglio per misura di portata fluida, per i piccoli valori dell'espansione corrisponde, quale linea nel diagramma θ, λ_s rappresentante le spinte θ che esso produce, l'intero ramo della curva delle spinte massime relativo al deflusso totalmente iposonoro; e, per le espansioni più sviluppate di $1/\lambda_s$, corrispondenti nell'ugello ad esse adatto, a velocità di lancio φ_b maggiori di quella del suono, la linea delle spinte risulta la tangente alla $\theta = \varphi_b$ nel punto φ_s, λ_s , cioè proprio la tangente di flesso. Si è già riconosciuto che tale tangente accompagna da vicino per lungo tratto la curva $\theta = \varphi_b$ nel ramo corrispondente alle alte velocità.

Il luogo dei punti che risultano inaccessibili compreso tra la tangente di flesso e la curva dei valori massimi $\theta = \varphi_b$ risulta ridotto ad una limitata area sita dal lato delle velocità elevate. Le sue ordinate, che rappresentano la differenza tra la spinta massima realizzabile con ugello particolarmente adatto φ_b e quella ottenibile a pari espansione $1/\lambda_e$ con l'eiettore in parola, rimangono piccole fino a che non si impieghino elevate espansioni. Tale differenza rimane minore di 10% della spinta massima fino ad espansioni dell'ordine di 20, per raggiungere il massimo di 30% per espansione infinita, d'altronde praticamente irrealizzabile.

Difatto, per $\lambda_e = 0$ la spinta relativa θ fornita dall'eiettore boccaglio è data da

$$(79) \quad \theta_s = \frac{k-1}{k} \lambda_s \mathfrak{F}_s + \varphi_s.$$

Tenendo conto che

$$\lambda_s = \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k}{k-1}}, \quad \mathfrak{F}_s = \left(\frac{2}{k+1} \right)^{-\frac{1}{k-1}} \left(\frac{k-1}{k+1} \right)^{-1/2}, \quad \varphi_s = \left(\frac{k-1}{k+1} \right)^{1/2}$$

si trova

$$(80) \quad \theta_s = \sqrt{1 - 1/k^2} = 0,7.$$

Oltre alla forte insensibilità alla variazione del regime delle pressioni, per cui la linea delle spinte θ che gli competono praticamente coincide per lungo tratto con la linea delle massime spinte, questo tipo particolare di eiettore presenta ancora altri pregi fondamentali.

Anzitutto uno di carattere costruttivo.

L'eiettore boccaglio è esclusivamente convergente, e la sua sezione di uscita è proporzionale alla portata massima che si intende erogare, secondo un fattore affatto indipendente dalla espansione utilizzabile, non appena sia $1/\lambda_e > 1/\lambda_s$.

Per contro l'eiettore specialmente adatto alle grandi espansioni ha sezione di uscita sempre più grande quanto minore è la pressione di scarico λ_e . Oltre gli inconvenienti della doppia conicità e della grande dimensione della sezione di uscita, conta per questo ugello l'ingombro assiale, che diventa presto notevole anche in valore assoluto, oltre che in rapporto allo sviluppo assiale del convergente che può essere proporzionalmente ridotto.

Ma il pregio più notevole — dopo quello dell'insensibilità al regime d'espansione — è senza dubbio costituito dalla «sигuità delle perdite per resistenze passive nel deflusso che l'eiettore boccaglio realizza.

A dimostrare questa proprietà valgano le ossaervazioni seguenti.

— Il moto entro l'eiettore si svolge in tutti i casi a velocità bassa, inferiore a quella del suono; la velocità sonora viene raggiunta, allorchè la pressione esterna è inferiore a λ_s , in corrispondenza alla sola sezione terminale. *Per valori anche elevatissimi dell'espansione, la sola parte di essa che si compie entro l'eiettore è quella corrispondente al salto fisso di pressione da p_0 a $\lambda_s \cdot p_0$, invariabilmente compiuto a velocità ridotta, e quindi con perdita per resistenze passive limitata e costante.*

— La rimanente espansione, dalla pressione λ_s a quella ambiente λ , anche piccolissima, si svolge sempre tutta quanta fuori dal condotto, ma non ha la più piccola importanza, agli effetti della reazione prodotta, la legge secondo cui può avvenire questa espansione, poichè sulla reazione essa legge non ha alcuna influenza.

Di fatto la spinta sull'eiettore corrispondente al salto di pressione disponibile tra λ_s e λ , si manifesta esclusivamente e completamente con un'azione statica, e precisamente con la forza data dal prodotto dell'area della sezione di uscita (la sezione minima) per la differenza fra la pressione del gas uscente p_s e quella ambiente p_0 .

Questo significa che, se è vero che tutta quanta l'espansione dalla pressione nella sezione minima a quella ambiente dà luogo ad una reazione che, col crescere dell'espansione, va diventando minore di quella massima ottenibile con un ugello specialmente appropriato al salto di pressione; per contro *questa reazione viene fornita senza alcuna perdita per resistenze passive, mentre il divergente degli eiettori adatti dà luogo a perdite sempre più forti con l'aumentare del loro sviluppo.*

In altri termini, la tangente di flesso è non soltanto la linea delle spinte idealmente raggiungibili con l'eiettore boccaglio, ma, a meno delle piccole perdite (costanti in valore assoluto con l'aumentare dell'espansione) che si hanno nel tubo, essa tangente è anche la linea delle spinte effettivamente realizzabili.

Si osserva che i più grandi valori delle spinte $\theta = \varphi_0$, per i quali sono necessari condotti convergenti-divergenti, non sono raggiungibili perchè le perdite dovute alle resistenze passive sono

grandi in conseguenza della lunghezza del divergente occorrente alle fortissime espansioni e dell'alta velocità del gas che lo percorre.

Quindi, soltanto per gli ugelli proporzionati ad espansioni $1/\lambda$, contenute entro un ristretto intervallo (per esempio da 10 a 20) vi è la possibilità di ottenere una reazione θ maggiore, di qualche poco, di quella sviluppata dall'eiettore boccaglio a pari espansione. Di più, questo può avvenire soltanto se il rapporto di espansione è molto prossimo a quello per cui fu proporzionato l'ugello convergente-divergente.

Ma in alcune applicazioni lo stato del fluido utilizzato per il lancio varia continuamente nel tempo entro ampi limiti, cosicchè riesce impossibile il funzionamento dell'eiettore con rapporto di espansione costantemente prossimo al valore di progetto.

Le perdite per resistenze passive che si manifestano allora nella vena fluente diventano subito gravi, effettivamente anche più di quelle riconosciute nel caso ideale di onda d'urto piana fin qui considerata; nel caso concreto, l'onda d'urto si sviluppa invece su di una superficie conoidica.

Ciò significa che i valori della spinta θ ottenibile in presenza di onda d'urto sono ancora più piccoli di quelli dovuti al tipo di efflusso trattato finora, ciò che nel diagramma equivale a segnare linee rappresentative dell'andamento di θ in funzione di λ , che stanno al disotto di quelle che vi sono disegnate per l'ugello che si considera.

Dagli argomenti svolti qui sopra emerge dunque nitidamente una conclusione di grande interesse. E cioè che:

Il più conveniente degli ugelli da usare quale propulsore è l'eiettore-boccaglio semplicemente convergente; esso presenta notevolissimi vantaggi rispetto a quello convergente-divergente.

22. Influenza delle resistenze passive. — Un sommario esame dei caratteri del fenomeno effettivo permette di farsi un'idea di quali possano essere le influenze delle cause di perdita sull'andamento del deflusso e quindi sulle grandezze della velocità del fluido e della spinta e sulla grandezza e le proporzioni dell'ugello.

La trattazione svolta sinora ha avuto sempre per oggetto l'andamento ideale del deflusso. La stessa onda d'urto piana presa in considerazione, alla quale corrisponde invero la trasformazione irreversibile di una certa quantità di energia meccanica (cinetica) in energia termica, deve essere ritenuta ideale nel senso che in effetti essa non si verifica nell'efflusso entro gli eiettori.

Come si è accennato, in suo luogo si manifesta un'onda d'urto sopra una superficie conoidica, la base del conoide essendo appoggiata su una certa sezione del condotto mentre il vertice si trova a valle di tale sezione.

Le perdite di energia meccanica corrispondenti a questa particolare configurazione del deflusso sono sensibilmente più gravi che con l'onda d'urto piana.

Un'altra perdita di natura meccanica è quella dovuta all'attrito alla parete del condotto.

Vi sono poi le perdite termiche, dovute a sottrazione di calore al fluido da parte delle pareti.

L'effetto delle perdite di natura meccanica — attrito od urto — è sempre quello di ridurre la pressione corrispondente ad una data velocità del fluido, rispetto al valore della pressione nel caso ideale.

E questo è chiaro, perchè il lavoro di espansione del fluido deve provvedere a dotare il fluido stesso della energia cinetica, che ha valore stabilito se è data la velocità, e in più al lavoro dissipato dalle resistenze passive. Perciò a pari velocità del fluido l'espansione va estesa a pressione tanto più piccola quanto maggiori sono le perdite meccaniche. E poichè, d'altra parte — se gli scambi termici sono nulli — data la velocità è stabilita la temperatura, il fatto che la pressione sia ridotta significa che la sezione corrispondente ad una data velocità, occorrente al deflusso effettivo, è maggiore, in ragione inversa della pressione, della analoga sezione per il deflusso ideale.

Reciprocamente, per una data espansione la velocità di efflusso viene diminuita dall'effetto delle resistenze passive.

Si riconosce che la sezione del condotto nella quale vige una data pressione risulta così aumentata, perchè la velocità è ridotta, e anche perchè, quindi, la temperatura corrispondentemente è aumentata. La relazione tra velocità e temperatura

$$(81) \quad \frac{T}{T_0} = 1 + \left(\frac{V}{V_L} \right)^2$$

è difatto sempre valevole anche nel caso effettivo, quando non venga dato o tolto calore al fluido (escluso da questo vincolo il calore introdotto quale equivalente del lavoro delle resistenze passive).

Se si tratta di un gas, e lo scambio termico è dovuto a soli fatti di convezione-conduzione, esso è di solito piccolo.

Se invece lo scambio termico è sensibile, o, comunque, se ne voglia tenere conto, la equazione dell'energia comprenderà anche il termine corrispondente. Se ΔQ è il calore sottratto ad 1 kg. massa di fluido, espresso in unità meccaniche, si ha evidentemente

$$(82) \quad V^2 + 2CT + \Delta Q = 2CT_0$$

cioè

$$(83) \quad \varphi^2 + \tau + q = 1$$

avendo chiamato con q il rapporto del calore sottratto al doppio del calore totale $2CT_0$.

Questa proposizione mostra che, per una data velocità φ , la temperatura diminuisce se aumentano le perdite termiche, e ciò ha la conseguenza diretta di ridurre la sezione occorrente al deflusso.

Questa influenza delle perdite termiche sulla sezione è dunque opposta a quella delle perdite meccaniche.

Naturalmente il termine q può essere negativo (ciò vuol dire che il fluido riceve calore) ed allora la sezione occorrente cresce.

La sottrazione di calore durante l'efflusso ha però anche un'altra conseguenza, che è quella di ridurre il lavoro di espansione sviluppato dal dato peso di gas nella caduta di pressione successiva. Ne derivano aumenti ridotti di velocità, ed in definitiva ulteriore diminuzione della velocità nelle sezioni a valle. E questo è causa di aumento delle sezioni del condotto.

Per quanto riguarda l'influenza delle perdite meccaniche e di quelle termiche sulla spinta sviluppata sull'eiettore, risulta da quanto sopra che le due perdite cospirano per diminuire la velocità di efflusso, e, quindi, la reazione ottenibile.

23. *Elementi sperimentali.* — Allo scopo di effettuare ricerche e controlli sperimentali sugli eiettori agenti come propulsori in seno all'atmosfera, a guisa di razzo, una apposita apparecchiatura è stata costruita presso il Laboratorio di Aeronautica del R. Politecnico di Torino.

L'impianto, illustrato nella figura 4, comprende l'eiettore fusiforme MU , la cui cavità è percorsa dal fluido entrante radialmente dal disotto, condottovi dalla tubazione L munita di saracinesca C , per uscire assialmente a poppavia attraverso il condotto profilato a tubo di Laval U visibile in sezione.

Montato nella camera aperta della galleria aerodinamica per vento veloce $G-G$, il fuso è sostenuto da fili f_2 e tenuto in sito dal grave Q_2 appeso mediante il filo f_3 , e dal filo f_4 sostenente Q_1 . La componente orizzontale di f_4 si scarica mediante il filo oriz-

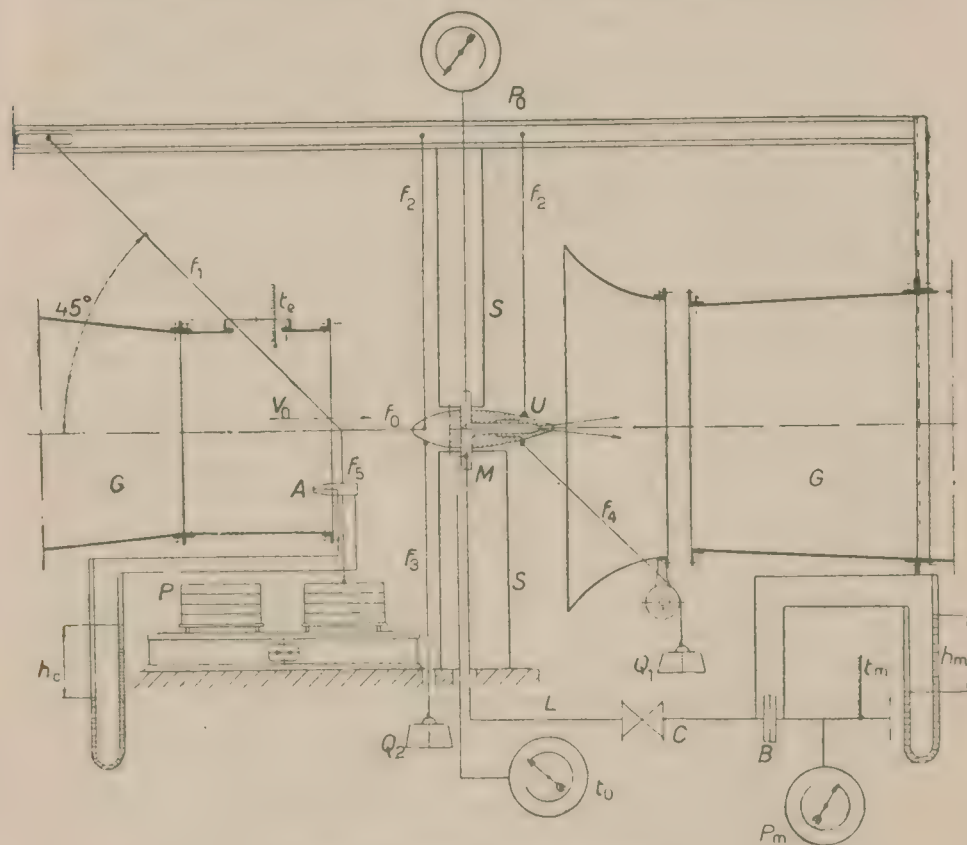


Fig. 4. — Schema dell'apparecchiatura.

zontale f_0 sul filo inclinato a 45° sull'orizzontale f_1 , e da questi due rinviata in vera grandezza attraverso f_5 al piatto della bilancia P .

Le azioni orizzontali — propulsione dovuta alla reazione del getto, ovvero resistenza aerodinamica — vengono così pesate direttamente in vera grandezza mediante la bilancia.

Le misure sul gas di lancio vengono fatte una prima volta col rilievo della pressione p_m e della temperatura t_m del fluido a monte della bocca per misura di portata B , che dà luogo alla caduta di pressione h_m . Le grandezze p_m , t_m , h_m consentono nel

modo noto la determinazione della portata. Un secondo rilievo viene compiuto nella camera entro il fuso mediante il manometro P_0 ed il termometro t_0 , che forniscono pressione e temperatura iniziali p_0 , t_0 .

La velocità del vento contro il fuso viene calcolata in base alla indicazione h_c del tubo di Pitot A sulla bocca d'arrivo del vento, tenendo conto della pressione barometrica p_s e della temperatura dell'aria in galleria t_s .

La misura delle quantità che interessano le prove è espressa dalle seguenti cifre approssimate.

La pressione di mandata può raggiungere 6 kg/cm^2 assoluti, con temperatura $t_0 = 30^\circ \text{C}$; la portata può toccare 60 gr/s .

Proporzionato quindi l'ugello all'espansione 6, risulta la gola con diametro $7,15 \text{ mm}$. e la sezione d'uscita di $8,9 \text{ mm}$. di diametro, distante 22 mm . dalla gola, essendo il profilo del divergente costituito da un arco di circolo avente raggio 200 mm .

Il vento nella galleria raggiunge la velocità $V_0 = 100 \text{ m/s}$.

La spinta massima misurata è dell'ordine di 3 kg ., la massima resistenza aerodinamica dell'ordine di 2 kg ., essendo schermati mediante tubi profilati S i condotti di collegamento facenti capo al fuso.

Per varie cause, di cui principale quella della sensibilità della pesata alle dilatazioni termiche dei fili e degli elementi di sostegno, le pesate possono essere effettuate sotto il gravame di un possibile errore dell'ordine di $\pm 50 \text{ grammi}$.

Un primo gruppo di prove è stato compiuto con l'apparecchiatura descritta.

Le ricerche verranno proseguite con un dispositivo di sospensione rigida del fuso.

24. *Esperimenti.*

a) *Influenza mutua tra reazione e resistenza.* — Si è voluto dapprima accertarsi della possibilità delle ricerche e dei rilevamenti sulla reazione mediante l'apparecchiatura preparata, nei riguardi della influenza che sulla spinta misurata può avere l'azione sulla parete esterna del fuso.

In sostanza, si è voluto riconoscere l'entità della mutua influenza dei campi di velocità esterno ed interno al condotto, secondo quanto si è accennato nel n. 3 in merito alla definizione stessa di reazione.

Si sono fatte perciò letture di pesata con portata fluida variabile, per pressioni p_0 crescenti da 1 fino a 6 kg/cm^2 assoluti. Po-

tendo presumere piccola in queste condizioni la variazione delle azioni sull'esterno del tubo, questa misura dà la reazione pura e semplice.

Si è poi misurata la resistenza aerodinamica del fuso, inattivo quale eiettore.

Infine si è fatta la lettura della azione sul fuso dovuta agli effetti della reazione provocata dal lancio del fluido e della resistenza aerodinamica.

Come si è avuto modo di notare a suo tempo, con ciò si misurano confusi insieme sia la reazione del getto e la resistenza aerodinamica, sia le variazioni di tali due azioni dovute alla reciproca influenza.

Nelle numerose prove che sono state effettuate con varie modalità non si è potuto riconoscere un deciso orientamento del risultato; nel senso di definire quali siano la grandezza o anche soltanto il segno della somma algebrica delle accennate variazioni delle due azioni fondamentali.

È risultato cioè che l'errore nelle letture di pesata viene a coprire le variazioni oggetto della ricerca.

Ora, siccome l'errore di lettura, rispetto alle forze misurate, è relativamente moderato, al più dell'ordine di $\pm 5\%$, si può in conseguenza dare al quesito proposto la risposta seguente:

A meno di piccola frazione, e per condizioni di funzionamento prossime a quelle qui sperimentate, *la forza su un eiettore mobile in seno ad un fluido risultante dalle concomitanti azioni della resistenza al moto di avanzamento e della propulsione dovuta al lancio di materia, si può calcolare semplicemente come somma algebrica della resistenza fluidodinamica corrispondente alla velocità di traslazione del corpo e della reazione prodotta sull'eiettore immobile dal lancio del fluido.*

b) *Rendimento di espansione.* — Un secondo argomento che è stato oggetto di ricerca è il rendimento di espansione dell'ugello, definito nel n. 20.

Le misure forniscono la spinta Z , la portata M e la temperatura T_0 , nonchè le pressioni p_0 e p_e . Quindi questo rendimento viene espresso, in funzione delle misure, da

$$(76 \text{ ripetuta}) \quad \eta_e = \frac{(Z/M)^2}{V_{ad}^2}.$$

La portata misurata mediante la bocca tarata è risultata la stessa di quella calcolabile quale uscente dall'ugello note la sezione

modo noto la determinazione della portata. Un secondo rilievo viene compiuto nella camera entro il fuso mediante il manometro P_0 ed il termometro t_0 , che forniscono pressione e temperatura iniziali p_0 , t_0 .

La velocità del vento contro il fuso viene calcolata in base alla indicazione h_c del tubo di Pitot A sulla bocca d'arrivo del vento, tenendo conto della pressione barometrica p , e della temperatura dell'aria in galleria t_c .

La misura delle quantità che interessano le prove è espressa dalle seguenti cifre approssimate.

La pressione di mandata può raggiungere 6 kg/cm² assoluti, con temperatura $t_0 = 30$ °C; la portata può toccare 60 gr/s.

Proporzionato quindi l'ugello all'espansione 6, risulta la gola con diametro 7,15 mm. e la sezione d'uscita di 8,9 mm. di diametro, distante 22 mm. dalla gola, essendo il profilo del divergente costituito da un arco di circolo avente raggio 200 mm.

Il vento nella galleria raggiunge la velocità $V_0 = 100$ m/s.

La spinta massima misurata è dell'ordine di 3 kg., la massima resistenza aerodinamica dell'ordine di 2 kg., essendo schermati mediante tubi profilati S i condotti di collegamento facenti capo al fuso.

Per varie cause, di cui principale quella della sensibilità della pesata alle dilatazioni termiche dei fili e degli elementi di sostegno, le pesate possono essere effettuate sotto il gravame di un possibile errore dell'ordine di ± 50 grammi.

Un primo gruppo di prove è stato compiuto con l'apparecchiatura descritta.

Le ricerche verranno proseguite con un dispositivo di sospensione rigida del fuso.

24. *Esperimenti.*

a) *Influenza mutua tra reazione e resistenza.* — Si è voluto dapprima accertarsi della possibilità delle ricerche e dei rilevamenti sulla reazione mediante l'apparecchiatura preparata, nei riguardi della influenza che sulla spinta misurata può avere l'azione sulla parete esterna del fuso.

In sostanza, si è voluto riconoscere l'entità della mutua influenza dei campi di velocità esterno ed interno al condotto, secondo quanto si è accennato nel n. 3 in merito alla definizione stessa di reazione.

Si sono fatte perciò letture di pesata con portata fluida variabile, per pressioni p_0 crescenti da 1 fino a 6 kg/cm² assoluti. Po-

tendo presumere piccola in queste condizioni la variazione delle azioni sull'esterno del tubo, questa misura dà la reazione pura e semplice.

Si è poi misurata la resistenza aerodinamica del fuso, inattivo quale eiettore.

Infine si è fatta la lettura della azione sul fuso dovuta agli effetti della reazione provocata dal lancio del fluido e della resistenza aerodinamica.

Come si è avuto modo di notare a suo tempo, con ciò si misurano confusi insieme sia la reazione del getto e la resistenza aerodinamica, sia le variazioni di tali due azioni dovute alla reciproca influenza.

Nelle numerose prove che sono state effettuate con varie modalità non si è potuto riconoscere un deciso orientamento del risultato; nel senso di definire quali siano la grandezza o anche soltanto il segno della somma algebrica delle accennate variazioni delle due azioni fondamentali.

È risultato cioè che l'errore nelle letture di pesata viene a coprire le variazioni oggetto della ricerca.

Ora, siccome l'errore di lettura, rispetto alle forze misurate, è relativamente moderato, al più dell'ordine di $\pm 5\%$, si può in conseguenza dare al quesito proposto la risposta seguente:

A meno di piccola frazione, e per condizioni di funzionamento prossime a quelle qui sperimentate, *la forza su un eiettore mobile in seno ad un fluido risultante dalle concomitanti azioni della resistenza al moto di avanzamento e della propulsione dovuta al lancio di materia, si può calcolare semplicemente come somma algebrica della resistenza fluidodinamica corrispondente alla velocità di traslazione del corpo e della reazione prodotta sull'eiettore immobile dal lancio del fluido.*

b) Rendimento di espansione. — Un secondo argomento che è stato oggetto di ricerca è il rendimento di espansione dell'ugello, definito nel n. 20.

Le misure forniscono la spinta Z , la portata M e la temperatura T_0 , nonchè le pressioni p_0 e p_e . Quindi questo rendimento viene espresso, in funzione delle misure, da

$$(76 \text{ ripetuta}) \quad \eta_e = \frac{(Z/M)^2}{V_{ad}^2}.$$

La portata misurata mediante la bocca tarata è risultata la stessa di quella calcolabile quale uscente dall'ugello note la sezione

modo noto la determinazione della portata. Un secondo rilievo viene compiuto nella camera entro il fuso mediante il manometro P_0 ed il termometro t_0 , che forniscono pressione e temperatura iniziali p_0 , t_0 .

La velocità del vento contro il fuso viene calcolata in base alla indicazione h_c del tubo di Pitot A sulla bocca d'arrivo del vento, tenendo conto della pressione barometrica p , e della temperatura dell'aria in galleria t .

La misura delle quantità che interessano le prove è espressa dalle seguenti cifre approssimate.

La pressione di mandata può raggiungere 6 kg/cm² assoluti, con temperatura $t_0 = 30$ °C; la portata può toccare 60 gr/s.

Proporzionato quindi l'ugello all'espansione 6, risulta la gola con diametro 7,15 mm. e la sezione d'uscita di 8,9 mm. di diametro, distante 22 mm. dalla gola, essendo il profilo del divergente costituito da un arco di circolo avente raggio 200 mm.

Il vento nella galleria raggiunge la velocità $V_0 = 100$ m/s.

La spinta massima misurata è dell'ordine di 3 kg., la massima resistenza aerodinamica dell'ordine di 2 kg., essendo schermati mediante tubi profilati S i condotti di collegamento facenti capo al fuso.

Per varie cause, di cui principale quella della sensibilità della pesata alle dilatazioni termiche dei fili e degli elementi di sostegno, le pesate possono essere effettuate sotto il gravame di un possibile errore dell'ordine di ± 50 grammi.

Un primo gruppo di prove è stato compiuto con l'apparecchiatura descritta.

Le ricerche verranno proseguite con un dispositivo di sospensione rigida del fuso.

24. *Esperimenti.*

a) *Influenza mutua tra reazione e resistenza.* — Si è voluto dapprima accertarsi della possibilità delle ricerche e dei rilevamenti sulla reazione mediante l'apparecchiatura preparata, nei riguardi della influenza che sulla spinta misurata può avere l'azione sulla parete esterna del fuso.

In sostanza, si è voluto riconoscere l'entità della mutua influenza dei campi di velocità esterno ed interno al condotto, secondo quanto si è accennato nel n. 3 in merito alla definizione stessa di reazione.

Si sono fatte perciò letture di pesata con portata fluida variabile, per pressioni p_0 crescenti da 1 fino a 6 kg/cm² assoluti. Po-

tendo presumere piccola in queste condizioni la variazione delle azioni sull'esterno del tubo, questa misura dà la reazione pura e semplice.

Si è poi misurata la resistenza aerodinamica del fuso, inattivo quale eiettore.

Infine si è fatta la lettura della azione sul fuso dovuta agli effetti della reazione provocata dal lancio del fluido e della resistenza aerodinamica.

Come si è avuto modo di notare a suo tempo, con ciò si misurano confusi insieme sia la reazione del getto e la resistenza aerodinamica, sia le variazioni di tali due azioni dovute alla reciproca influenza.

Nelle numerose prove che sono state effettuate con varie modalità non si è potuto riconoscere un deciso orientamento del risultato; nel senso di definire quali siano la grandezza o anche soltanto il segno della somma algebrica delle accennate variazioni delle due azioni fondamentali.

È risultato cioè che l'errore nelle letture di pesata viene a coprire le variazioni oggetto della ricerca.

Ora, siccome l'errore di lettura, rispetto alle forze misurate, è relativamente moderato, al più dell'ordine di $\pm 5\%$, si può in conseguenza dare al quesito proposto la risposta seguente:

A meno di piccola frazione, e per condizioni di funzionamento prossime a quelle qui sperimentate, *la forza su un eiettore mobile in seno ad un fluido risultante dalle concomitanti azioni della resistenza al moto di avanzamento e della propulsione dovuta al lancio di materia, si può calcolare semplicemente come somma algebrica della resistenza fluidodinamica corrispondente alla velocità di traslazione del corpo e della reazione prodotta sull'eiettore immobile dal lancio del fluido.*

b) *Rendimento di espansione.* — Un secondo argomento che è stato oggetto di ricerca è il rendimento di espansione dell'ugello, definito nel n. 20.

Le misure forniscono la spinta Z , la portata M e la temperatura T_0 , nonchè le pressioni p_0 e p_e . Quindi questo rendimento viene espresso, in funzione delle misure, da

$$(76 \text{ ripetuta}) \quad \eta_e = \frac{(Z/M)^2}{V_{ad}^2}.$$

La portata misurata mediante la bocca tarata è risultata la stessa di quella calcolabile quale uscente dall'ugello note la sezione

di gola $F_s = \frac{\pi}{4} 7,15^2 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 = 0,402 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$, la temperatura T_0 e la pressione p_0 .

Poichè la velocità del suono vale

$$(84) \quad V_s = \left(\frac{k-1}{k+1} 2CT_0 \right)^{1/2} = 18,3 \sqrt{T_0} \text{ m/s}$$

e $\delta_s = \rho_s/\rho_0 = 0,635$, tenendo conto che l'aria ha peso specifico $1,23 \text{ kg/m}^3$ a 15° C e 760 mm. di mercurio, risulta la portata

$$(85) \quad M = 0,0163 \frac{p_0}{\sqrt{T_0}} \text{ kg. massa/s, con } p_0 \text{ kg/cm}^2 \text{ e } T_0 \text{ }^\circ\text{K.}$$

La velocità di uscita adiabatica vale

$$(86) \quad V_{ad} = [2CT_0(1 - p_e/p_0)^{\frac{k-1}{k}}]^{1/2} = 44,9 \sqrt{T_0(1 - \lambda_e)^{\frac{k-1}{k}}} \text{ m/s}$$

e la spinta corrispondente

$$Z_{ad} = M V_{ad} = 0,732 \cdot p_0(1 - \lambda_e)^{\frac{k-1}{k}} \text{ kg.}$$

Per l'intervallo $3 \cdot p_e < p_0 < 6 \cdot p_e$ questa espressione è sostituibile molto prossimamente dalla legge lineare

$$Z_{ad} = 0,56(p_0 - 1) \text{ kg,}$$

la quale dà uno scarto minore dell'1% per $3 < p_0/p_e < 10$.

D'altra parte, se

$$(87) \quad y = Z/Z_{ad}$$

è il rapporto tra la spinta Z effettiva misurata e la spinta nominale Z_{ad} , e accettata come effettiva la portata teorica M , risulta:

$$(88) \quad \eta_e = \frac{(Z/M)^2}{(Z_{ad}/M)^2} = y^2.$$

Ora, le misure della spinta hanno dato punti allineati sulla retta

$$Z = 0,5 (p_0 - 1) \text{ kg.}$$

come si vede nella fig. 5 che li riporta.

Risulta dunque

$$\eta_e = \left(\frac{0,5}{0,56} \right)^2 = 80 \% \text{ circa.}$$

Per $p_0 = 2 \text{ kg/cm}^2$, è stato misurato $Z = 0,50 \text{ kg.}$, mentre

$$Z_{ad} = 0,62 \text{ kg; } y = \frac{0,50}{0,62}, \text{ e dunque } \eta_e = 65 \% \text{ circa.}$$

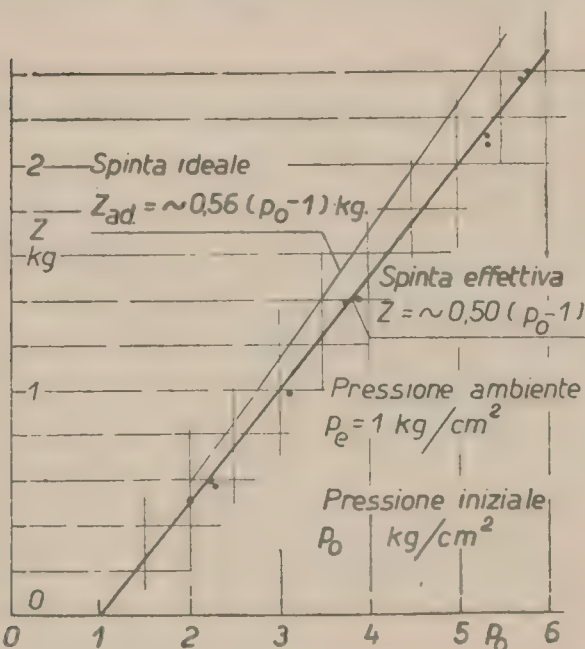


Fig. 5.

Il rendimento di espansione risulta piuttosto basso rispetto alle cifre che si trovano dichiarate da altri.

È da notare però che con piccoli ugelli convergenti-divergenti corti il rendimento è facilmente basso perchè è difficile evitare la formazione di un'onda d'urto, sia pure lieve, in corrispondenza alla sezione di gola, e di altre onde d'urto sul raccordo verso il divergente.

Se l'espansione è invece prolungata, lungo il divergente il moto può regolarizzarsi e, poichè le perdite locali risultano diminuite, il rendimento di espansione può aumentare alquanto.

Si nota che, a parte gli errori di misura, vi è nella espressione (88) del rendimento l'assunzione arbitraria che la portata effet-

tiva M sia uguale a quella ideale che ha servito al calcolo della spinta nominale Z_{id} . In effetti, detta M_i la portata ideale, risulta

$$(89) \quad \eta_e = \left(\frac{M_i}{M} \right)^2 y^2$$

e poichè il rapporto M_i/M può superare di qualche piccola frazione l'unità, corrispondentemente può aumentare il valore calcolato di η_e .

Infine si osserva che, per bassa espansione, il rendimento peggiora sensibilmente, in accordo con quanto si è trovato nella trattazione precedente.

Difatto, per $\lambda_e = 0,5$ si legge sulla figura 3 il valore $\theta = \varphi_b = 0,42$. Segnando per interpolazione il segmento tangente relativo all'ugello proporzionato a $\lambda_e = 1/6$, si legge per $\lambda_e = 0,5$ il valore $\theta = 0,37$. Secondo la (78) risulta dunque $\eta_e = 0,78$, contro il corrispondente valore 0,65 rilevato dalla prova.

Si nota tuttavia che, all'ugello per rapporto di espansione 6 imposto dalla disponibilità dell'impianto, corrisponde sul grafico della figura 3 una linea rappresentativa della spinta θ non molto discosta dalla linea di spinta massima ideale $\theta = \varphi_b$; e quindi, sia per la influenza delle resistenze passive, sia per l'incertezza delle letture a bassa espansione (con piccola spinta), non è agevole riconoscere sperimentalmente l'andamento caratteristico delle linee indicato sul diagramma.

LABORATORIO DI AERONAUTICA DEL R. POLITECNICO
DI TORINO**Torretta per la prova di eliche controrotanti.**

Riassunto. — *Si descrive una nuova torretta costruita per la bilancia per eliche del Laboratorio; si descrive il metodo seguito nella taratura e si segnala la precisione di misura ottenibile.*

È stata costruita una torretta di ricambio per la bilancia per le prove su modelli di eliche in dotazione del Laboratorio (Rif. 1).

Il prof. Panetti, Direttore del Laboratorio, con la collaborazione dell'ingegner Savonuzzi, ha studiato e definito lo schema di funzionamento e la struttura meccanica della torretta. L'ingegner Mortarino ha determinato l'apparecchiatura elettrica, ha studiato il metodo e analizzati gli esperimenti della taratura, eseguita in collaborazione con l'ing. Fermi. La ditta FIAT ha dato il suo appoggio tecnico per la definizione costruttiva dei particolari e un contributo finanziario. La redazione della presente comunicazione è opera dell'ing. Mortarino.

1. *Caratteristiche d'impiego.* — La bilancia permette le prove in vento assiale e in deriva con la misura delle forze e delle coppie (Rif. 1). La nuova torretta permette la misura della coppia assorbita da ciascuna di due eliche coassiali e controrotanti ad ugual numero di giri, e, inoltre, le misure su di un'elica singola utilizzando, mediante un *ingranaggio che accoppia le due trasmissioni*, tutto il campo di misura di cui è capace globalmente. Tale accoppiamento, oltre l'evidente vantaggio di estendere il campo sperimentale per un'elica singola, offre quello di permettere il pieno sfruttamento delle possibilità sperimentali nel caso di confronti tra un gruppo di eliche controrotanti e un'elica singola disegnata per assorbire la medesima potenza, a parità di giri. La validità di tali confronti è, infatti, legata alla eliminazione, nell'esperimento, dell'influenza relativa del fattore di scala, rappresentabile,

n tal caso, approssimativamente con il rapporto delle potenze impiegate nella prova.

Sulla trasmissione è situato, a monte del cardano, un torsiometro che è il mezzo di misura della coppia per la precedente torretta; ora, con la nuova torretta, permette di fare una misura della somma delle coppie. Tale possibilità di misura, sebbene la sensibilità del torsiometro sia inferiore a quella degli attuali mezzi di misura, è stata di grande utilità nella taratura come si dirà in seguito al num. 11.

2. *Campo di misura.* — Con trasmissioni indipendenti la coppia massima misurabile su ciascuna trasmissione è circa 2800 kgmm; con trasmissioni accoppiate 5600 kgmm. L'intervallo di velocità ordinariamente utilizzato è da 800 a 2600 giri al minuto. A velocità minori di 800 l'attrito della trasmissione diventa poco regolare; a velocità maggiori di 2600 si iniziano vibrazioni della torretta.

DESCRIZIONE.

3. *Torretta* (vedi fig. 1). — Il metodo seguito per determinare la coppia trasmessa consiste nell'inserire lungo la trasmissione a ciascuna elica un elemento di elevata deformabilità. La misura della deformazione permette, in base alla taratura, il calcolo della coppia.

La trasmissione unica T , proveniente dal motore, oltre il cardano si sdoppia in H in due trasmissioni, coassiali e indipendenti, ciascuna delle quali comprende una molla ad elica cilindrica, m_a e m_p , sollecitata prevalentemente a flessione dalla coppia trasmessa. Le sezioni origine delle due molle sono rigidamente collegate in H ad un tubo t , rigido, posto fra esse. Le sezioni terminali delle molle comandano ciascuna la trasmissione ad una delle eliche attraverso i collegamenti ad albero scanalato: E_a e E_p .

La misura dello spostamento delle sezioni terminali rispetto alle sezioni origine si riduce alla misura di resistenze elettriche con il metodo qui appresso descritto.

Il tubo cilindrico t porta sull'estremità dal lato delle eliche due avvolgimenti di costantana, occupanti ciascuno un arco di circa 160° e, normalmente, isolati fra loro; ciascun avvolgimento serve una delle trasmissioni. Gli avvolgimenti sono nudi sulle testate e permettono quindi un collegamento elettrico, che viene fatto con spazzole comandate dalle sezioni terminali delle molle;

la rotazione elastica della molla provoca lo spostamento del contatto sul corrispondente avvolgimento. Per la misura si inse-

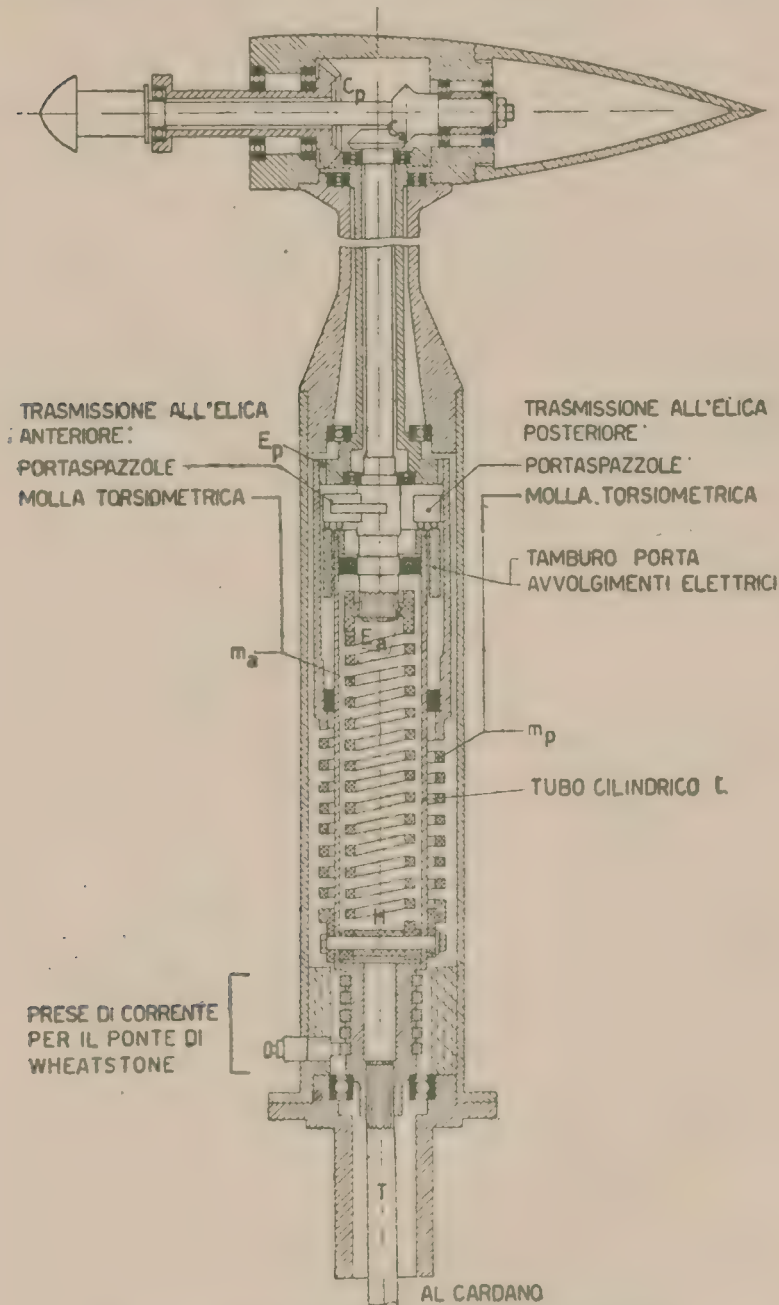


Fig. 1. — Torretta per eliche controrotanti. - Sezione schematica.

risce su un lato di un ponte di Wheatstone l'origine di un avvolgimento e il corrispondente contatto mobile, la resistenza del tratto di avvolgimento compreso tra i due punti per coppia diversa da zero, depurata del valore della resistenza per coppia nulla, determina il valore della coppia.

4. *Ponte di Wheatstone* (vedi fig. 2). — Due lati del ponte AB , BC sono costituiti da resistenze fisse, un terzo lato CD da una resistenza fissa e una variabile detta di azzeramento iniziale, il quarto lato DA , comprende le resistenze variabili di misura e la resistenza interna del tratto di avvolgimento inserito. Collegamenti elettrici stabiliti mediante un unico combinatore di contatti permettono di misurare, delle resistenze inserite sui due avvolgimenti interni: i valori singoli, la somma, la differenza a meno di una costante. La misura di somma e differenza permette di aumentare la precisione sperimentale in base al confronto dei valori direttamente misurati con quelli dedotti dalle altre misure. La misura della somma si esegue normalmente nelle *prove* su elica singola con trasmissioni accoppiate di cui si è fatto cenno al num. 1.

La resistenza interna alla torretta e quella di misura sono state inserite su di uno stesso lato del ponte, seguendo il consiglio del professor Perucca. Con questa disposizione tali resistenze, ad azzeramento avvenuto, risultano complementari e quindi la sensibilità del ponte è costante in tutto il campo di misura, con il vantaggio di poter dedurre con facilità, dall'escursione dell'indice del galvanometro durante la misura, l'intervallo di variazione della coppia.

TARATURA DEL PONTE E DELLA TORRETTA.

5. *Notazioni.* — Useremo in quanto segue i simboli:

- C coppia assorbita dall'elica, in kgmm
 α angolo di rotazione del contatto mobile, in gradi

indicheremo la lettura al ponte di Wheatstone con:

- l di misura
 l_0 statica per coppia nulla ($C = 0$)
 l_c corrispondente all'azione della forza centrifuga sulle molle
 l_C corrispondente alla coppia C
 l_t corrispondente alla coppia dinamica assorbita dalla trasmissione

la lettura l_i si distingue con:

l_{i0} per la parte corrispondente all'attrito a vuoto ($C = 0$).

Il valore di l_{i0} a 1000 giri si indica con l_{i00} .

l_{iC} per la parte dovuta alla coppia utile C

si ha perciò: $l_i = l_{i0} + l_{iC}$.

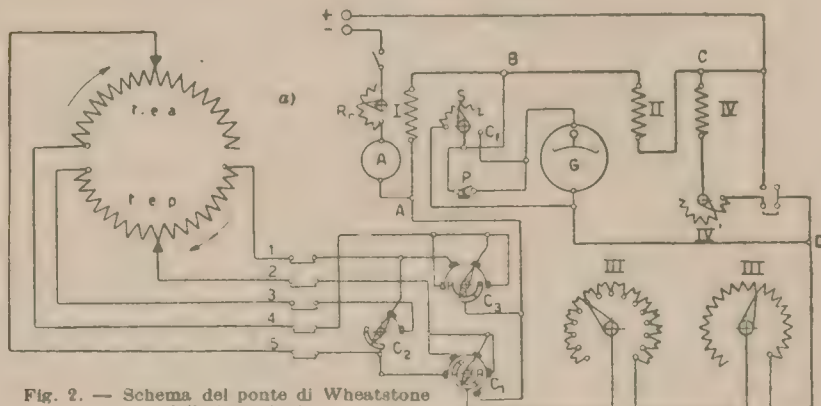


Fig. 2. — Schema del ponte di Wheatstone e delle inserzioni.

a) Schema costruttivo. b) Schema dimostrativo.

Abbreviazioni:

tea (tep) relativo alla trasmissione all'elica anteriore (posteriore).

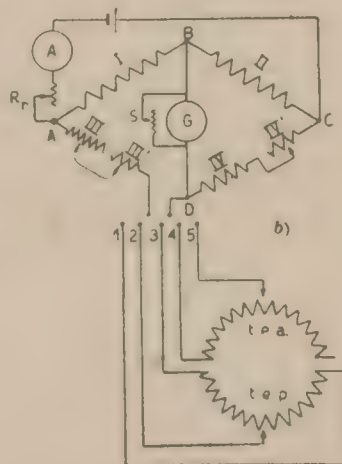
C_{aa} (C_{op}) coppia assorbita dall'elica anteriore (posteriore).

Fili inseriti:

1-2 la lettura è funzione di C_{op} .
 4-5 : : : : C_{aa} .
 (1-2) + (4-5) : : : : $C_{aa} + C_{op}$.
 (2-3) + (4-5) : : : : $C_{aa} - C_{op}$.

LEGGENDA

A milliamperometro della corrente principale.
 G microamperometro di azzeramento.
 S shunt variabile di G.
 P pulsante per l'inserzione di G.
 C_1 contatto fisso per l'inserzione di G.
 C_1, C_2, C_3 combinatori dei contatti (comandati da una sola manopola).
 I II IV resistenze fisse.
 III III' resistenze variabili di misura.
 (III' corrisponde ad un gruppo di III).
 IV' resistenza variabile di azzeramento iniziale.



Si indicano con gli indici a, p le medesime quantità relative rispettivamente alla trasmissione all'elica anteriore e alla posteriore; per es.: l_{iCa} , l_{iCp} .

Segni. — Si indicano come positivi: la coppia resistente all'elica, e il numero di giri corrispondente al senso della velocità angolare per cui la coppia positiva fa avvolgere la molla. I valori di l_{i0} , l_{iC} , l_i si considerano sempre positivi.

Osservazione. — Per la trasmissione all'elica anteriore si indicano con l, l_{10} i valori determinati dalle letture al ponte corretti del termine l_{ga} (vedi num. 8 c). Il termine l_{ga} per l è da sottrarre per $l - l_0 > l_c$ e da sommare nel caso opposto; per l_{10} è da sottrarre in ogni caso.

Il criterio seguito nella taratura è stato quello di studiare con misure, per quanto possibile dirette, le varie cause influenti sul valore della lettura l al ponte, completando e interpretando gli esperimenti con l'aiuto di previsioni analitiche, in modo da determinare le correzioni da apportare ad l per calcolare l_c di cui la coppia C , assorbita dall'elica, è funzione nota in base alla taratura statica.

6. *Taratura del ponte.* — Si è controllata la regolarità degli avvolgimenti; le disuniformità sono risultate di un ordine di grandezza nettamente inferiore a quello degli avvolgimenti della torretta. Non hanno perciò influenza nè sulla sensibilità nè sulla precisione delle misure.

7. *Taratura della torretta.* — Si è eseguita una serie di misure statiche e dinamiche allo scopo di individuare:

- 1) errori di lettura (num. 8);
- 2) la relazione statica tra le coppie e le letture al ponte (num. 9);
- 3) l'influenza della forza centrifuga sulle molle (num. 10-11);
- 4) la coppia assorbita dalla trasmissione e l'influenza su di essa delle condizioni di lubrificazione (num. 12-13-14).

8. *Errori di lettura.* — Sono state tenute presenti le seguenti cause:

a) discontinuità delle resistenze. Esse sono costituite da spire a contatto; la discontinuità corrisponde all'interasse tra le spire. Dal calcolo si ha, per lo scarto al ponte: $l_{dr} = \pm 0,85$ (circa). L'errore, benchè di carattere sistematico, non ha influenza sull'interpolazione;

b) gioco della spazzola nel portaspazzola. Per un valore presumibile del gioco $g_s = 0,15$ mm il calcolo dà, per lo scarto al ponte $l_s = \pm 0,5$ (circa), valore confermato, come ordine di grandezza, da esperimenti diretti. L'errore tende ad essere nullo negli esperimenti dinamici perchè la forza centrifuga preme le spazzole contro la loro sede, riducendo il gioco. L'errore è eliminato dalla media e dall'interpolazione;

c) gioco dell'albero portaspazzola rispetto alla sezione terminale della molla. Tale causa d'errore è presente nella trasmissione all'elica anteriore in cui il portaspazzola è portato dall'albero di trasmissione comandato dalla sezione terminale attraverso un collegamento ad albero scanalato. Dal calcolo per un gioco circonferenziale nell'accoppiamento $g_a = 0,1$ mm, risulta $l_{as} = \pm 1$, determinato anche con esperimenti diretti; il segno è determinato da quello della coppia trasmessa (vedi Oss. al num. 5). L'errore ha carattere sistematico, è crescente col consumo; la sua influenza si risente specialmente nella determinazione di l_{01} e quindi, come si vedrà più avanti, nell'interpretazione degli esperimenti sulla coppia assorbita, per attrito, dalla trasmissione;

d) attrito statico della trasmissione.

Nelle misure statiche è presente quello di tutta la trasmissione; operando senza particolari cautele per ridurlo, l'errore raggiunge:

$$l_{as} = \pm 20 \text{ (misure sotto carico)} \quad l_{as} = \pm 6 \text{ (misure a vuoto)}$$

riducendolo al minimo mediante vibrazioni e provando con la torretta senza ogiva si ottiene:

$$l_{as} = \pm 4 \text{ (misure sotto carico)} \quad l_{as} = \pm 0,5 \text{ (misure a vuoto)}$$

Negli esperimenti dinamici l'attrito statico si riduce a quello delle spazzole sul contatto e si ritiene in ogni caso trascurabile perchè le vibrazioni, che sempre si hanno in movimento, tendono ad annullarlo. L'errore ha, in alcune misure, influenza di carattere sistematico, in particolare nella determinazione di l_0 e sulla taratura statica delle molle; deve perciò essere ridotto al minimo.

9. Taratura statica delle molle.

È stata determinata mediante letture statiche ad un disco graduato e al ponte la legge $l_C \sim a$; è risultato:

$$(1) \quad l_{Ca} = 3,49a \pm 3 \quad (2) \quad l_{Cp} = 3,56a \pm \left. \begin{array}{l} 3 \text{ per } l_C < 100 \\ 6 \text{ per } l_C > 100 \end{array} \right\}$$

poichè gli scarti superano la somma degli errori di lettura a) e b), sono presenti irregolarità degli avvolgimenti che, però, non danno luogo ad errori di carattere sistematico nelle interpolazioni.

Mediante applicazione di coppie statiche e letture al ponte, con attrito statico ridotto mediante vibrazioni, si è ottenuto:

$$(3) \quad C = (4,96 \pm 0,03)/l_C, \quad (4) \quad C = (4,81 \pm 0,03)/l_{Cp} \quad (C \text{ in kgmm})$$

Dalle (1) (3), (2) (4) la taratura delle molle in funzione di α risulta espressa da:

$$(5) C = 17,32a_a \qquad (6) C = 17,13a_p \qquad (C \text{ in kgmm})$$

Sono stati calcolati i valori di (dC/da) in base alle dimensioni geometriche, assunto $E = 21000 \text{ kg.mm}^{-2}$ (modulo di elasticità normale), non tenendo conto della curvatura, la cui influenza è trascurabile (0,6% per la molla sulla trasmissione all'elica anteriore), e delle sollecitazioni secondarie.

I valori di dC/da calcolati sono maggiori di quelli sperimentali del 5,55% e del 5,92% rispettivamente per la molla sulla trasmissione all'elica anteriore e per quella sulla posteriore; tale divergenza, che sussiste anche tenendo conto delle incertezze dei valori sperimentali e di E , rappresenta l'influenza delle sollecitazioni secondarie e delle irregolarità geometriche.

Influenza della forza centrifuga.

La forza centrifuga produce sulle molle due effetti che si possono considerare distinti:

- a) deformazione dell'asse;
- b) rotazione relativa tra gli estremi (svolgimento).

10. *Deformazione dell'asse.* — La deformazione dell'asse si prevede agisca sulle caratteristiche elastiche rispetto alla coppia da misurare. La possibilità della presenza nell'esperimento si determina calcolando il numero di giri critico delle molle. Applicando quanto esposto nel rif. 2 al caso di una molla ad elica cilindrica costituita da filo di sezione non circolare, si ha:

$$(7) \qquad J_0 = h/\pi r(1/J + E/R_t)$$

J_0 momento di inerzia a flessione della barretta cilindrica equivalente (avente lunghezza e rigidezza uguali a quelle della molla)

r raggio del cilindro di avvolgimento baricentrico del filo
 h passo dell'avvolgimento

J momento d'inerzia della sezione del filo intorno all'asse baricentrico normale all'asse della molla

E modulo di elasticità normale

R_t rigidezza torsionale del filo (per sezione rettangolare di lati $b, c (c \leq b)$) $R_t = Gbc^3/\mu, G$ modulo di elasticità trasversale, μ fattore di rigidezza per es. dal Man. Colombo).

La velocità critica è espressa da:

$$(8) \quad n_c = K(1/L^2)\sqrt{EJ_0/m}$$

L lunghezza della molla secondo l'asse

$m = \rho 2\pi r A/h$ massa per unità di lunghezza della barretta equivalente

K fattore numerico dipendente dalle condizioni di vincolo.

Nel caso presente le condizioni di vincolo sono, con ottima approssimazione, quelle di incastro perfetto ad entrambi gli estremi; si ha allora:

$$K = 213 \quad \text{per } n_c \text{ in giri/1'} \quad (\text{vedi per es. Man. Hütte, Vol. I})$$

e le velocità critiche:

$$n_{ca} = 3300 \text{ giri/1'} \quad n_{cp} = 5650 \text{ giri/1'}$$

Sperimentalmente si è riscontrata una velocità critica nelle prove a vuoto al di sopra di 3200 giri/1', nelle prove con eliche al di sopra di 2800, a cui si iniziano vibrazioni della torretta di intensità crescente; la velocità massima ordinariamente mantenuta negli esperimenti è di 2600 giri/1'.

L'esame delle prove, accennate più avanti (vedi num. 11), per determinare l'influenza della coppia trasmessa su l_c , porta a ritenere come insensibile l'influenza della forza centrifuga sulla deformabilità delle molle nel campo in cui gli esperimenti non sono disturbati dalla presenza di forti vibrazioni. Si ritiene, d'altra parte, che l'instabilità dell'asse, che per la molla sulla trasmissione all'elica anteriore si presenta a velocità prossime a quelle di esperimento, non produca effetti molto sensibili, perchè, essendo la molla contenuta con piccolo interspazio entro un tubo cilindrico, non si possono produrre grandi deformazioni; l'attrito statico che si produce per strisciamento è estremamente ridotto dalle piccole vibrazioni sempre presenti in movimento.

11. *Rotazione relativa tra gli estremi.* — La forza centrifuga determina su ogni spira un'azione che tende ad aprirla per cui risulta nel complesso uno svolgimento della molla.

L'ing. Mortarino ha determinato le espressioni per il calcolo della rotazione relativa, per effetto della forza centrifuga, degli

estremi di una molla ad elica cilindrica di cui il filo costituente sia incastrato ad un'estremo e comunque vincolato all'altro nell'ipotesi che l'asse non subisca deformazioni, e trascurando le deformazioni dell'elemento di filo dovute alle forze agenti su di esso.

Nelle condizioni di vincolo del caso presente (filo incastrato da una parte ad una base fissa e dall'altra ad una testa libera di scorrere secondo l'asse di rotazione) il calcolo può essere effettuato, senza sacrificio dell'esattezza numerica, con la semplice espressione:

$$(9) \quad a_c/\omega^2 = - \rho A r^4 B_z 2\pi N$$

che rappresenta l'effetto del solo momento flettente, con asse parallelo all'asse di rotazione, sulla molla con filo incastrato ad un estremo e libero all'altro. I simboli usati nella (9) sono:

a_c rotazione relativa tra gli estremi, in radianti

ω velocità angolare in radianti al secondo

ρ massa specifica del materiale

A sezione normale del filo

B_z peso elastico di un tronco unitario di filo sollecitato a momento flettente intorno all'asse baricentrico parallelo all'asse di rotazione. Se si trascura l'influenza della curvatura $B_z = 1/EJ_z$ in cui J_z è il momento d'inerzia della sezione intorno all'asse anzidetto

N numero di spire comprese tra gli estremi della molla.

In misure pratiche, per a_c in gradi essendo n il numero di giri al minuto, la (9) si scrive:

$$(10) \quad a_c^0/(n/1000)^2 = - 3,93 \cdot 10^6 \rho A r^4 B_z N.$$

Dalla (10) combinata con le (1) e (2) si ottiene, per la posizione $C = 0$:

$$(11) \quad l_{ca} = - 0,50 (n/1000)^2 \quad (12) \quad l_{cp} = - 2,60 (n/1000)^2$$

(per $E = 21000 \cdot 10^2 \text{ kg cm}^{-2}$; peso specifico $\gamma = 7,8 \cdot 10^{-3} \text{ kg cm}^{-3}$).

Lo svolgimento prodotto dalla forza centrifuga è stato determinato con esperimenti diretti.

La rotazione della sezione terminale della molla è provocata nelle prove a vuoto, dall'effetto contemporaneo della forza cen-

trifuga e della coppia resistente di attrito della trasmissione. La rotazione provocata dalla forza centrifuga è indipendente dal senso del moto, quella provocata dalla coppia di attrito si inverte col moto; perciò, con le convenzioni di segno stabilite, per n , al num. 5. si ha:

$$(13) \quad l = l_c + l_{t0} \quad \text{per } n > 0 \qquad (14) \quad l' = l'_c - l'_{t0} \quad \text{per } n < 0$$

a parità di n (in valore assoluto) $l_c = l'_c$, perciò:

$$(15) \qquad l_c = 1/2 (l + l') = 1/2 (l_{t0} - l'_{t0})$$

che per $l_{t0} = l'_{t0}$ si riduce a:

$$(16) \qquad l_c = 1/2 (l + l').$$

Per realizzare le condizioni sperimentali che permettono il calcolo con la (16) si elimina una possibile causa di dissimmetria nell'attrito e si riduce al minimo la resistenza della trasmissione eseguendo le prove senza ogiva (in tal caso la coppia resistente è nulla per la trasmissione all'elica anteriore) e regolando la prova in modo che, a partire da macchina fredda, si totalizzi lo stesso tempo di funzionamento a parità di giri nei due sensi. Esperimenti sull'attrito hanno mostrato che, dopo un certo tempo di funzionamento, l'attrito assume un valore di regime e, perciò, le prove possono essere condotte più speditamente.

In fig. 3 sono riportati i risultati di parecchi esperimenti; tali risultati sono molto bene interpretati dalle (11) e (12).

La rotazione prodotta dalla forza centrifuga è funzione dell'angolo formato tra gli estremi, risulta quindi, indirettamente, funzione del momento trasmesso. Secondo la (10), al variare della coppia da zero al massimo, la deformazione subisce un incremento del 2,1 % e del 3,5 % rispettivamente per la molla di trasmissione all'elica anteriore e alla posteriore. Tali variazioni sono perfettamente trascurabili. La validità del calcolo può però essere infirmata dalla presenza delle grandi deformazioni secondarie, che si producono sotto carico, per cui la forma della molla si allontana da quella di un'elica cilindrica.

Per il controllo sperimentale dell'influenza della coppia trasmessa, si sono fatte delle prove con mulinelli tarati e si sono eseguite le letture al ponte e al torsionometro, posto in serie sulla trasmissione, di cui è cenno al num. 1. Tale prova servi pure a

controllare l'influenza della deformazione dell'asse eventualmente prodotta dalla forza centrifuga (vedi num. 10).

Si concluse che, entro i limiti della approssimazione sperimentale, l'influenza della forza centrifuga non si modifica col carico. Le (11) e (12) sono state quindi ritenute valide in tutto il campo di misura.

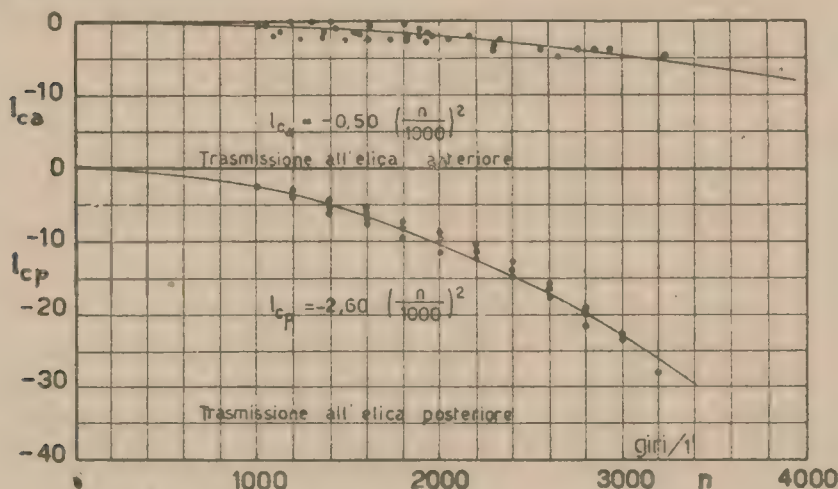


Fig. 3. — Influenza della forza centrifuga sulle molle.
 l_{ca} , l_{cp} corrispondenti letture al ponte di Wheatstone

12. Coppia di attrito assorbita dalla trasmissione.

Su di essa influiscono in primo luogo le condizioni di lubrificazione, cioè: qualità, quantità, sistema di distribuzione, temperatura del lubrificante. Con esperimenti preliminari si poté accertare che l'attrito si stabilizza dopo che il lavoro che gli corrisponde raggiunge circa 15000 kgmm (circa 20' di funzionamento a vuoto a 2000 giri/1'). Prolungandosi il funzionamento, si produce un forte aumento dell'attrito dovuto sia alla riduzione del potere lubrificante per riscaldamento, sia alla riduzione del gioco dei cuscinetti a sfere per dilatazione termica. Si osservò inoltre che la coppia di attrito, dovuta al solo carico, rappresenta circa il 10 % della coppia trasmessa.

Apparve così la necessità di un controllo più accurato della lubrificazione e, a questo scopo, si adottò, invece della lubrificazione naturale mediante grasso contenuto nell'ogiva, la distribuzione regolabile di olio all'imbocco degli ingranaggi, e la refrigerazione, pure regolabile, dell'ogiva con acqua. Sull'ogiva si dispose una pinza termoelettrica per controllarne la temperatura

La refrigerazione ad acqua risultò superflua nelle prove in galleria di vento con ogiva nuda, essendo il vento sufficiente per mantenere la temperatura entro i limiti richiesti per la costanza dell'attrito, e invece indispensabile quando l'ogiva è rinchiusa entro una carenatura. I limiti entro cui può variare la temperatura senza che l'attrito vari sono ampi e possono essere facilmente rispettati con i mezzi adottati.

La coppia di attrito si è distinta in base alle cause che la producono:

a) attrito della trasmissione a vuoto funzione del numero di giri;

b) attrito della trasmissione per effetto della coppia trasmessa all'elica funzione della coppia stessa;

c) attrito della trasmissione per effetto della trazione dell'elica funzione della trazione stessa.

Non si è potuto attuare un semplice metodo sperimentale per isolare c), si è quindi trascurata ogni correzione al riguardo accettando l'errore sistematico che ne deriva.

13. *Misura della coppia assorbita a vuoto.* — Si eseguono le misure al ponte al variare del numero di giri; si ha:

$$(17) \quad l_{10} = l - l_0 - l_c.$$

In fig. 4 sono rappresentati i risultati di un esperimento sulla trasmissione all'elica anteriore e di due su quella all'elica posteriore; questi ultimi sono stati eseguiti uno all'inizio e l'altro al termine di una serie di esperimenti su eliche per un totale di circa 30 ore di prova.

14. *Attrito della trasmissione per effetto della coppia trasmessa all'elica.* — Si sono eseguite delle tarature dinamiche con mulinello (letture l al ponte, misura dei giri/1' e della coppia); il confronto dei risultati, corretti dell'influenza della forza centrifuga, con quelli della taratura statica permette di dedurre:

$$(18) \quad l_i = l - l_0 - l_c - l_C$$

e per confronto con la taratura a vuoto:

$$(19) \quad l_{iC} = l_i - l_{10}.$$

Le difficoltà sperimentali da superare sono: raggiungere una precisione di misura sufficientemente elevata, assicurare l'ugua-

glianza delle condizioni di lubrificazione a vuoto e sotto carico per l'applicabilità della (19). La coppia C si determina sia per pesata diretta sia dalla taratura del mulinello (che si ottiene con il medesimo esperimento) in base al numero di giri; il confronto dei valori corrispondenti di C sul diagramma $C-(l-l_0-l_c)$ permette di determinare l'interpolazione con uno scarto ridotto.

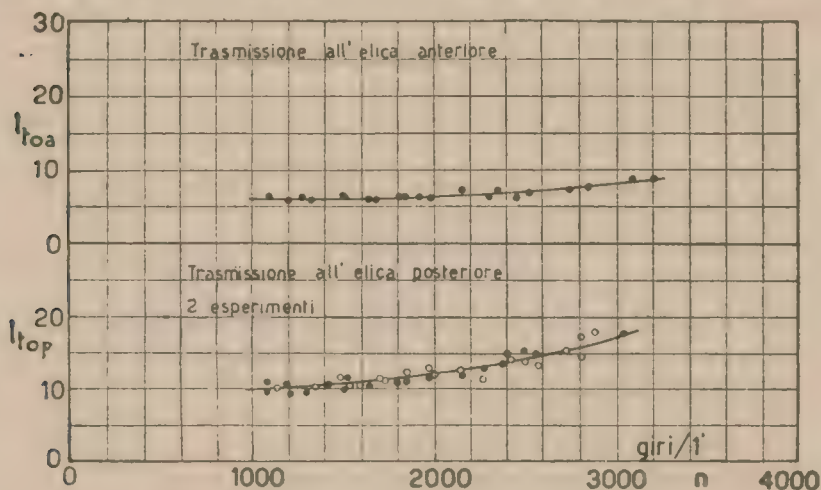


Fig. 4. — Coppia assorbita a vuoto dalla trasmissione.
 l_{toa} , l_{top} corrispondenti letture al ponte di Wheatstone.

In fig. 5 sono rappresentati i diagrammi $l_{ic}-l_c$ per entrambe le trasmissioni; gli scarti nei valori di l_{ic} sono dovuti: a errori nelle letture, agli errori nella determinazione di C , alle effettive variazioni della coppia assorbita per attrito; dall'analisi degli errori sperimentali risulta che lo scarto in valore assoluto di l_{ic} attribuibile alla variazione accidentale dell'attrito è probabilmente minore di 3.

In fig. 5, per la trasmissione all'elica posteriore, sono rappresentati i risultati di due esperimenti *a*) e *b*) eseguiti con differenti qualità di lubrificante; nei limiti di approssimazione delle misure, si ha:

$$(20) \quad l_{ic}(a)/l_{ic}(b) = l_{i0}(a)/l_{i0}(b) = l_{i00}(a)/l_{i00}(b).$$

La linearità che lega l'attrito per effetto del carico a quello a vuoto alla stessa velocità, permette di estrapolare il risultato dell'esperimento sotto carico dalla prova a vuoto e viceversa e quindi rende possibile la riduzione delle prove, di controllo della taratura, da eseguirsi durante una serie di esperimenti.

I risultati delle prove a vuoto si rappresentano mediante un diagramma (vedi per es. fig. 4), quelli delle prove sotto carico

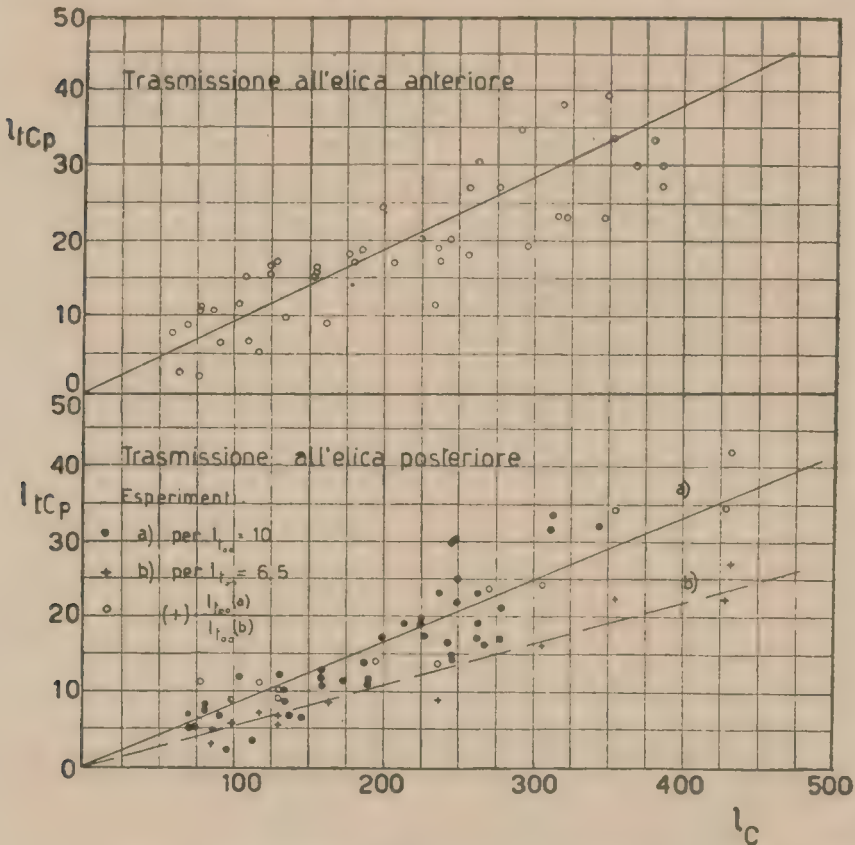


Fig. 5. — Coppia assorbita dalla trasmissione per effetto della coppia trasmessa all'elica.

l_{iC} , l_{iCp} , l_0 corrispondenti letture al ponte di Wheatstone.

mediante un'espressione analitica ottenuta nella verosimile ipotesi che l_{iC} vari linearmente con la coppia trasmessa all'elica:

$$(21) \quad l_{iC} = k_{iC} l_C \quad \text{e poichè} \quad l_C = l - l_0 - l_c - l_{i0} - l_{iC}$$

$$(22) \quad l_{iC} = k_{iC}(l - l_0 - l_c - l_{i0})/(1 + k_{iC}).$$

Le (21) (22) sono valide in condizioni di lubrificazione uguali a quelle di taratura con cui è stata ottenuta k_{iC} ; per il calcolo di l_{iC} in condizioni diverse, in base alla (20) si scrive:

$$(23) \quad l_{iC} = k'_{iC} l_{i00}(l - l_0 - l_c - l_{i0})/(1 + k'_{iC} l_{i00})$$

in cui: $k'_{iC} = (k_{iC}/l_{i00})$ di taratura.

15. *Tarature da eseguirsi per ogni serie di esperimenti.*

All'inizio e al termine:

- 1) determinazione di l_0 con metodo statico;
- 2) determinazione di l_{i0} mediante prova a vuoto;
- 3) determinazione di l_{iC} mediante prova con mulinello;

durante le prove si esegue il controllo di l_{i0} ; per la trasmissione all'elica anteriore deve essere determinato a lunghi intervalli di tempo: l_{ga} (V. num. 8 c).

16. *Formule di elaborazione.*

$$(24) \quad l_c = k_c(n/1000)^2$$

$$(25) \quad l_i = l_{i0} + l_{iC}$$

$$(26) \quad l_{iC} = k_{iC}(l - l_0 - l_c - l_{i0})/(1 + k_{iC}) \quad (22) \text{ ripetuta}$$

$$(27) \quad l_{iC} = k'_{iC}l_{i00}(l - l_0 - l_c - l_{i0})/(1 + k'_{iC}l_{i00}) \quad (23) \text{ ripetuta}$$

$$(28) \quad l_C = l - l_0 - l_c - l_i \quad \text{per } n > 0$$

$$(29) \quad l_C = -(l - l_0 - l_c - l_i) \quad \text{per } n < 0$$

$$(30) \quad C = K_C l_C$$

Espressioni numeriche (unità: kgmm, unità al ponte di Wheatstone, giri/1'):

per la trasmissione all'elica anteriore:

$$k_{ca} = -0,50 \quad k'_{iCa} = 1,60 \cdot 10^{-2} \quad K_{Ca} = 4,96$$

per la trasmissione all'elica posteriore:

$$k_{cp} = -2,60 \quad k'_{iCp} = 0,84 \cdot 10^{-2} \quad K_{Cp} = 4,81$$

17. *Errori e precisione sperimentale.*

Valori probabili degli errori massimi accidentali nelle prove dinamiche:

$$\text{errori di lettura} \quad \Delta l = \pm 2$$

$$\begin{array}{l} \text{variazione della coppia di attrito (determinata} \\ \text{indirettamente)} \end{array} \quad \Delta l = \pm 3$$

Si ha in totale $\Delta l_{acc} = \pm 5$ corrispondente a $\Delta C_{acc} = \pm 25$ kgmm (circa). Valori probabili degli errori massimi sistematici:

$$\Delta k_{ca} = \Delta k_{cp} = \pm 0,10$$

$$\Delta l_{0a} = \Delta l_{0p} = \pm 0,5$$

$$\Delta l_{t0a} = \pm \Delta l_{0a}$$

$$\Delta l_{t0p} = \pm \Delta l_{0p}$$

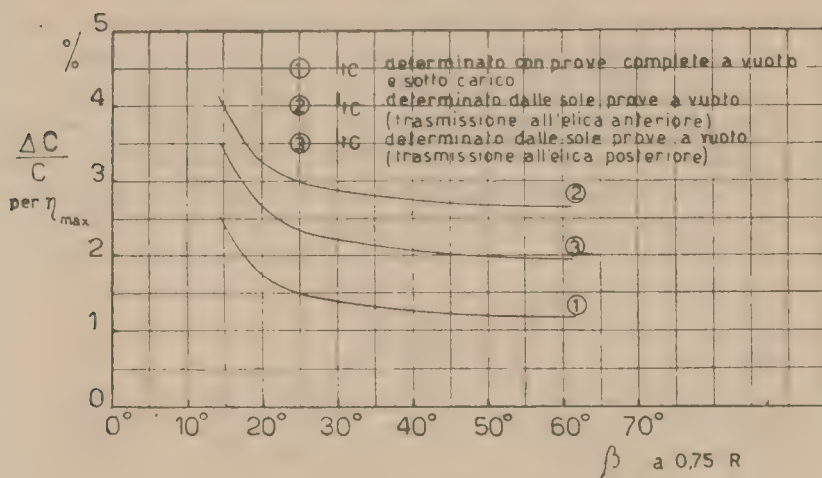


Fig. 6. — Errori sistematici.

Esempio: errori massimi (in valore assoluto) sulla coppia corrispondente a $\eta_{max} : \left(\frac{\Delta C}{C} \right)_{\eta_{max}}$; per un modello di elica NACA 5868-9 (Tech. Report 658) di diametro 0.800 m. provato a quota zero in aria tipo.

Metodo di prova: per ogni callettamento $n = cost.$; n è il massimo numero di giri al l' che soddisfa ai limiti: $n \leq 2600$ giri/l', $C \leq 2800$ Kgmm.

β callettamento geometrico delle pale.

$$\Delta k_{tCa} = \Delta k_{tCp} = \pm 0,5 \cdot 10^{-2} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{in base ai risultati delle} \\ \text{prove complete a vuoto} \\ \text{e sotto carico} \end{array} \right.$$

$$\Delta k'_{tCa} = \pm 0,21 \cdot 10^{-2} \quad \Delta k'_{tCp} = \pm 0,09 \cdot 10^{-2}$$

$$\Delta k_{tCa} = \pm \frac{1}{\beta} (0,21 l_{t0a} + 0,80) \cdot 10^{-2} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{calcolati da } k'_{tCa}, k'_{tCp} \\ \text{in base ai risultati della} \\ \text{sola prova a vuoto} \end{array} \right.$$

$$\Delta K_{Ca} = \Delta K_{Cp} = \pm 0,03$$

Si ha inoltre l'influenza della trazione sulla coppia di attrito della trasmissione che si è lasciata indeterminata per la difficoltà del controllo sperimentale.

A titolo di esempio è riportato in fig. 6 il risultato del calcolo degli errori massimi sistematici presenti nella determinazione della coppia corrispondente al massimo rendimento per un modello di elica tripale NACA 5868-9 (T. R. N° 658) di diametro 800 mm provato a quota zero, in aria tipo. Si suppone di mantenere nella prova la velocità di rotazione costante per ogni calettamento, e, precisamente la massima che soddisfa ai limiti: $C \leq 2800$ kgmm, $n \leq 2600$ giri/1'. Risulta la convenienza di determinare l_w con prove a vuoto e sotto carico eseguendo, lungo gli esperimenti, le prove a vuoto solo per il controllo della costanza dell'attrito.

In prove di confronto tra eliche di una stessa famiglia a diversi passi o tra eliche di diverse famiglie, l'errore sistematico relativo nella misura della coppia è sensibilmente nullo, se si sceglie opportunamente il procedimento sperimentale.

RIFERIMENTI:

- (1) M. PANETTI, *Impianto per lo studio sperimentale delle eliche*. 1ª Serie. « Rendiconti del Laboratorio di Aeronautica del R. Politecnico di Torino ».
- (2) M. PANETTI, *Comportamento elastico delle molle ad elica cilindrica per flessione dell'asse*. « Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino ». Vol. 75 Anno 1939-40.

C. MORTARINO

Considerazioni e esperimenti su eliche
di minima perdita indotta.

Parte I. — Metodo di calcolo di un'elica ottima in relazione alle condizioni di progetto.

Parte II. — Confronto sperimentale tra un'elica di minima perdita indotta e un'elica di tipo normale.

RIASSUNTO — *Parte I.* - Sono brevemente discusse, in forma qualitativa, le approssimazioni fisiche accettate alla base del calcolo delle eliche di minima perdita indotta sviluppato da Goldstein secondo i criteri stabiliti da Betz.

Sono raccolte le formule necessarie per il disegno e, con l'appoggio di un esempio numerico, è messa in rilievo la necessità di precisare gli effettivi vincoli di progetto per poter disegnare l'elica di massimo rendimento assoluto che ad essi soddisfa. È indicata la successione di calcoli da seguire per ottenere tale risultato.

Il rendimento dell'elica oltre che per il volo normale interessa in tutto un intervallo di condizioni di volo; in particolare involo e salita. Risulta perciò la necessità di esperimenti per determinare i rendimenti alle condizioni di volo diverse da quelle di progetto, rendimenti che il calcolo non permette di determinare.

Parte II. - Sono presentati i risultati di esperimenti eseguiti su due modelli di eliche. Una corrisponde, con lievi differenze, ad un'elica di frequente impiego pratico; l'altra è stata calcolata, in base ai risultati di Goldstein, in modo da presentare la minima perdita indotta in determinate condizioni di funzionamento scelte con il criterio di rendere legittimo il confronto.

Risulta che l'elica Goldstein ha rendimenti più elevati alle elevate velocità di avanzamento mentre è generalmente inferiore nelle condizioni di involo e di salita. Per eliche in vera grandezza il campo di inferiorità si riduce, in misura non determinabile quantitativamente, in dipendenza della differente influenza del numero di Reynolds sui profili usati per i due modelli.

Il rendimento delle eliche di minima perdita indotta rimane assai elevato in una estesa zona intorno al punto di massimo; questo risultato permette di stabilire un criterio di progetto per raggiungere un buon compromesso tra le principali esigenze dell'applicazione.

PARTE I.

METODO DI CALCOLO DI UN'ELICA OTTIMA
IN RELAZIONE ALLE CONDIZIONI DI PROGETTO

1. *Elica di minima perdita indotta.* — Il calcolo di un'elica di minima perdita indotta consiste nella determinazione delle caratteristiche geometriche che danno luogo alla distribuzione di circuitazione sulla pala, e, quindi, di vorticità nella scia, corrispondente alla minima perdita indotta.

Per il calcolo occorre conoscere le velocità effettive agenti in corrispondenza di ogni sezione della pala, e, quindi, gli incrementi di velocità rispetto alle velocità apparenti.

Gli incrementi sono prodotti dai vortici di scia, che nascono dalla pala, e devono essere noti in posizione e intensità. Tali elementi sono noti, con buona approssimazione, nel caso di un'elica di minima perdita indotta per cui la scia può essere schematizzata in modo relativamente semplice.

Betz ha considerato il campo di velocità prodotto, a distanza infinita, da un'elica isolata funzionante in condizioni di minima perdita indotta; il fluido è considerato perfetto e viene trascurata l'azione mutua tra i vortici di scia.

Betz ha concluso che tale campo è uguale a quello creato dal moto di traslazione secondo l'asse di opportune superfici elicoidali, a piano direttore, di raggio uguale a quello dell'elica e indefinite nel senso del moto.

Goldstein ha considerato il moto delle superfici anzidette e calcolato la distribuzione vorticoso ad essa equivalente e il campo di velocità prodotto.

Anche nel caso di fluido perfetto, la disposizione delle linee vorticoso di scia differisce da quella considerata da Betz e Goldstein. Esse hanno infatti passo crescente con la distanza dall'elica in conseguenza dell'aumento degli incrementi. Esse sono contenute in uno spazio che solo per approssimazione si può considerare cilindrico. I vortici di scia, poichè non sono vincolati ad un sostegno fisso, per mutua influenza si avvolgono fra loro in misura crescente con la distanza dall'elica.

Nel fluido reale si hanno ancora gli effetti sui vortici della resistenza di profilo che ne modifica la posizione, e dell'attrito interno del fluido che ne riduce l'intensità man mano che si allontanano dalla loro origine.

Inoltre l'elica non funziona mai isolata, ma in presenza di un'ogiva che ne modifica, in più o meno grande misura, il campo aerodinamico.

Per il calcolo dell'elica, i risultati di Goldstein servono a determinare le velocità indotte in ogni punto della pala rappresentando schematicamente le superfici vorticosi di scia, nascenti dalle pale, mediante superfici elicoidali semindefinite in moto rigido. Nell'applicazione è tenuto conto, in assenza di resistenza, della vera posizione dei vortici inducenti più vicini all'elica, considerata isolata. Il passo e la velocità di traslazione delle superfici vorticosi sono determinate dalle velocità effettive al disco (vedi rif. 1).

L'elica di minima perdita indotta, calcolata in base ai risultati ottenuti da Goldstein, applicando il criterio determinato da Betz, verrà, in seguito, designata, per brevità, come elica Goldstein anzichè Betz-Goldstein come si ritiene più opportuno.

2. Formule di calcolo dell'elica Goldstein. — Per una prefissata forma di scia corrispondente alla minima perdita indotta, i risultati dei calcoli di Goldstein mettono in relazione in ogni punto della pala la velocità interferenziale w_1 (vedi fig. 1) con la circuitazione agente nella corrispondente sezione secondo l'espressione:

$$(1) \quad w_1 = N\Gamma/4\pi r K \sin \Phi$$

N il numero delle pale; Γ circuitazione; r raggio della sezione; K coefficiente adimensionale funzione di N , r , Φ ; Φ angolo tra la velocità risultante W_e e il disco d'elica.

I valori di K per eliche a 2, 3, 4 pale sono riportati nelle tabelle I, II, III, tratte dal rif. 2.

La velocità w_1 è normale alla velocità risultante W_e .

L'applicazione del teorema di Kutta-Joukowski, della definizione di coefficiente di portanza e delle relazioni geometriche tra le velocità permette di scrivere:

$$(2) \quad w_e = w/\omega R = \frac{NlC_p}{8\pi K R \sin \Phi \cos^2 \Phi} \left/ \left(1 + \frac{NlC_p}{8\pi r K \cos \Phi} \right) \right.$$

dove ω è la velocità angolare; R il raggio; l la corda del profilo generico; C_p il coefficiente di portanza (riferito a $\frac{1}{2} \rho W_e^2$); w è la velocità di regresso delle superfici elicoidali di scia rispetto al fluido indisturbato.

La velocità w è costante lungo il raggio.

Nel riferimento 3 è affermata, con il controllo di un calcolo numerico, la possibilità di trascurare il secondo termine a denominatore. La (2) si scrive allora:

$$(3) \quad w_c = \frac{N}{8\pi} \frac{l}{R} C_p \frac{1}{K \sin \Phi \cos^2 \Phi}.$$

La (2) oppure la (3) mettono in relazione la corda e , attraverso C_p , i calettamenti relativi dei profili che per un dato valore del coefficiente w_c danno luogo alla forma della scia prefissata.

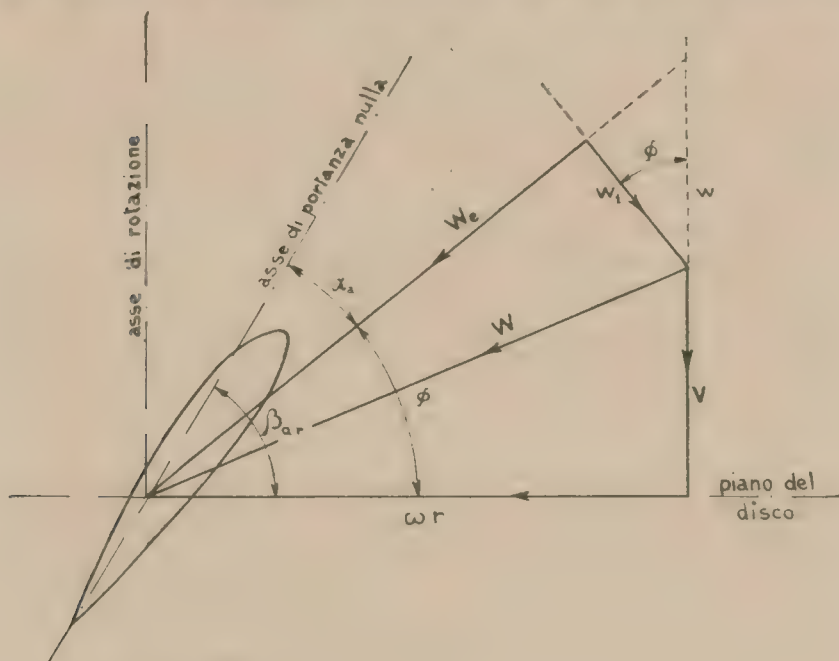


Fig. 1. Schema delle velocità per una sezione generica.

Nell'approssimazione che permette di sostituire la (3) alla (2), il coefficiente di trazione dell'elica, calcolato senza tener conto della resistenza di profilo, è proporzionale a w_c (vedi form. 9). Il fattore di proporzionalità dipende dalla configurazione di scia.

Nella (3) compare il prodotto lC_p ; è quindi possibile, entro certi limiti, fissare secondo un criterio indipendente la legge di variazione col raggio della corda oppure dell'incidenza.

Se si fissa $C_p = \text{cost}$ lungo la pala, la forma della pala è espressa dalla:

$$(4) \quad \frac{l}{R} = \frac{8\pi w_o}{N C_p} K \sin \Phi \cos^2 \Phi = C_1 K \sin \Phi \cos^2 \Phi.$$

Se i coefficienti di portanza dei profili in funzione dell'incidenza aerodinamica sono rappresentati, almeno nell'intervallo della linearità, da un unico diagramma, l'elica realizza la scia prevista in tutto un intervallo di calettamenti.

Tale risultato si ottiene fissando i calettamenti relativi in modo che, per una posizione fondamentale, gli assi di portanza nulla dei profili siano tangenti alle superfici elicoidali di scia.

Per i calettamenti superiori a quello fondamentale, si ha sempre una condizione di funzionamento per cui la scia ha la forma prevista in progetto e le incidenze e quindi le portanze di tutti i profili della pala sono uguali.

Nel § 3 verrà discusso il metodo per la scelta della posizione fondamentale più opportuna.

Per determinare l'elica, anzichè fissare il valore del coefficiente di trazione (w_c) e del calettamento a cui è prodotta tale trazione (C_p), può essere fissato il valore della corda in una particolare sezione distinta con l'indice 0.

Il valore di C_1 nella (4) è allora espresso da:

$$(5) \quad C_1 = (l/R)_0 / (K \sin \Phi \cos^2 \Phi)_0.$$

I rapporti di funzionamento di minima perdita indotta sono espressi da:

$$(6) \quad V/\omega R = \operatorname{tg} \Phi_R - w_c \quad \operatorname{tg} \Phi_R = \gamma_{eff}.$$

γ_{eff} rapporto di funzionamento effettivo; V velocità dell'aereo; Φ_R valore di Φ all'estremità della pala.

Dalla (4):

$$(7) \quad w_c = C_1 N C_p / 8\pi.$$

Nell'intervallo della linearità:

$$(8) \quad C_p = C' a_a$$

C' coefficiente angolare di portanza per allungamento infinito; a_a incidenza aerodinamica.

Il coefficiente di trazione τ , se si tiene conto della sola componente di portanza, è espresso da:

$$(9) \quad \tau = 2\pi w_c \int_0^1 K \sin 2\Phi \cdot (r/R)^2 d(r/R) = C'_2 w_c \quad \tau = T \rho \omega^2 R^4$$

T trazione; ρ densità del fluido.

Se l'elica presenta minima perdita indotta in tutto un intervallo di calettamenti, la retta luogo dei punti di funzionamento in tali condizioni è definita, sul diagramma $\tau - \gamma$, dalla:

$$(10) \quad \gamma = \gamma_{eff} - \tau/C_2.$$

In fig. 2 è presentato il diagramma di C_2 in funzione di γ_{eff}

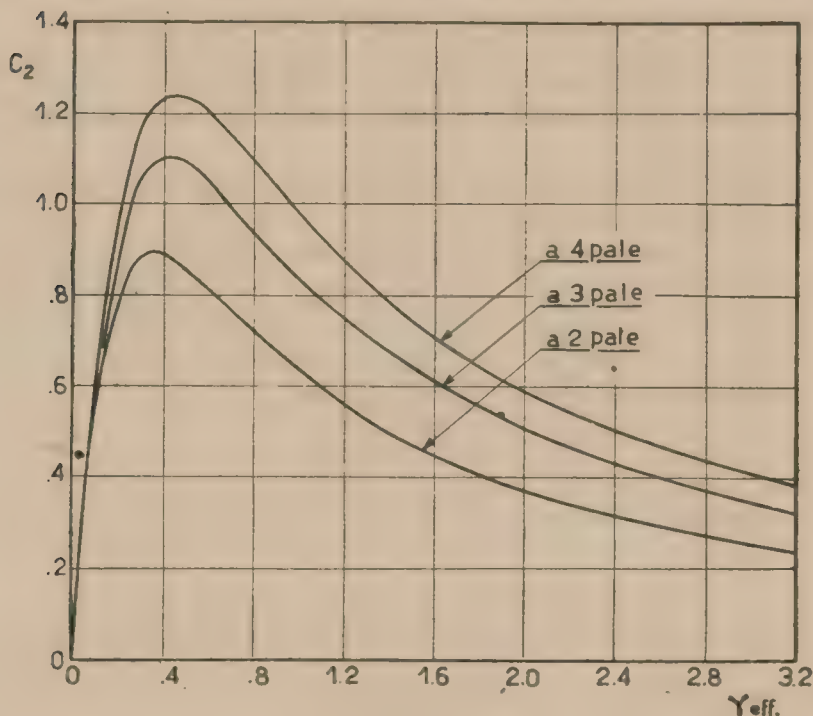


Fig. 2. Elica Goldstein.

Coefficiente C_2 in funzione del rapporto di funzionamento effettivo.

Dalla formula 9) del paragrafo 2)

$$C_2 = 2\pi \int_0^1 K \sin 2\Phi \cdot \left(\frac{r}{R}\right)^2 d\left(\frac{r}{R}\right) \quad \tau = C_2 w_c$$

per eliche a 2, 3, 4 pale. Nella tabella IV sono riportati i valori calcolati mediante integrazione grafica (form. 9).

3. *Rendimento di un'elica Goldstein e criterio di calcolo dell'elica di massimo rendimento corrispondente alle condizioni di progetto.*

Il rendimento di un'elica qualsiasi è espresso da:

$$(11) \quad \eta = 1/(1 + P_i/P_u + P_r/P_u)$$

P_u potenza utile; P_i potenza indotta nel fluido; P_r potenza perduta a causa della resistenza di profilo (perdita organica).

Per un elemento di pala:

$$dP_u = dT V \quad dP_i = dT w \quad dP_r = C_r \frac{1}{2} \rho l dr W_e^3$$

$$dT = C_p \cos \Phi \frac{1}{2} \rho l dr W_e^2 \text{ tenendo conto della sola portanza.}$$

Il rendimento di un elemento è:

$$(12) \quad \eta_1 = 1 / \left(1 + \frac{w}{V} + \frac{C_r}{C_p} \frac{1}{\cos \Phi} \frac{W_e}{V} \right)$$

e poichè:

$$W_e/V = \frac{1}{\gamma} (r/R) \frac{1}{\cos \Phi} - \frac{w_e}{\gamma} \sin \Phi$$

e per un'elica Goldstein:

$$w/V = w_e/\gamma = \tau C_2 \gamma \quad \tan \Phi = \gamma_{eff} \frac{1}{(r/R)}$$

la (12) si scrive per un'elica Goldstein:

$$(13) \quad \eta_1 = 1 / \left(1 + \frac{\tau}{C_2 \gamma} + \frac{C_r}{C_p} \left[\frac{1}{\gamma} \left(\frac{r}{R} \right) \frac{1}{\cos^2 \Phi} - \frac{w_e}{\gamma} \gamma_{eff} \frac{1}{(r/R)} \right] \right).$$

Il termine $\tau C_2 \gamma$, che rappresenta la perdita indotta, è costante lungo la pala.

Il termine:

$$(14) \quad dP_r / dP_u = \frac{C_r}{C_p} \left[\frac{1}{\gamma} \left(\frac{r}{R} \right) \frac{1}{\cos^2 \Phi} - \frac{w_e}{\gamma} \gamma_{eff} \frac{1}{(r/R)} \right]$$

rappresenta la perdita organica, dovuta alla resistenza di profilo. Essa dipende dalle caratteristiche del profilo per il fattore $C_r C_p$. Dei due termini che compongono l'altro fattore, il primo ha importanza predominante se non nel caso di un'elica eccezionalmente caricata; esso dipende dal rapporto di funzionamento γ , dalla posizione dell'elemento considerato, dal rapporto di funzionamento effettivo γ_{eff} e dalla posizione per il fattore $1/\cos^2 \Phi$.

Le migliori condizioni di funzionamento, in relazione ai dati e ai vincoli di progetto, sono determinate dal valore minimo della somma delle perdite. La perdita indotta è uguale per l'elemento e per l'elica; è quindi immediatamente calcolata. La perdita organica deve essere invece calcolata come media ponderata rispetto alla potenza utile, delle perdite elementari.

L'espressione per il calcolo è:

$$(15) \quad \frac{P_r}{P_u} = \frac{1}{P_u} \int \frac{dP_r}{dP_u} dP_u.$$

Mediante l'applicazione della (14) e, avendo presente che:

$$\frac{dP_u}{P_u} = \frac{dT}{T} = \frac{d\tau}{\tau},$$

della (9), la (15) diventa:

$$(16) \quad \frac{P_r}{P_u} = \frac{1}{\gamma} \frac{2\pi}{C_2} \int_0^1 \frac{C_r}{C_p} \left[\left(\frac{r}{R} \right) \frac{1}{\cos^2 \Phi} - \right. \\ \left. - w_c \gamma_{eff} \frac{1}{(r/R)} \right] K \sin 2\Phi \left(\frac{r}{R} \right)^2 d\left(\frac{r}{R} \right).$$

Per trazione nulla ($w_c = 0$, $\gamma = \gamma_{eff}$), poichè $\frac{r}{R} \tan \Phi = \gamma_{eff}$ la (16) diventa:

$$(17) \quad \frac{P_r}{P_u} = \frac{4\pi}{C_2} \int_0^1 \frac{C_r}{C_p} K \left(\frac{r}{R} \right)^2 d\left(\frac{r}{R} \right) \quad \text{per trazione nulla.}$$

Il confronto dei calcoli eseguiti con la (14) e la (16) o, per approssimazione, la (17) permette di determinare quella, che verrà indicata come *sezione rappresentativa*, per cui la perdita elementare è uguale a quella dell'elica.

Il risultato è utile a rendere più spedita la determinazione delle condizioni più opportune di calcolo dell'elica mediante l'applicazione della (13) alla *sezione rappresentativa*.

Un calcolo è stato sviluppato nel caso di un'elica tripala per trazione nulla, $\gamma_{eff} = 0.468$ (γ_{eff} corrispondente all'elica di cui è riferito nella parte II) e $C_r/C_p = \text{cost.}$ lungo la pala. Risulta:

$$\frac{P_r}{P_u} = 2,21 \frac{C_r}{C_p} \text{ dalla (17)}$$

$$\frac{dP_r}{dP_u} = 2,17 \frac{C_r}{C_p} \text{ dalla (14) applicata alla sezione a } 0,7 R.$$

L'esempio consente di considerare, in assenza di calcoli più completi, la sezione a $0,7 R$ come rappresentativa. Tale criterio è stato adottato nei successivi esempi numerici.

I dati in base ai quali è calcolata l'elica sono: quota, trazione e velocità.

I valori di γ_{eff} e C_2 risultano determinando per tentativi l'uguaglianza del valore di τ della colonna 5, calcolato dalla (10), con quello imposto dalle condizioni di progetto (colonna 2).

Nei casi *a*) e *b*) verranno tracciati i diagrammi delle perdite totali in funzione di γ_{eff} .

L'elica ottima corrispondente alle condizioni di progetto viene calcolata per il valore di γ_{eff} di minima perdita totale. Nel caso *c*)

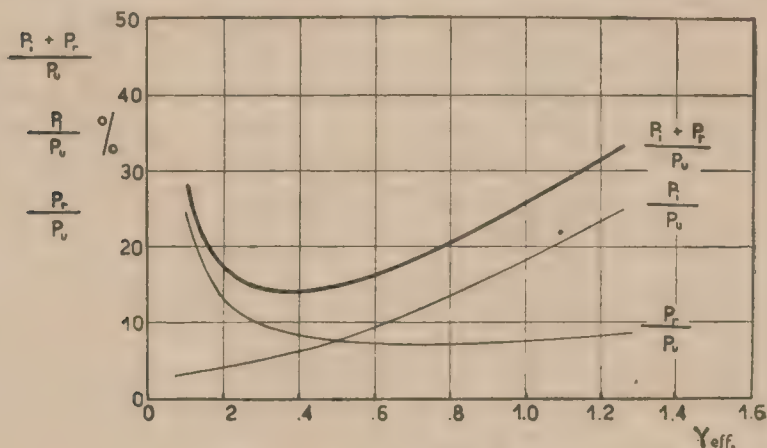


Fig. 3. Elica Goldstein tripale.

Esempio numerico di calcolo delle perdite di potenza.

Dati di progetto: trazione, quota, velocità, raggio dell'elica:

$$\frac{\tau}{\gamma^2} = \frac{T}{\rho V^2 R^2} = 0,178 \quad \frac{C_p}{C_r} = 30;$$

P_i potenza indotta nel fluido; P_r potenza perduta per la resistenza di profilo ($\frac{P_r}{P_u}$ è calcolato per l'elemento a $0,70 R$); P_u potenza utile.

γ_{eff} è già vincolato dalle condizioni di progetto. Il calcolo viene condotto a termine mediante la (9) e la (3) con la condizione che i profili lavorino all'incidenza di massima efficienza.

Interessa osservare che se l'elica è disegnata in modo da presentare minima perdita indotta lungo una retta luogo corrispondente a $\gamma_{eff} = \text{costante}$ (vedi § 2 capoversi seguenti la form. 4), il massimo rendimento della famiglia non si ha per le condizioni ottime corrispondenti ai dati di progetto, ma per un rapporto di funzionamento superiore sulla retta luogo. Infatti dalla (13)

risulta che la perdita indotta diminuisce direttamente con $\frac{\tau}{\gamma}$ mentre in un certo intervallo la perdita dovuta alla resistenza di

profilo rimane quasi immutata se l'elica è calcolata per il minimo di $\frac{C_r}{C_p}$ il cui fattore è pure decrescente.

Nelle figure 3, 4 è presentato il risultato di un calcolo numerico per $\tau = 0,034$; $\gamma = 0,437$; $\frac{C_p}{C_r} = 30$ avendo posto fra i dati di progetto il raggio (fig. 3), il numero di giri (fig. 4). Il calcolo è stato eseguito mediante le (18), (19) applicate alla sezione a $0,70R$.

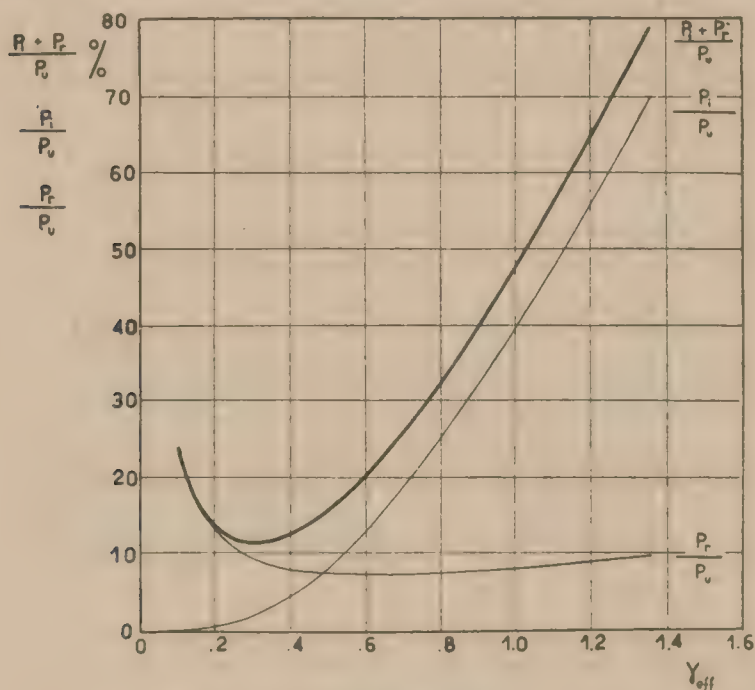


Fig. 4. Elica Goldstein tripale.

Esempio numerico di calcolo delle perdite di potenza.

Dati di progetto: trazione, velocità angolare dell'elica, quota, velocità:

$$\frac{\tau}{\gamma^4} = \frac{T\omega^2}{\rho V^4} = 0,930 \quad \frac{C_p}{C_r} = 30$$

P_i potenza indotta nel fluido; P_r potenza perduta per la resistenza di profilo ($\frac{P_r}{P_u}$ è calcolato per l'elemento a $0,70R$); P_u potenza utile.

I valori di τ , γ , $\frac{C_p}{C_r}$, scelti per l'esempio, sono quelli di massimo rendimento, determinati sperimentalmente, sull'elica Goldstein di cui è riferito nella parte II.

L'esempio mette in luce l'importanza di una buona utilizzazione della libertà di scelta consentita dalle condizioni di progetto.

Il minimo di $\frac{dP_r}{dP_u}$ (vedi form. 14) per la sezione a $0,7 R$, calcolato per $\tau = 0$, è raggiunto per $\gamma_{eff} = 0,7$ (vedi fig. 5). La posizione del minimo è molto poco influenzata dal valore di τ (vedi

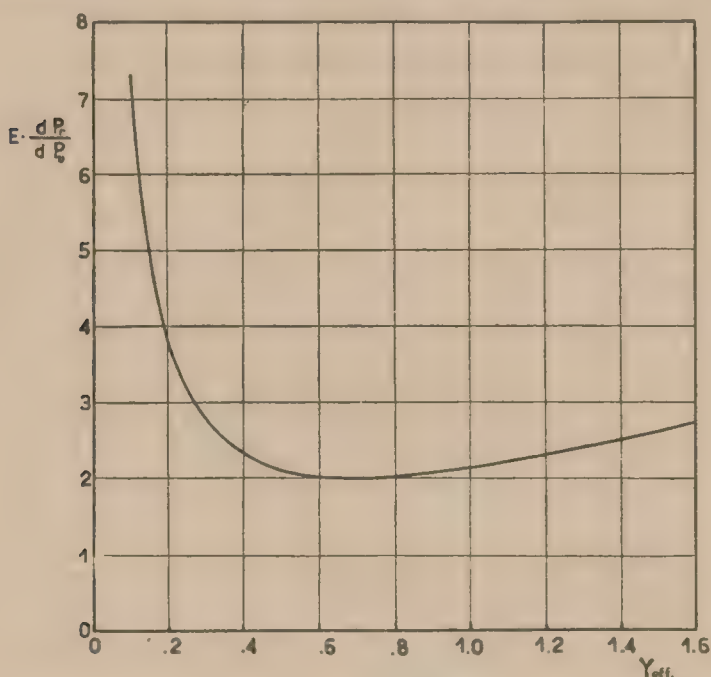


Fig. 5. Elica Goldstein.

Perdita dovuta alla resistenza di profilo (organica) nella sezione a $0,70 R$ calcolata per trazione nulla (vedi form. 14 per $\gamma = \gamma_{eff}$, $w = 0$)

$E = \frac{C_p}{C_r}$; C_p , (C_r) coeff. di portanza (resistenza) del profilo; P_r perdita organica di potenza; P_u potenza utile.

esempio per elica tripala di figg. 3 e 4); perciò, nei limiti in cui la perdita nella sezione a $0,70 R$ rappresenta la perdita totale, per qualsiasi elica il valore di γ_{eff} più opportuno è sempre inferiore a $0,7$. Tale valore si può considerare il valore limite di γ_{eff} per il disegno di eliche pochissimo caricate.

Il buon funzionamento dell'elica interessa anche per condizioni di volo diverse da quella di progetto; in particolare per l'involo e la salita.

È perciò opportuno studiare il comportamento dell'elica per tali condizioni e eventualmente accettare una lieve perdita di

rendimento, rispetto al massimo ottenibile con i dati di progetto, per ottenere migliori risultati nelle altre condizioni che interessano.

Lo studio può essere tentato per via di calcolo mediante metodi più o meno approssimati: teoria dell'elica a infinito numero di pale, risultati di Goldstein applicati, come nel riferimento 2, in condizioni non di minima perdita indotta, metodo di Sandi-Kawada (rif. 4).

La precisione di tutti questi metodi diminuisce con il crescere degli incrementi.

Un risultato sicuro si otterrà per mezzo di esperimenti su di un ristretto numero di modelli convenientemente scelti.

PARTE I. — RIFERIMENTI

Rif. 1. C. N. H. LOCK, *The application of Goldstein's theory to the practical design of Airscrews*. — Reports and Memoranda N. 1377. A. R. C. 1931-32.

Rif. 2. C. N. H. LOCK and D. YEATMAN, *Tables for use in an improved method of Airscrews strip theory calculation*. Reports and Memoranda N. 1674. A. R. C. 1935-36.

Rif. 3. C. N. H. LOCK and H. BATEMAN, *Wind tunnel tests of high pitch airscrews*. Appendix. Reports and. Memoranda N. 1729. A. R. C. 1936.

Rif. 4. C. FERRARI, A. GHIZZETTI, C. POSSIO, *Determinazione della legge di distribuzione della circolazione lungo il raggio per un'elica data col metodo di Sandi-Kawada*, in questo volume p. 139; estratto Torino 1944.

TAB. I. — Valori di K per eliche bipale (indicati con α nel rif. 2).

r/R	0.3	0.45	0.6	0.7	0.75	0.8	0.85	0.9	0.95
sen ϕ									
0.05	1.000	1.000	1.000	0.999	0.997	0.994	0.985	0.950	0.780
0.1	1.000	0.998	0.997	0.988	0.971	0.937	0.877	0.773	0.586
0.2	0.994	0.991	0.961	0.901	0.852	0.784	0.694	0.578	0.415
0.3	0.978	0.959	0.874	0.774	0.709	0.634	0.548	0.444	0.308
0.4	0.958	0.906	0.783	0.663	0.595	0.520	0.442	0.351	0.243
0.5	0.944	0.848	0.690	0.564	0.501	0.434	0.367	0.289	0.199
0.6	0.930	0.784	0.608	0.492	0.435	0.376	0.316	0.249	0.171
0.7	0.922	0.722	0.547	0.441	0.387	0.333	0.278	0.218	0.149
0.8	0.916	0.677	0.502	0.398	0.347	0.297	0.247	0.193	0.131
0.9	0.935	0.657	0.464	0.360	0.311	0.265	0.220	0.172	0.117
1.0	1.012	0.633	0.425	0.325	0.279	0.238	0.197	0.154	0.105

TAB. II. — Valori di K per eliche tripale (indicati con α nel rif. 2).

r/R sen Φ	0.3	0.45	0.6	0.7	0.75	0.8	0.85	0.9	0.95
0.05	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.998	0.990	0.973	0.863
0.1	1.000	0.999	0.999	0.998	0.994	0.980	0.948	0.872	0.692
0.2	0.997	0.995	0.988	0.964	0.935	0.884	0.810	0.693	0.512
0.3	0.992	0.987	0.955	0.892	0.843	0.774	0.684	0.566	0.406
0.4	0.984	0.966	0.902	0.809	0.746	0.670	0.581	0.471	0.331
0.5	0.975	0.940	0.836	0.725	0.658	0.581	0.496	0.396	0.275
0.6	0.973	0.909	0.771	0.650	0.582	0.508	0.429	0.341	0.236
0.7	0.983	0.880	0.714	0.586	0.520	0.450	0.377	0.299	0.203
0.8	1.010	0.849	0.661	0.533	0.470	0.404	0.337	0.265	0.182
0.9	1.061	0.831	0.622	0.494	0.429	0.367	0.304	0.239	0.164
1.0	1.185	0.832	0.588	0.457	0.393	0.335	0.278	0.218	0.149

TAB. III. — Valori di K per eliche quadripale (indic. con α nel rif. 2).

r/R sen Φ	0.3	0.45	0.6	0.7	0.75	0.8	0.85	0.9	0.95
0.05	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.998	0.995	0.945
0.1	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.993	0.985	0.943	0.770
0.2	0.998	0.997	0.995	0.989	0.973	0.940	0.882	0.777	0.590
0.3	0.996	0.994	0.984	0.945	0.909	0.852	0.774	0.651	0.476
0.4	0.991	0.984	0.950	0.883	0.830	0.759	0.671	0.554	0.396
0.5	0.985	0.971	0.905	0.812	0.750	0.674	0.585	0.476	0.334
0.6	0.986	0.954	0.855	0.745	0.678	0.601	0.517	0.414	0.290
0.7	0.999	0.939	0.803	0.682	0.615	0.541	0.459	0.369	0.255
0.8	1.035	0.924	0.756	0.627	0.562	0.490	0.413	0.329	0.228
0.9	1.103	0.917	0.713	0.581	0.516	0.447	0.375	0.298	0.205
1.0	1.256	0.923	0.681	0.543	0.477	0.412	0.345	0.272	0.187

TAB. IV. — Valori di C_2 per eliche a 2, 3, 4 pale.

$$C_2 = 2\pi \int_0^1 K \sin 2\Phi (r/R)^2 d(r/R) \quad \text{form. 9 § 2}$$

Rapporto di funzionamento effettivo $\gamma_{\text{eff}} = \text{tg } \Phi_R$		.100	.300	.468	.700	1.000	1.600	2.000	3.000
Numero delle pale	2	.516	.880	.859	.768	.634	.454	.370	.255
	3	.539	1.057	1.096	.994	.834	.602	.501	.346
	4	.555	1.146	1.234	1.151	.980	.714	.586	.408

PARTE II.

CONFRONTO SPERIMENTALE TRA UN'ELICA DI MINIMA PERDITA INDOTTA E UN'ELICA DI TIPO NORMALE

1. *Premessa.* — L'applicazione dei risultati di Goldstein permette di calcolare un'elica di minima perdita indotta per fornire una determinata trazione ad un rapporto di funzionamento fissato. Nella Parte I sono discusse le approssimazioni fisiche accettate nel calcolo e il procedimento di calcolo. Con alcune ipotesi semplificative, precisate al § 2 della Parte I, l'elica può essere disegnata in modo da presentare minima perdita indotta per tutto un intervallo di valori del calettamento e del rapporto di funzionamento.

Per condizioni di funzionamento differenti, la teoria di Goldstein non permette di calcolare esattamente le caratteristiche dell'elica. L'impiego interessa tutta una serie di valori del coefficiente di coppia e di rapporto di funzionamento; particolarmente importanti sono le condizioni di: involo, salita, volo economico e velocità massima.

Per decidere l'opportunità di applicare un'elica di minima perdita indotta è perciò necessario confrontarne le caratteristiche con un'elica di riferimento. A tale scopo sono state eseguite presso il Laboratorio di Aeronautica del R. Politecnico di Torino le esperienze sulle quali qui si riferisce.

L'autore desidera esprimere un vivo ringraziamento all'Ingegnere Fermi che ha con lui collaborato nella preparazione e nell'esecuzione degli esperimenti, e nella elaborazione dei risultati.

2. *Apparecchiatura e metodo di prova.* — Le prove sono state eseguite sulla torretta per eliche controrotanti descritta nel rif. 1. È stata utilizzata la trasmissione all'elica posteriore.

Il campo di misura dell'apparecchiatura sperimentale è stato utilizzato entro i seguenti limiti massimi:

velocità del vento	65 m/s
numero di giri	2500 giri/l'
coppia	1800 Kgmm

La velocità di prova è stata regolata in base alla seguente tabella:

calettamento a $0,75 R \beta =$	10°	20°	30°	40°	50°	55°	60°
numero di giri al minuto =	2500	2450	2200	1800	1500	1400	1250
						1200	990

Per ogni calettamento il numero di giri è stato mantenuto costante fino al rapporto di funzionamento corrispondente alla massima velocità del vento; i valori superiori sono stati ottenuti mantenendo costante la velocità e riducendo i giri.

3. *Espressione dei risultati.* — I risultati sono espressi sotto forma dei seguenti coefficienti:

$$\text{coefficiente di trazione } \tau = \frac{T - \Delta_i R_t}{\rho \omega^2 R^4} = \frac{F + R_t}{\rho \omega^2 R^4}.$$

T trazione dell'elica; $\Delta_i R_t$ variazione di resistenza aerodinamica della torretta per effetto d'interferenza dell'elica; F trazione lorda con la torretta; R_t resistenza aerodinamica della torretta isolata; ρ densità del fluido; ω velocità angolare; R raggio dell'elica.

$$\text{coefficiente di coppia } \kappa = C/\rho \omega^2 R^5$$

$$\text{rapporto di funzionamento } \gamma = V/\omega R$$

$$\text{rendimento } \eta = (T - \Delta_i R_t)V/C\omega.$$

Sono stati tracciati i diagrammi τ , κ , η in funzione di γ . Allo scopo di renderè facile la scelta dell'elica in relazione alle condizioni di progetto i diagrammi della κ sono stati anche riferiti ai coefficienti:

$\gamma \kappa^{1/3} = \sqrt[3]{\rho V^3 R^2 P}$ noto in base ai dati di: quota, velocità dell'aereo, raggio dell'elica, potenza del motore;

$\gamma/\kappa^{1/5} = \sqrt[5]{\rho V^5/P\omega^2}$ noto in base ai dati di: quota, velocità dell'aereo, potenza del motore, numero di giri dell'elica.

4. *Errori e precisione.* — Si considerano i seguenti errori massimi di carattere sistematico:

a) sulla determinazione della resistenza aerodinamica della torretta $\Delta R_t = \pm 0,003 \times 10^{-3} V^2 Kg$;

b) nell'azzeramento iniziale della bilancia di trazione $\Delta F = \pm 10 \times 10^{-3} Kg$;

c) nella misura della coppia. Gli errori in tale misura sono discussi in dettaglio nel rif. 2.

L'esame dell'apparecchiatura e l'analisi della dispersione dei punti sperimentali, porta ad assumere come probabili i seguenti

valori massimi dei principali errori strumentali di carattere accidentale:

- d) nella misura dei giri $\Delta n = \pm 10 \text{ giri/1'}$;
- e) nella pesata lorda di trazione $\Delta F = \pm 10 \times 10^{-3} \text{ Kg}$;
- f) nella misura della velocità $\Delta V = \pm 0,004 V$;
- g) nella misura della coppia $\Delta C = \pm 10 \times 10^{-3} \text{ Kgm}$.

L'errore $1C$ riscontrato negli attuali esperimenti è risultato minore di quello di $25 \times 10^{-3} \text{ Kgm}$ previsto in base agli esperimenti di taratura.

Gli errori risultanti variano in dipendenza di τ , z , γ e del numero di giri. Varia quindi da punto a punto la precisione delle

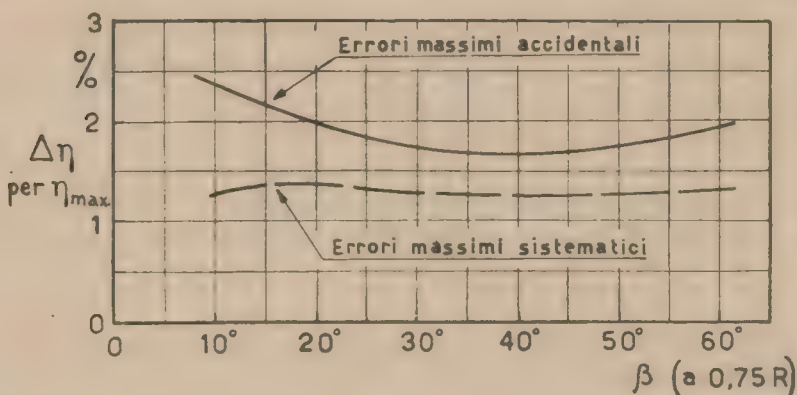


Fig. 1. — Errori massimi sui massimi rendimenti dell'elica Normale calcolati in base agli errori strumentali.

interpolazioni. In relazione alle modalità di prova, la dispersione dei punti sperimentali sulle linee τ , z in funzione di γ cresce con il calettamento.

A titolo di esempio, è riportato in fig. 1 il risultato del calcolo degli errori massimi sui massimi rendimenti per l'elica normale. Nel calcolo degli errori sistematici, non è stato considerato l'errore nell'azzeramento iniziale della bilancia di trazione. Esso può avere segni differenti a diversi calettamenti e dar quindi luogo a un errore sistematico relativo che, nell'esempio della figura, non supera $0,60 \times 10^{-2}$.

5. *Modelli.* — È stata scelta come termine di confronto l'elica NACA 5868-9 con profili Clark Y, tripale. Essa è stata disegnata,

con lieve riduzione di spessore nelle sezioni più vicine al mozzo, in base ai grafici del rif. 2.

Per la legittimità del confronto, occorre disegnare l'elica Goldstein in modo che entrambe le eliche presentino il massimo rendimento e forniscano la stessa trazione per il medesimo valore del rapporto di funzionamento.

Tale condizione non è precisabile esattamente in sede di progetto; è sufficiente, d'altra parte, che sia approssimativamente soddisfatta.

I profili adottati per l'elica Goldstein appartengono alla serie NACA 2400. Le caratteristiche aerodinamiche che ora interessano sono presentate in tab. I per il numero di Reynolds effettivo $R_e = 8,3 \times 10^6$.

I numeri di Reynolds di funzionamento dei profili sull'elica sono notevolmente inferiori (vedi tab. III) e variano da profilo a profilo. Le caratteristiche per alcuni valori di R_e sono note solo per il profilo 2412 (vedi tab. II).

Data la non grande influenza dovuta alla variazione in spessore e nel numero di Reynolds, e in mancanza di una documentazione sperimentale più completa, si è considerato che i valori di α_0 e $\frac{dC_p}{d\alpha}$ siano uguali per tutti i profili.

L'elica Goldstein, essa pure tripale, è stata calcolata in modo da presentare la minima perdita indotta per il rapporto di funzionamento effettivo $\gamma_{eff} = \text{tg} \Phi_R = 0,432$.

La pala è stata disegnata in base alla (4) del § 2 della Parte I assumendo per la sezione a $0,7 R$ la medesima larghezza dell'elica di riferimento.

I modelli furono costruiti del diametro di 800 mm per essere provati sulla torretta per eliche singole. Allo scopo di utilizzare una maggior precisione sperimentale nella misura della coppia, gli esperimenti vennero invece eseguiti sulla nuova torretta per eliche controrotanti (rif. 1); si dovette perciò portare il diametro dei modelli a 818 mm.

Viene designata come Normale l'elica derivata dalla NACA 5868-9.

La Goldstein disegnata per $\gamma_{eff} = 0,432$, per effetto della modificazione del diametro, viene a corrispondere con molta esattezza all'elica di minima perdita indotta per $\gamma_{eff} = 0,468$.

Il corrispondente passo delle superfici di scia (passo aerodinamico dell'elica) è $p_a/D = 1,470$.

In fig. 2 e in tab. IV sono messe a confronto le principali caratteristiche delle pale.

Sul diagramma $\tau - \gamma$ di fig. 3 relativo all'elica Goldstein, è tracciato il luogo dei punti, che, nei limiti di approssimazione dei

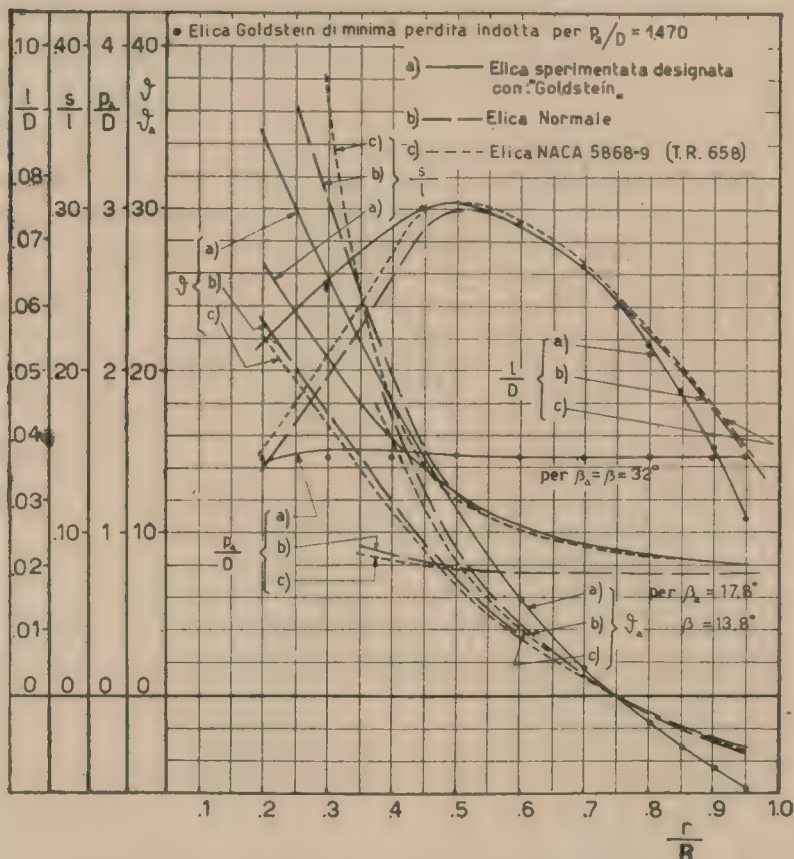


Fig. 2. — Caratteristiche geometriche delle pale (vedi tab. IV).

[Per il profilo: l corda, s spessore massimo, r distanza dall'asse di rotazione, p_a passo aerodinamico, θ_a (θ) calettamento aerodinamico (geometrico) relativo alla sezione a $0,75 R$, β_a (β) calettamento aerodinamico (geometrico) della sezione a $0,75 R$; $D = 2 R$ diametro dell'elica].

calcoli, rappresentano le condizioni di funzionamento di minima perdita indotta.

Il luogo è il segmento della retta:

$$\gamma = 0,468 - 0,913\tau \quad [\text{dalla (10), § 2, Parte I},$$

limitato dalle intersezioni con $\tau = 0$ e, per approssimazione, dalla $\tau = \tau_{\text{critico}}$, a cui la maggiore parte dei profili ha superato il

coefficiente di portanza massimo. Il segmento è punteggiato con la incidenza aerodinamica α_n avendo assunto come pendenza comune delle rette di portanza dei profili $dC_p/d\alpha_n = 0,100$ (α_n in gradi).

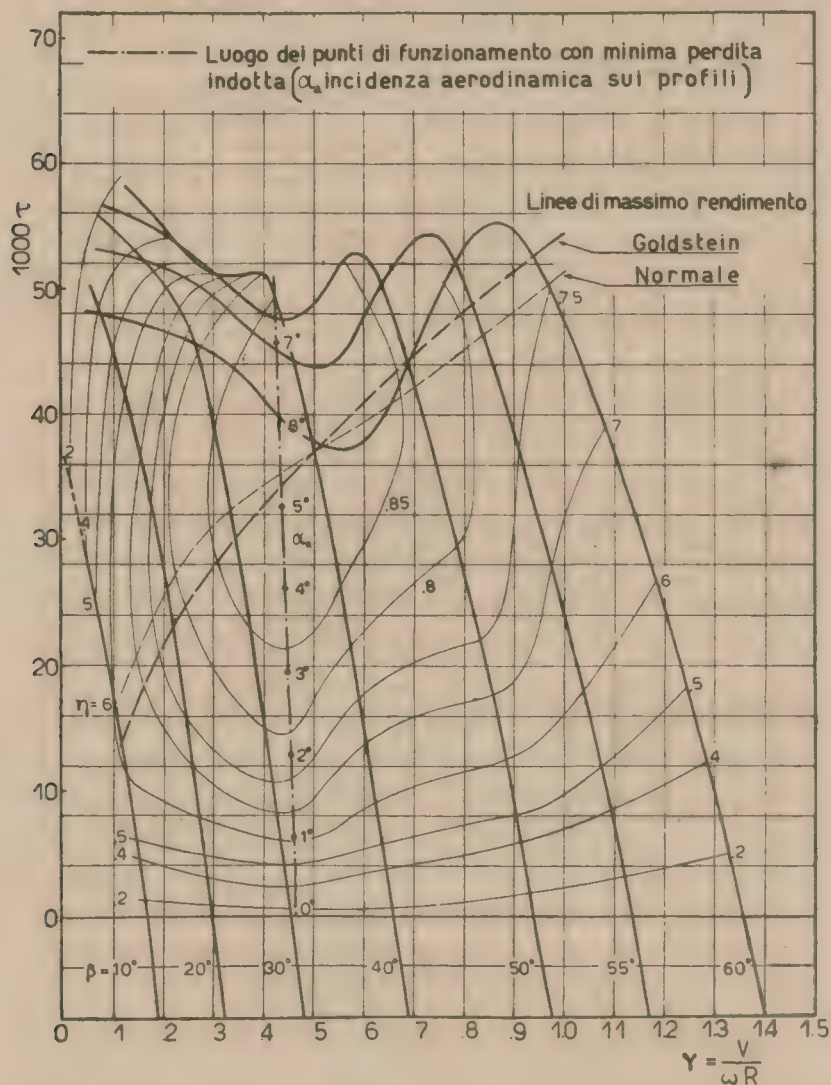


Fig. 3. Elica Goldstein.

Diagrammi dei coefficienti di trazione in funzione del rapporto di funzionamento con le linee di uguale rendimento. — Confronto delle linee di massimo rendimento dell'elica Goldstein e della Normale.

In fig. 3 sono ancora tracciate le linee di massimo rendimento dell'elica Goldstein e della Normale; tali linee sono

tracciate in base ad una larga interpolazione dei risultati sperimentali.

Risulta che la condizione, precedentemente detta, per la legittimità del confronto, si può considerare sufficientemente soddisfatta.

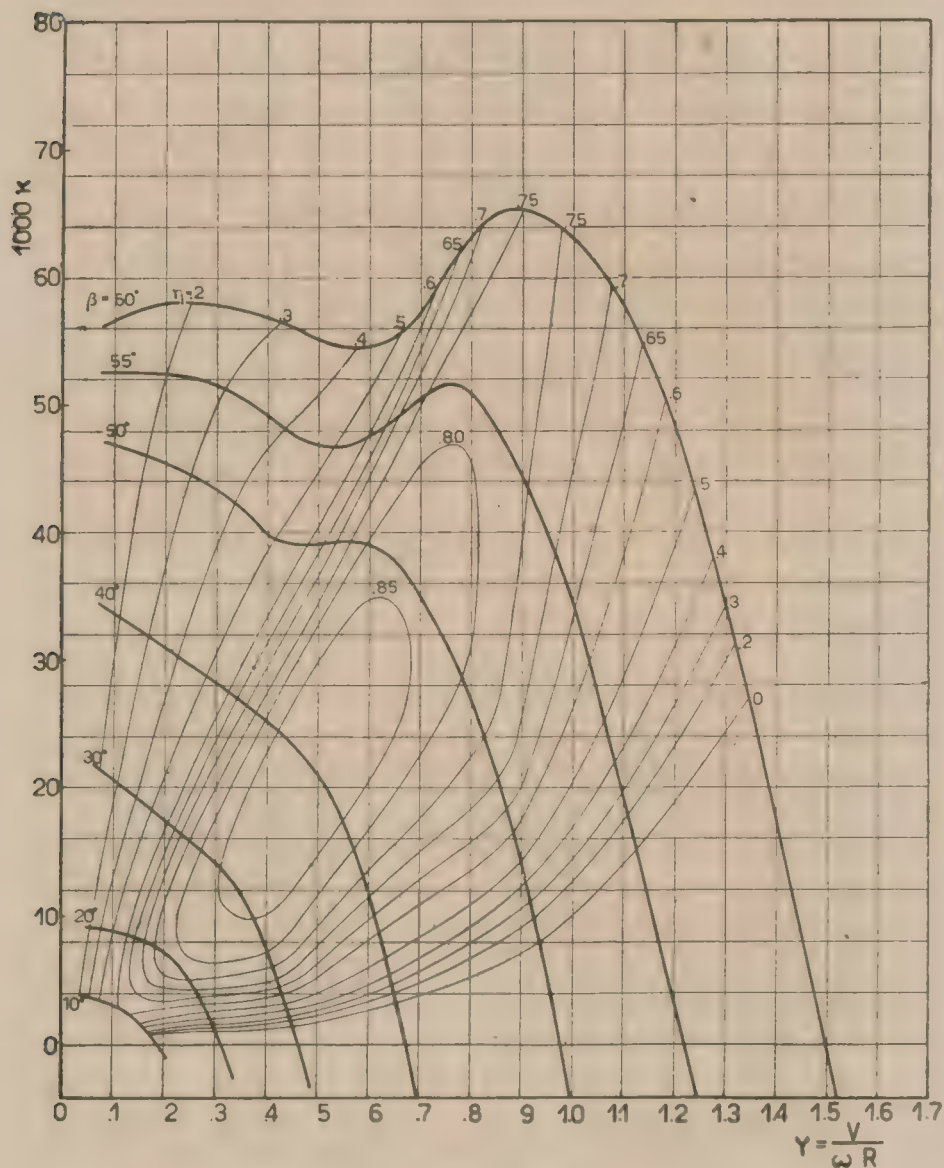


Fig. 4. Elica Goldstein.

Diagrammi dei coefficienti di coppia in funzione del rapporto di funzionamento con le linee di uguale rendimento.

Il luogo dei punti di minima perdita indotta, mediante interpolazione con le linee $\beta = \text{cost}$ e $\eta = \text{cost}$, è riportato in fig. 9 sul diagramma $\kappa - \gamma$.

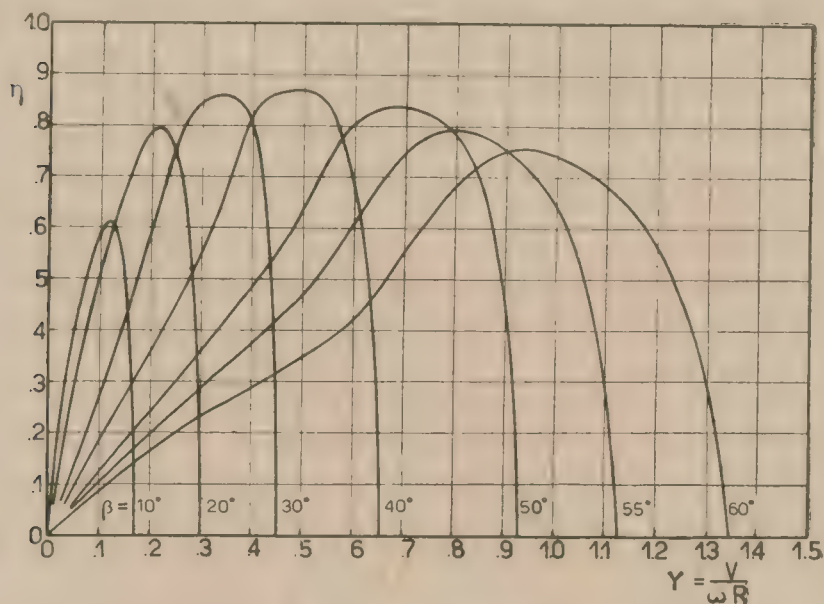


Fig. 5. Elica Goldstein.

Diagrammi dei rendimenti in funzione del rapporto di funzionamento.

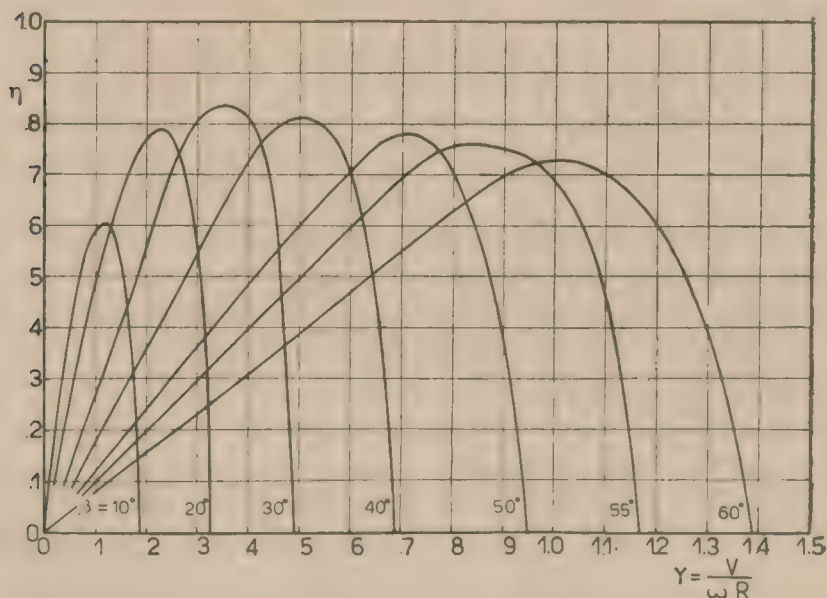


Fig. 6. Elica Normale.

Diagrammi dei rendimenti in funzione del rapporto di funzionamento.

6. *Risultati.* — Le caratteristiche, determinate negli esperimenti, sono presentate nella tab. V e figg. 3, 4, 5 per l'elica Goldstein, e tab. VI e figg. 6, 7, 8 per la Normale.

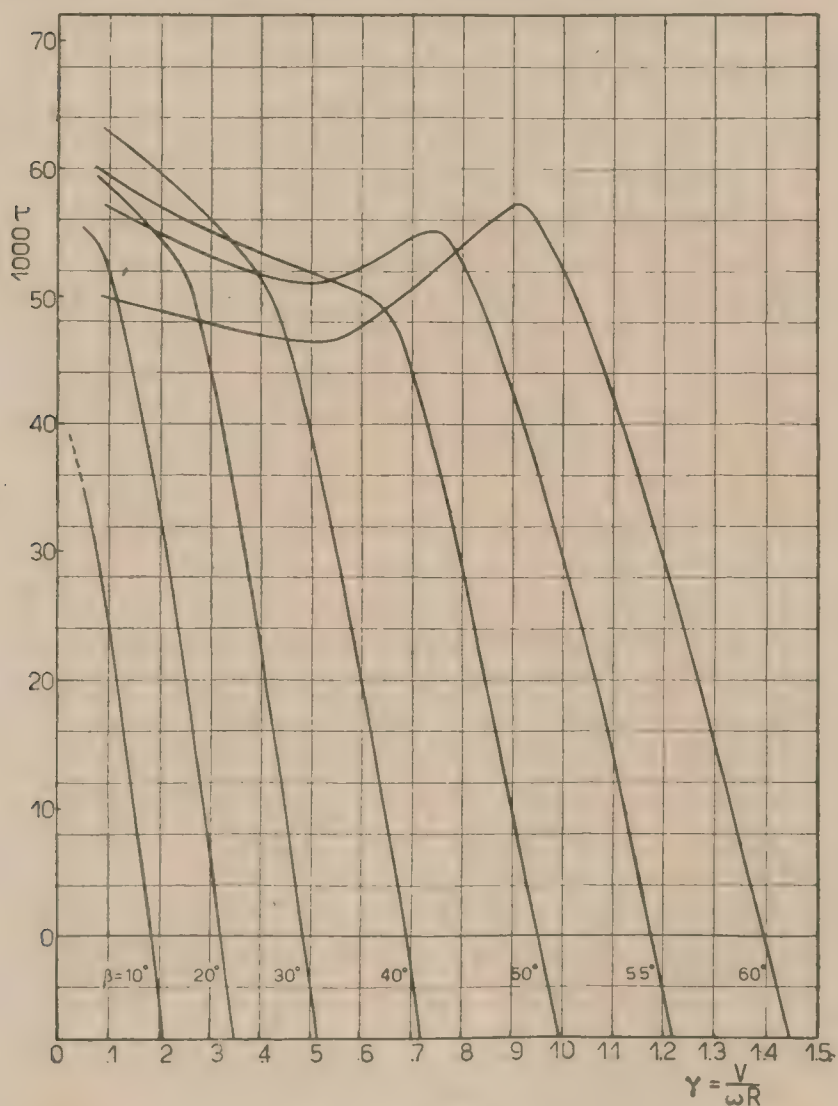


Fig. 7. Elica Normale.

Diagrammi dei coefficienti di trazione in funzione del rapporto di funzionamento.

I risultati sono presentati nelle figure da 9 a 13 in modo da permettere il confronto fra i due tipi di eliche unicamente in base al criterio di scelta stabilito nel progetto.

I dati di progetto per la scelta dell'elica sono: la velocità di volo, la quota, la trazione necessaria. Invece della trazione, si

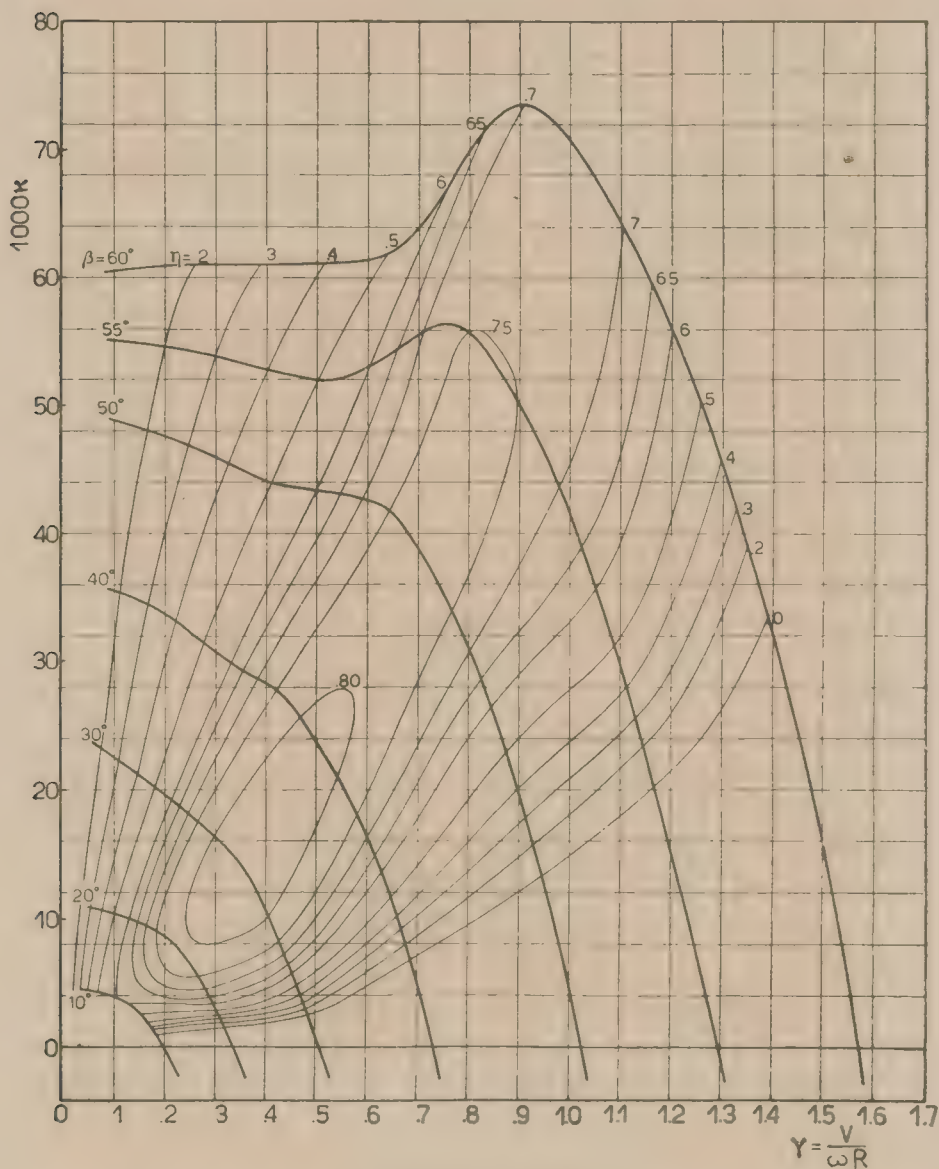


Fig. 8. Elica Normale.

Diagrammi dei coefficienti di coppia in funzione del rapporto di funzionamento con le linee di uguale rendimento.

assume tra i dati la potenza del motore. La velocità di progetto non sarà perciò realizzabile in volo esattamente orizzontale ma

in leggera pendenza in relazione alle differenze di rendimento delle eliche rispetto al valore previsto.

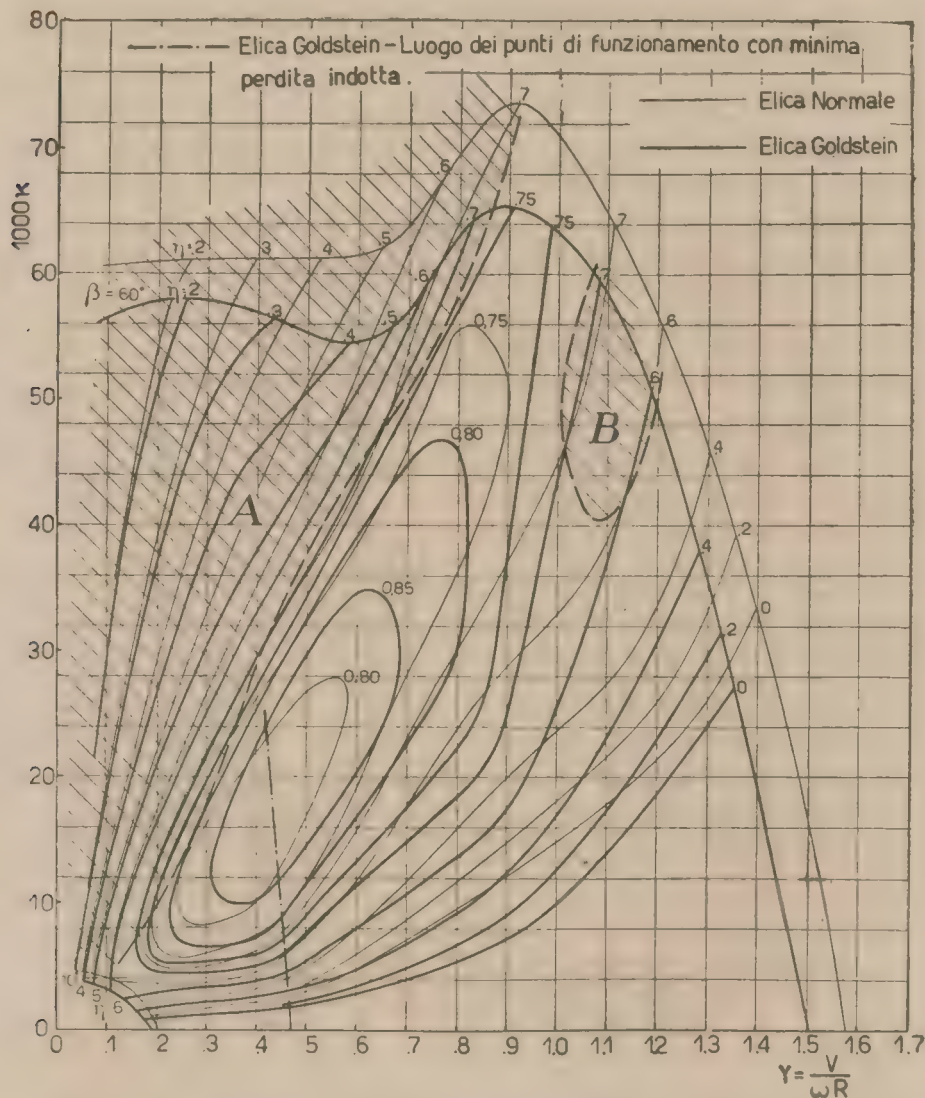


Fig. 9. — Diagramma per il confronto tra l'elica Goldstein e la Normale.

Dati di progetto: quota, velocità dell'aereo, velocità risultante alla periferia delle pale. — Si fissa il rapporto della velocità risultante alla velocità del suono. A, B campi di funzionamento in cui l'elica Normale ha rendimento superiore.

La libertà di scelta può essere limitata da altre condizioni di progetto:

- a) il valore massimo del raggio; oppure:
- b) valore prefissato del numero di giri dell'elica.

Il primo caso tiene conto dei vincoli del disegno dell'apparecchio; il secondo interessa l'applicazione ad un motore perfet-

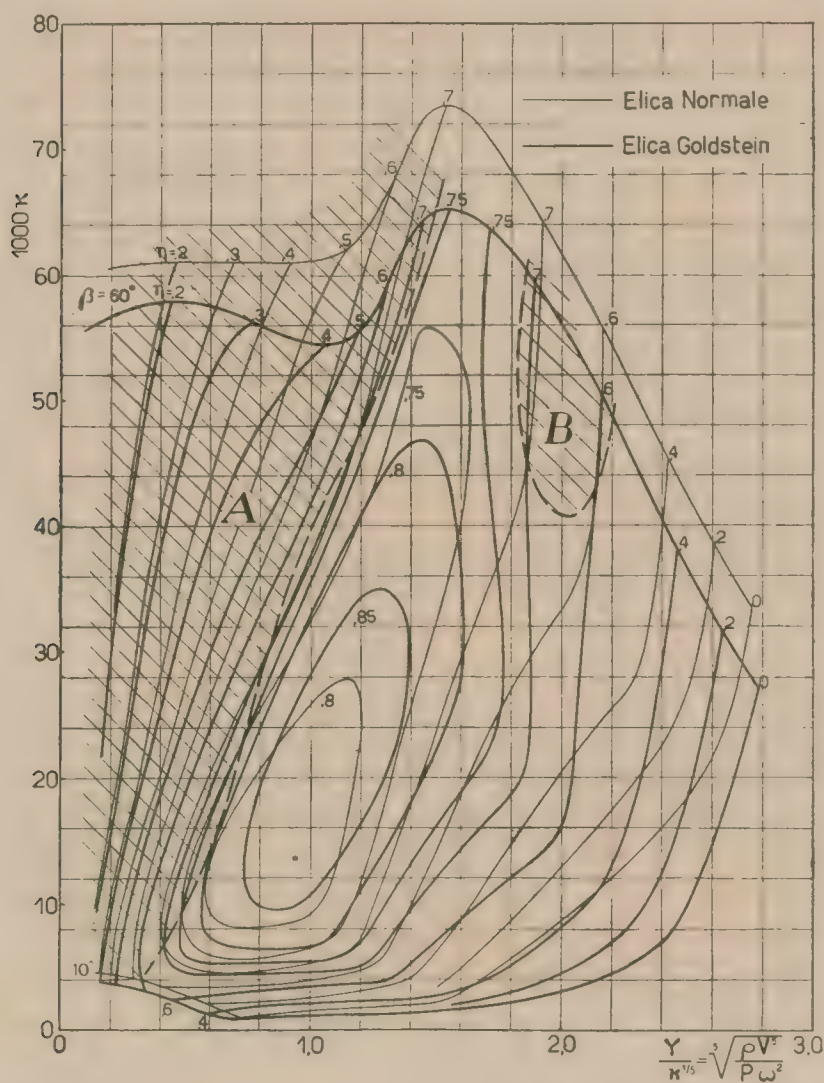


Fig. 10. — Diagramma per il confronto tra l'elica Goldstein e la Normale. Dati di progetto: quota, velocità, potenza del motore e veloc. angolare dell'elica. A. B campi di funzionamento in cui l'elica Normale ha rendimento superiore.

tamente definito. In ogni caso è da considerare un limite superiore della velocità periferica; tale limite è stabilito in base al rapporto della velocità risultante all'estremità delle pale alla velocità del suono.

I risultati sono presentati in modo che l'ascissa rappresenti una quantità nota delle condizioni di progetto. Se si ha il solo limite della velocità periferica, nel diagramma $\alpha - \gamma$ di fig. 9 il campo di scelta dell'elica è limitato dalla verticale corrispondente

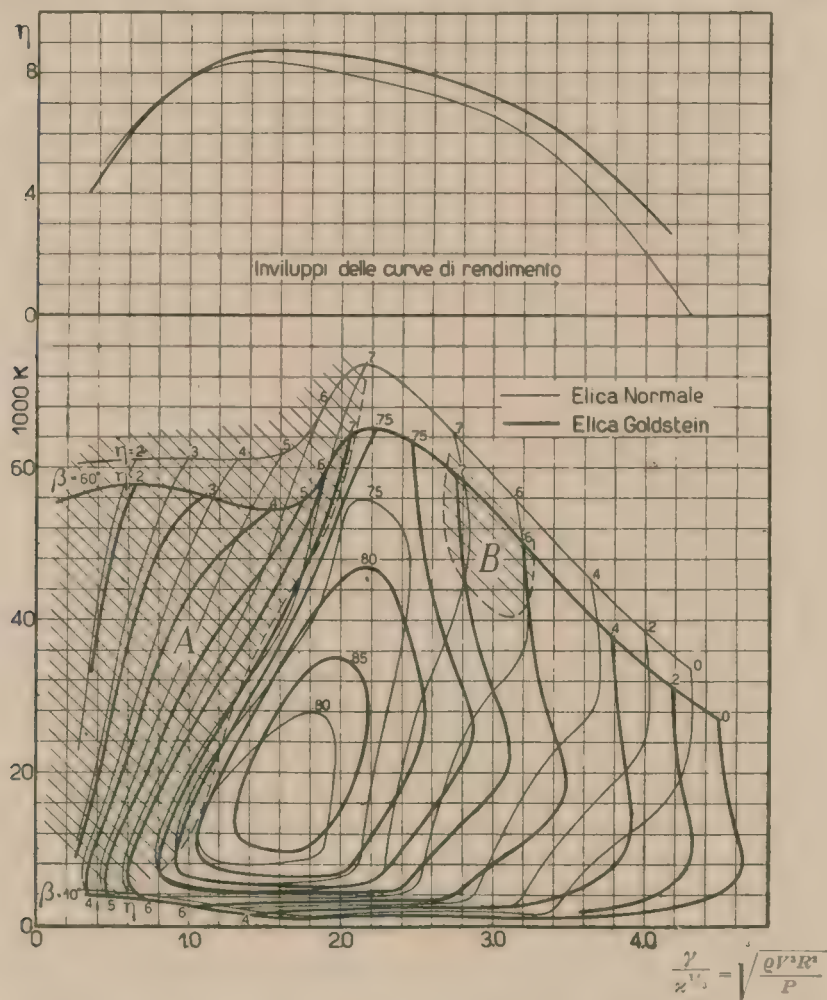


Fig. 11. — Diagramma per il confronto tra l'elica Goldstein e la Normale.

Dati di progetto: quota, velocità, potenza del motore, raggio dell'elica.

A, B campi di funzionamento in cui l'elica Normale ha rendimento superiore.

al valore minimo di γ . Se sono fissate potenza, velocità, quota, numero di giri, la scelta si esegue sul diagramma $\alpha - \gamma, \alpha^{1.5}$ di fig. 10; il campo di scelta è ristretto ad un segmento limitato dal valore minimo di α che permette di non superare il valore stabilito della velocità periferica.

Se sono fissate potenza, velocità, quota e il raggio massimo dell'elica, la scelta si esegue sul diagramma $\alpha - \gamma \alpha^{1/3}$ di fig. 11. Il campo di scelta è limitato dalla $\gamma \alpha^{1/3} = \text{cost}$ e dalla curva di equazione $\gamma = \text{cost}$, cioè $\alpha \left(\frac{\gamma}{\alpha^{1/3}} \right)^3 = \text{cost}$, che stabilisce il limite assunto per la velocità periferica.

Le eliche scelte vengono facilmente confrontate in altre condizioni di velocità, di quota e di potenza considerando che siano a passo variabile. Sono noti i valori di α e dell'ascissa. Le qualità relative delle eliche a confronto sono quindi stabilite dai corrispondenti valori dei rendimenti.

È particolarmente interessante il confronto alle velocità medie durante l'involò e la salita. Secondo quanto adottato empiricamente dal NACA (rif. 2), si possono considerare come velocità medie rispettivamente il 25% e il 65% della velocità massima.

7. *Esempio numerico di applicazione.* — Consideriamo un moderno apparecchio da caccia (Focke Wulf 190 da Interavia N. 832).

Nelle condizioni di velocità massima di durata, la potenza è di 1140 HP a 2300 giri l' del motore alla quota di 5650 m. A tali condizioni corrisponde la velocità $V_{\text{max}} = 600$ Km/ora.

Nelle condizioni di salita la potenza è di 1480 HP a 2400 giri l' alla quota di 5000 m. La velocità lungo la traiettoria sia $V_s = 0,65 V_{\text{max}} = 390$ Km/ora.

Nelle condizioni di involò il motore può, per breve tempo, sviluppare la potenza 1600 HP a 2700 giri l' a quota 0. La velocità sia $V_i = 0,25 V_{\text{max}} = 150$ Km/ora.

L'elica viene scelta per le condizioni di velocità massima di durata in modo che la velocità risultante all'estremità delle pale sia 0,9 la velocità del suono.

Poichè il disegno dell'apparecchio impone un limite al diametro dell'elica, la determinazione viene eseguita sul diagramma $\alpha - \gamma \alpha^{1/3}$ di fig. 11. I risultati ottenuti per due valori del diametro sono raccolti nella tab. VII.

8. *Risultati ottenuti sui modelli.* — Dai diagrammi delle figg. 9, 10, 11 si ha che l'elica Goldstein presenta una notevole superiorità sull'elica Normale tranne in due campi: *A* e *B*.

Il campo *B* corrisponde ad una tanto lieve differenza di rendimento tra le due eliche che la precisione sperimentale non è in grado di garantire nè l'estensione nè l'esistenza stessa di tale campo. D'altra parte *B* corrisponde a condizioni di funzionamento del tutto eccezionali.

Il campo *A* invece interessa il campo di funzionamento dell'elica durante l'involo e la salita. Ha perciò molta importanza

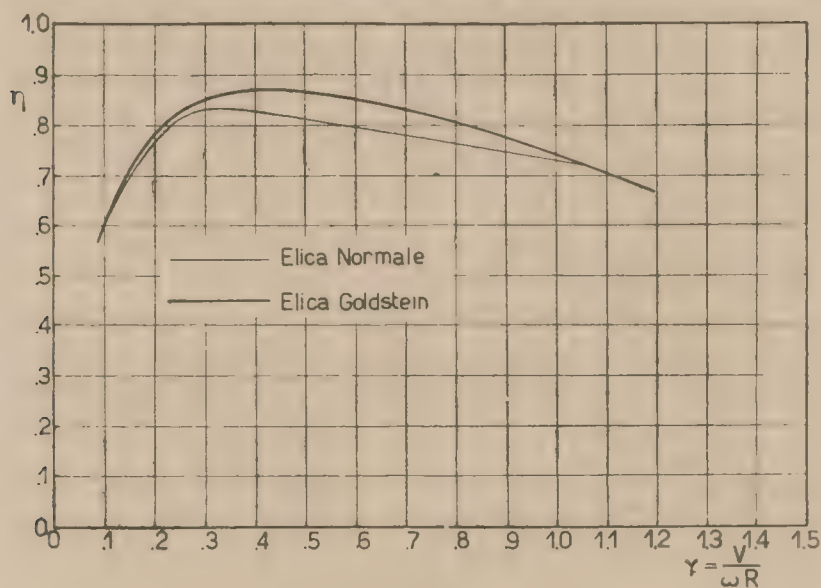


Fig. 12.

Confronto degli inviluppi delle curve di rendimento riferite a $\gamma = \frac{V}{\omega R}$.

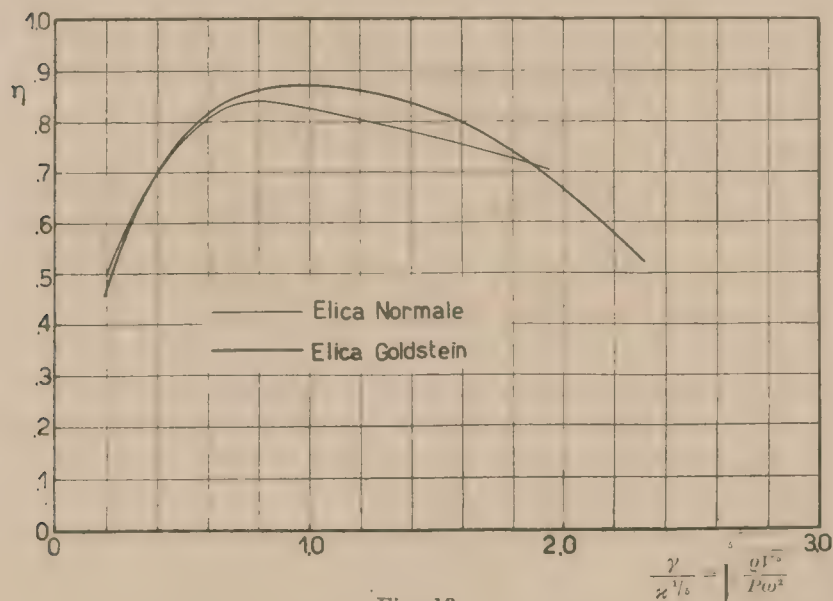


Fig. 13.

Confronto degli inviluppi delle curve di rendimento riferite a $\frac{\gamma}{\kappa^{1/2}} = \left| \frac{\rho l^2}{P \omega^2} \right|$.

per il campo A discutere i risultati del confronto ottenuti sui modelli. Tale discussione verrà fatta nel seguente paragrafo.

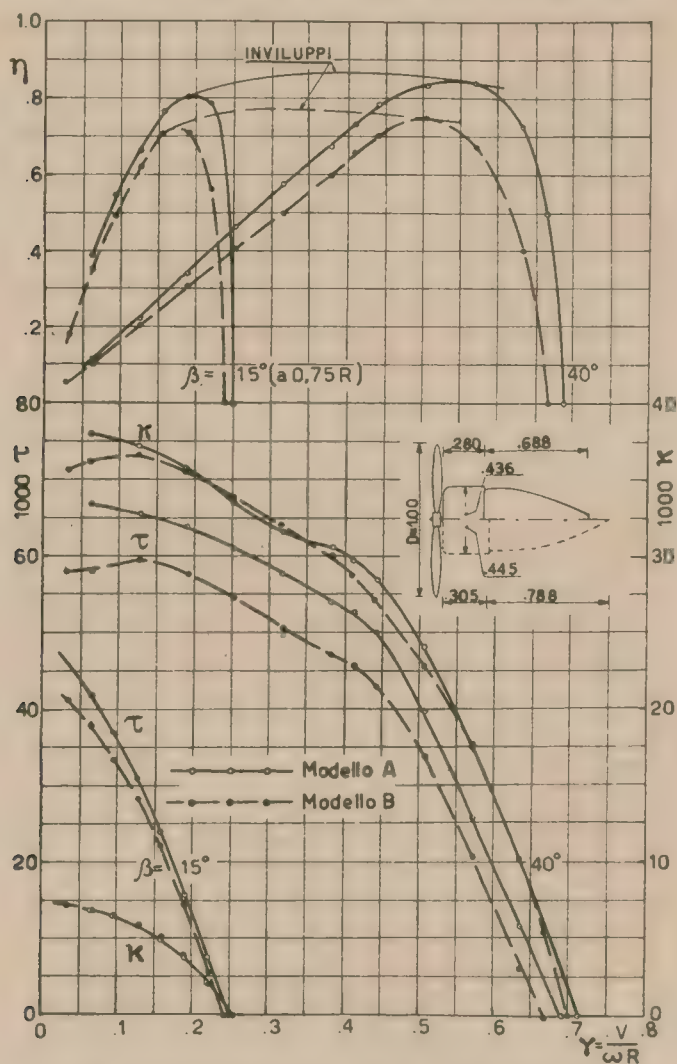


Fig. 14. Influenza del numero di Reynolds R_e .
Elica NACA 6101 tripale con profili Clark Y in presenza di ogiva per motore raffreddato ad aria. La definizione di R_e è indicata sulla tab. I.

$D = 3,05$ m. dal NACA T.R. 642 - 1938

per: $\beta = 15^\circ$ $1,80 \cdot 10^6 \leq R_e \leq 1,87 \cdot 10^6$ (R_e a $0,7 R$)

$\beta = 40^\circ$ $1,26 \cdot 10^6 \leq R_e \leq 1,00 \cdot 10^6$ (R_e a $0,7 R$)

$D = 0,915$ m. dal NACA T.R. 680 - 1939

per: $\beta = 15^\circ$ $0,56 \cdot 10^6 \leq R_e \leq 0,58 \cdot 10^6$ (R_e a $0,7 R$)

$\beta = 40^\circ$ $0,41 \cdot 10^6 \leq R_e \leq 0,24 \cdot 10^6$ (R_e a $0,7 R$)

9. *Discussione dell'influenza dei fattori di scala.* — Le condizioni di prova del modello non permettono di ottenere la similitudine dinamica con le condizioni di funzionamento al vero. Le caratteristiche determinate sul modello non sono applicabili esattamente al vero.

Interessa considerare l'influenza dei fattori di scala sulla modificazione delle caratteristiche sotto due punti di vista:

- a) influenza assoluta;
- b) influenza relativa nel confronto.

I fattori di scala che principalmente interessano sono: numeri di Reynolds effettivo R_e e numero di Mach M .

Nella tab. III sono riportati i valori di tali fattori per le eliche ora a confronto e sono indicati i limiti superiori raggiunti attualmente nelle applicazioni.

10. *Influenza assoluta del numero di Reynolds.* — A rappresentare l'influenza assoluta del numero di Reynolds considero la fig. 14. In essa sono confrontati i risultati di prove eseguite al Laboratorio del NACA su due modelli di una medesima elica: NACA 6101 tripale, con profili Clark Y (vedi rif. 5 e 6). I modelli furono provati in presenza di gondole, per motore raffreddato ad aria, quasi esattamente simili e nello stesso rapporto dei modelli. I numeri di Mach sono inferiori a 0,5 e non molto differenti fra loro; non si attende quindi da essi una influenza differenziatrice delle caratteristiche.

Per l'elica NACA 6101, risulta dalla fig. 14 che l'aumento del numero di Reynolds ha azione di poca importanza e di segno variabile sul coefficiente di coppia; sul coefficiente di trazione e sul rendimento, invece, produce, a parità di rapporto di funzionamento, un notevole incremento; i massimi rendimenti si spostano verso valori più elevati del rapporto di funzionamento e minori del coefficiente di coppia.

L'influenza del Numero di Reynolds è più sentita col crescere del calettamento.

L'elica Normale è costituita dai medesimi profili, e non differisce molto dalla NACA 6101. Si attende perciò su di essa un'influenza qualitativamente analoga. La legittimità di tale conclusione è appoggiata dal confronto, nelle figg. 15, 16, 17, fra l'elica Normale e la NACA 5868-9 (rif. 2).

Queste due eliche presentano alcune differenze geometriche, come risulta dalla tab. IV e dalla fig. 2; sono inoltre state speri-

mentate in presenza di ogive differenti (vedi fig. 16). Si ritiene però che l'influenza predominante nel differenziare le caratteristiche sia quella del Numero di Reynolds.

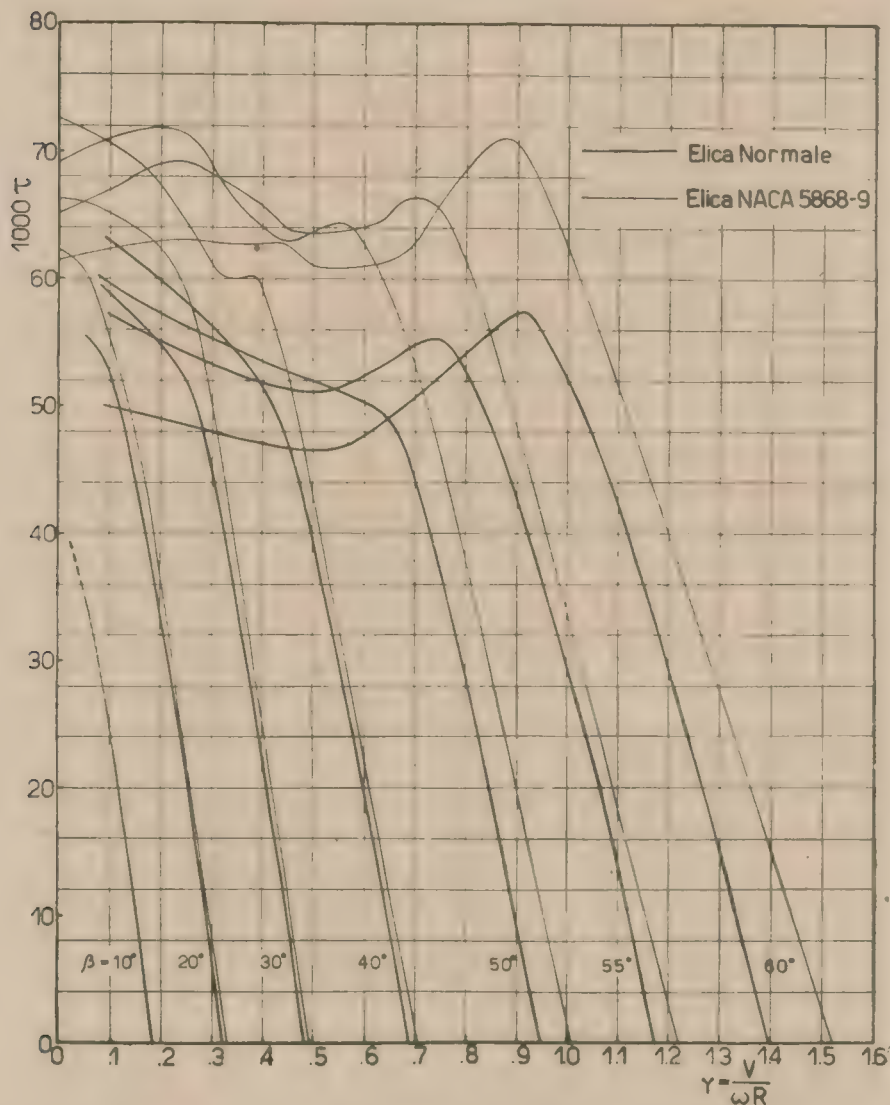


Fig. 15. Confronto tra l'elica Normale e la NACA 5868-9 con ogiva impruata per motore raffreddato a liquido - Tech. Report 658.

Diagramma dei coefficienti di trazione in funzione del rapporto di funzionamento.

11. *Influenza relativa del Numero di Reynolds.* — Le eliche Goldstein e Normale differiscono per la distribuzione lungo il raggio delle larghezze di pala e del passo, e per i profili impiegati.

Da tali differenze dipende la complessiva influenza relativa del numero di Reynolds. Ci limitiamo a considerare l'influenza sui profili che è probabilmente l'elemento più importante dell'influenza sull'elica.

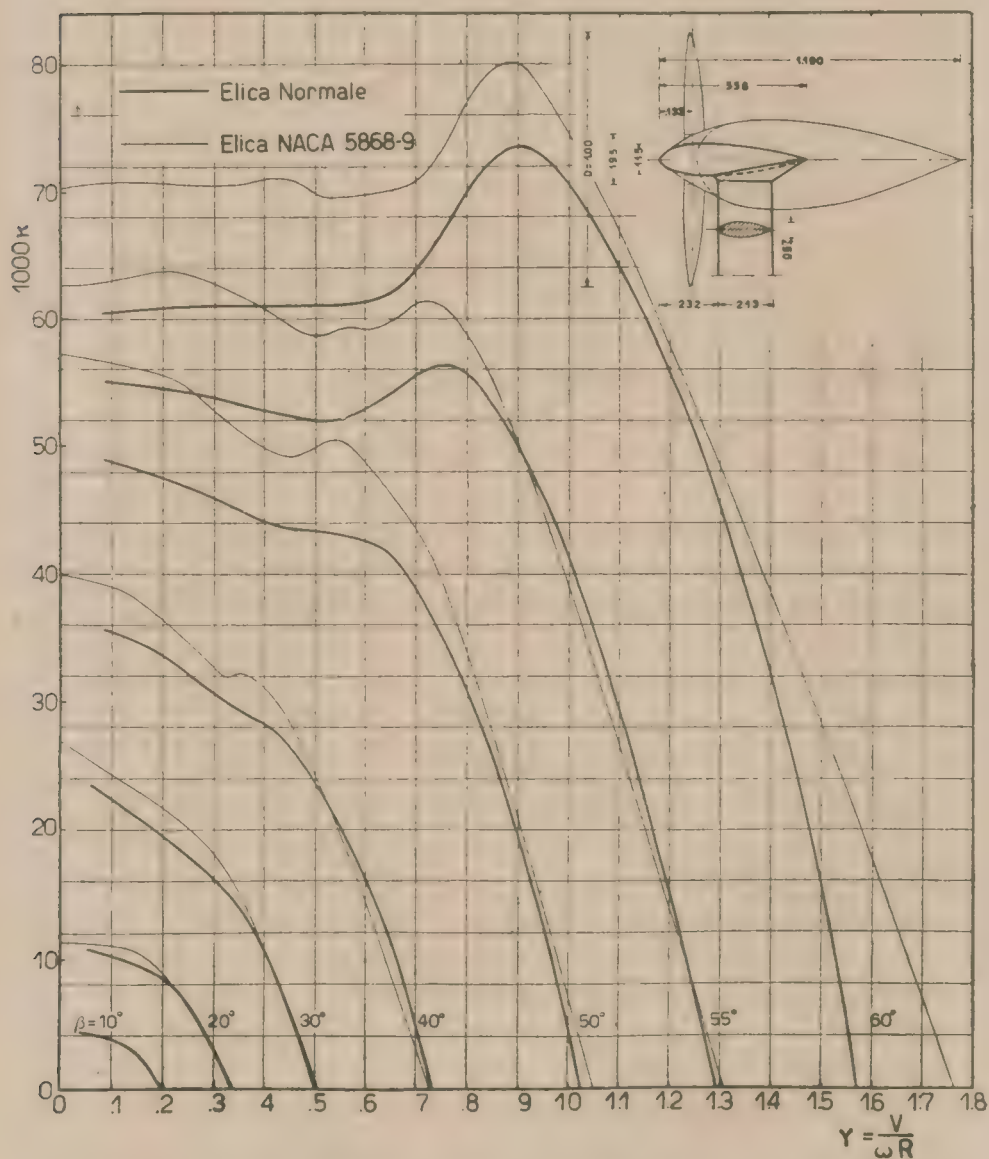


Fig. 16. Confronto tra l'elica Normale e la NACA 5868-9 con ogiva impruata per motore raffreddato a liquido - Tech. Report 658.

Diagrammi dei coefficienti di coppia in funzione del rapporto di funzionamento.

Per ciascuna elica è considerato un solo profilo e precisamente il NACA 2412, per la Goldstein, e il Clark Y, per la Normale.

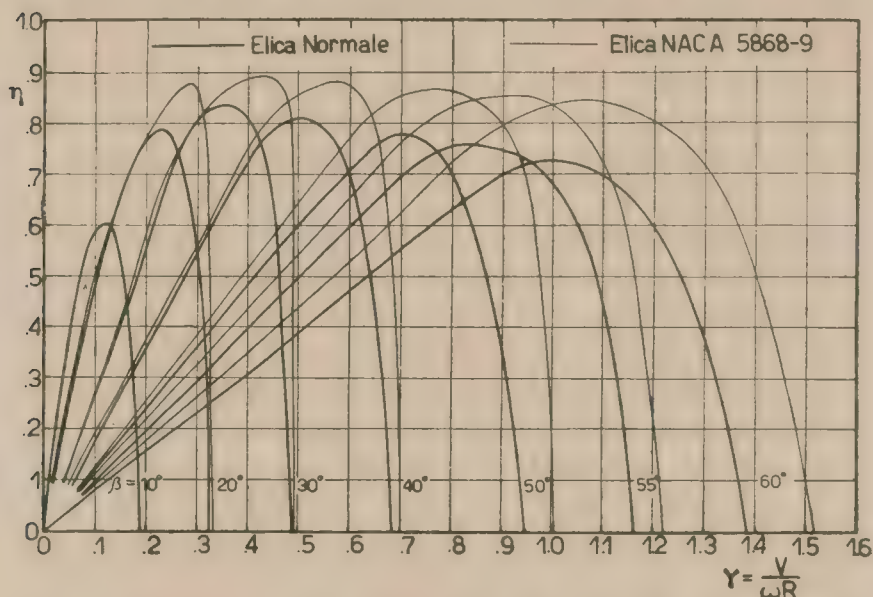


Fig. 17. Confronto tra l'elica Normale e la NACA 5868-9 con ogiva impruata. per motore raffreddato a liquido - Tech. Report. 658.

Diagrammi dei rendimenti in funzione del rapporto di funzionamento.

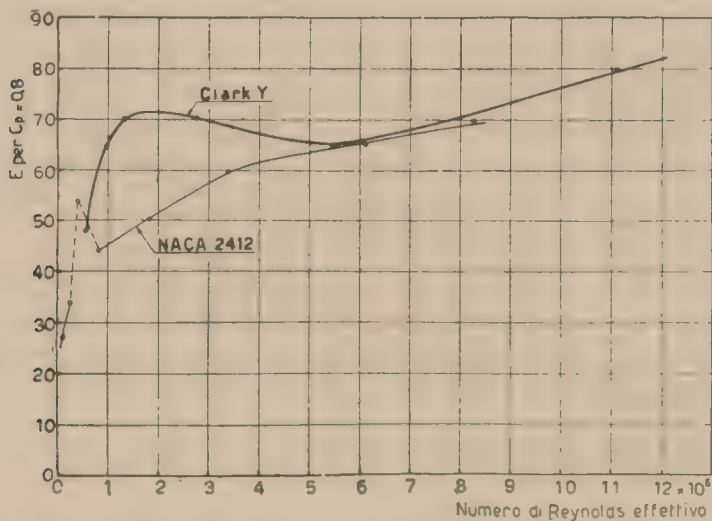


Fig. 18. — Influenza del numero di Reynolds sull'efficienza $\left(E = \frac{C_p}{C_r}\right)$ dei profili NACA 2412 (rif. 4) e Clark Y (rif. 7) per $C_p = 0,8$. All'incirca E per $C_p = 0,8 = E_{\max}$.

Essi sono usati a circa il 53 % del raggio; appartengono quindi ad una zona delle pale che contribuisce in modo notevole a determinare le qualità dell'elica.

Dalle prove riportate nel rif. 4 per il profilo NACA 2412, e nel rif. 7 per il profilo Clark Y, non risulta una chiara influenza

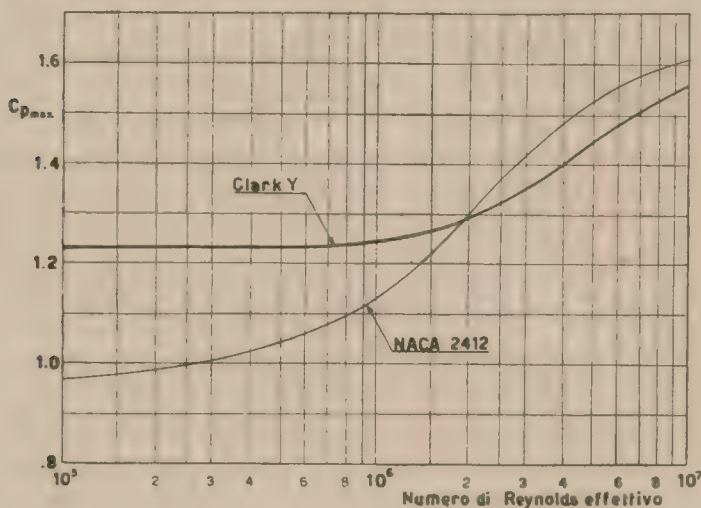


Fig. 19. — Influenza del numero di Reynolds sul coefficiente di portanza massima dei profili Clark Y (spessore 11,7 %) e NACA 2412 (NACA T. R. 558 - 1936).

differenziatrice del Numero di Reynolds sui due profili per i bassi valori della portanza. In vicinanza delle condizioni di efficienza massima (per $C_p = 0,8$) l'efficienza del profilo NACA 2412 cresce più lentamente che per il Clark Y (vedi fig. 18 e tab. III).

Il valore del numero di Reynolds agisce in modo chiaramente differente sul valore del coefficiente di portanza massima $C_{p_{max}}$ come si vede dalla fig. 19, tratta dal rif. 8. Il rapido aumento della resistenza di profilo si produce per l'incidenza a cui si supera il $C_{p_{max}}$. Perciò con il crescere del numero di Reynolds si estende il campo di incidenza in cui l'efficienza del profilo si mantiene elevata. Il raggiungimento del valore di $C_{p_{max}}$ sui profili più influenti, è segnalato, nelle caratteristiche dell'elica, dal rapido cambiamento di andamento nel diagramma della trazione con il rapporto di funzionamento. Il campo A delle figg. 9, 10, 11 corrisponde per entrambe le eliche a condizioni di funzionamento dei profili prossimi e oltre l'incidenza di portanza massima.

Il profilo NACA 2412 nelle condizioni dell'esperimento ha un valore di $C_{p_{max}}$ notevolmente inferiore a quello del Clark Y.

Con l'aumento del numero di Reynolds, $C_{p\max}$, e quindi l'efficienza, aumentano in più grande misura che per il Clark Y. Il miglioramento delle caratteristiche dell'elica Goldstein nelle condizioni di involo e salita sarà in vera scala più grande che per la Normale.

Si giunge alla conclusione, che il campo A di inferiorità dell'elica Goldstein, in dipendenza dei profili usati, è più ristretto nelle condizioni di applicazione dell'elica di quanto risulti dalle attuali prove sul modello. Non è possibile dalla precedente discussione giungere a conclusioni quantitative.

12. Influenza del numero di Mach. — Gli elementi sperimentali noti sono insufficienti a prevedere le modificazioni relative delle caratteristiche per i valori elevati del numero di Mach usati nelle applicazioni.

Per quanto riguarda l'azione sui profili, si hanno gli esperimenti del rif. 9 sui profili NACA 2409 e 3 C 9 (derivato dal Clark Y, di spessore 9%) che sono impiegati a circa il 75% del raggio rispettivamente nell'elica Goldstein e nella Normale.

Le caratteristiche di tali profili potrebbero dare una sufficiente idea dell'influenza del Numero di Mach per le basse velocità di avanzamento corrispondenti al campo A , in cui la compressibilità interessa essenzialmente i profili prossimi all'estremità della pala.

Gli esperimenti furono eseguiti presso il NACA nella galleria ad alta velocità di 11 pollici di cui non è noto il fattore di turbolenza.

I bassi valori del numero di Reynolds apparente, compreso da 350.000 a 750.000, fanno ritenere non attendibile una previsione dedotta da tali esperimenti. Citiamo, senza poter entrare in merito all'attendibilità di tale risultato, che nel rif. 2 (fig. 21 del rif. 2) è affermato, in base a esperimenti non pubblicati, e probabilmente ottenuti nella galleria ad alta velocità di 24 pollici, che i profili della serie NACA 2400-34 hanno valori delle velocità critiche superiori a quelli della serie Clark Y. Per velocità critica si intende quella a cui si produce un brusco peggioramento delle caratteristiche.

13. Conclusioni del confronto. — Sono state sperimentate due eliche una indicata come Normale, e l'altra, di minima perdita indotta, calcolata in base ai risultati di Goldstein. Per rendere legittimo il confronto la Goldstein è stata calcolata in modo che le due eliche soddisfino, in corrispondenza del massimo rendimento, alle medesime condizioni di progetto.

Dagli esperimenti risulta che la Goldstein ha un rendimento massimo notevolmente più elevato e rendimenti superiori nelle condizioni di volo ad elevata velocità.

In due campi l'elica Goldstein si manifesta inferiore: *A* e *B* delle figg. 9, 10, 11.

Il campo *A* interessa l'involò e la salita; è perciò molto importante.

Il campo *B* corrisponde a lievi differenze di rendimento che la precisione sperimentale non permette di garantire. Esso inoltre rappresenta condizioni di funzionamento del tutto eccezionali.

L'applicazione dei risultati alle condizioni di impiego in vera grandezza richiede una discussione dell'influenza relativa dei fattori di scala: numero di Reynolds e numero di Mach.

Tale discussione è difficile per il fatto che i profili usati sulle due eliche sono differenti e quindi differenti, in primo luogo, per tale causa, le azioni dei fattori di scala sulle eliche.

Ci siamo limitati a considerare da un punto di vista qualitativo la probabile influenza differenziale dipendente dai profili. Si prevede che l'aumento del numero di Reynolds eserciti forte azione differenziatrice nel campo *A* nel senso di ridurre l'estensione.

Per l'influenza del numero di Mach, gli elementi sperimentali disponibili sono insufficienti per fare previsioni.

14. Criteri per il progetto. — Gli esperimenti non permettono di determinare in modo quantitativo la precisione del metodo di Goldstein e di isolare l'influenza della differenza tra le condizioni fisiche supposte nel calcolo (vedi Parte I, § 1) e quelle effettive di esperimento. La causa di questo è, in primo luogo, l'imperfetta conoscenza delle caratteristiche dei profili:

In base al materiale sperimentale disponibile si ottengono conferme indirette della buona precisione del metodo.

Nella Parte I è esposto il procedimento di applicazione al disegno dell'elica di massimo rendimento in relazione ai dati di progetto (Parte I, § 3).

Gli esperimenti, di cui ora è stato riferito (vedi fig. 3) e altri esperimenti su eliche Goldstein (vedi, per es., il rif. 10) rivelano che la zona di elevato rendimento è notevolmente estesa intorno al punto di massimo. In tale zona, il rendimento, con molta probabilità, rimane superiore a quello di una qualsiasi altra elica disegnata con criteri empirici.

La medesima famiglia soddisfa quindi con ottimo rendimento a condizioni di progetto differenti da quella corrispondente alla minima perdita indotta.

Il risultato assicura la possibilità di ottenere con un'elica Goldstein un buon compromesso tra le varie esigenze dell'applicazione se si rinuncia al massimo rendimento nelle condizioni di volo normale.

Viene proposto il seguente procedimento per guidare gli esperimenti che servono a precisare l'elica più adatta per l'applicazione.

Per ciascuna delle condizioni di volo che più interessano vengono determinati i valori di τ e di γ dell'elica di massimo rendimento compatibile con i dati di progetto (vedi Parte I, § 3); tali valori, quotati con i rendimenti, vengono portati in diagramma e individuano un luogo di punti. Se i dati di progetto consentono libertà di scelta per il raggio o per il numero di giri, ad ogni condizione di progetto corrisponde un luogo di punti che rappresenta il funzionamento alle altre condizioni di volo; altrimenti i due luoghi coincidono.

L'esame di esperimenti su eliche Goldstein permette di prevedere l'estensione approssimativa della zona di massimo rendimento intorno al punto di calcolo.

Verrà adottata l'elica per cui detta zona soddisfa meglio alle esigenze dell'applicazione. Gli esperimenti su uno o più modelli, opportunamente scelti, permetteranno di raggiungere con sicurezza il risultato voluto.

PARTE II. — RIFERIMENTI

Rif. 1. LAB. DI AERONAUTICA DEL R. POLITECNICO DI TORINO, *Torretta per la prova di eliche controrotanti*, in questo volume p. 443; Estratto Torino 1943.

Rif. 2. BIERMANN and HARTMANN, *Tests of two full scale propellers with different pitch distribution*. T. R. 658, NACA 1939.

Rif. 3. EASTMAN, JACOBS, WARD and PINKERTON, *The Characteristic of 78 related airfoil sections from tests in the variable density wind tunnel*. T. R. 460 NACA 1933.

Rif. 4. JACOBS and SHERMAN, *Airfoil characteristics as affected by variation of the Reynolds number*. T. R. 586 NACA 1937.

Rif. 5. BIERMANN and HARTMANN, *Tests of five full scale propellers* T. R. 642. NACA 1938.

Rif. 6. MC HUGH and DERRING, *The effect of Nacelle, Propeller diameter ratio on body interference* T. R. 680 NACA 1939.

Rif. 7. J. STACK, *Tests in variable density wind tunnel to investigate the effects of scale and turbulence on airfoil characteristics*. T. N. 364 NACA 1930.

Rif. 8. PLATT, *Turbulence factors of N.A.C.A. tunnels as determined by sphere test*. T. R. 558 NACA 1936.

Rif. 9. J. STACK and A. E. von DOENHOFF, *Tests of 16 related airfoils at high speeds*. T. R. 492 NACA 1934.

Rif. 10. B. DIRKSEN, *Systematische Windkanalmessungen an einer Modell-Luftschraubenserie*. Abh. Aer. Inst. Aachen, Heft 16.

TAB. I. — Caratteristiche dei profili della serie NACA 2400 per $Re = 8,3 \times 10^6$. Dal T.R. 460 NACA 1933 (rif. 3).

Profilo	2406	2409	2412	2415	2418	2421
α per $C_p = 0$	$-1,7^\circ$	$-1,7^\circ$	$-1,8^\circ$	$-1,7^\circ$	$-1,9^\circ$	$-1,7^\circ$
$\frac{dC_p}{da}$	.103	.103	.101	.101	.098	.097
$\left(\frac{C_p}{C_r}\right)_{\max}$	73,5	78	75	68	60	50
α per $\left(\frac{C_p}{C_r}\right)_{\max}$	$5,6^\circ$	$7,5^\circ$	$8,1^\circ$	$8,5^\circ$	$9,5^\circ$	$9,3^\circ$

$Re = \frac{Wl}{\nu} f_t$; Re numero di Reynolds effettivo (rif. 8); W velocità; l corda del profilo; ν viscosità cinematica; f_t fattore di turbolenza della galleria di prova determinato dalle misure con la sfera (rif. 8).

TAB. II. — Profilo 2412 - Caratteristiche a differenti numeri di Reynolds dal T.R. 586 NACA 1937 (rif. 4). (Vedi anche figg. 18-19).

$Re \cdot 10^6 \times$	8,24	6,10	3,42	1,73	.879	.438	.218	.110
α per $C_p = 0$	$-2,0^\circ$	$-2,1^\circ$	$-2,0^\circ$	$-2,1^\circ$	$-2,1^\circ$	$-2,0^\circ$	$-2,2^\circ$	$-1,3^\circ$
$\frac{dC_p}{da}$	.098	.097	.098	.096	.096	.098	.0102	

La definizione di Re è indicata sulla tab. I.

TAB. III. — Numeri di Reynolds effettivi alla sezione $0,70 R$ e numeri di Mach all'estremità delle pale.

Calettamento a $0,75 R$		10°	20°	30°	40°	50°	55°	60°
Elica								
Goldstein								
Normale	$R_e \cdot 10^6$	0,59 ± 0,62	0,56 ± 0,64	0,51 ± 0,64	0,42 ± 0,62	0,35 ± 0,62	0,33 ± 0,59	0,28 ± 0,57
($h = 2,2$)	M	0,31 ± 0,32	0,31 ± 0,33	0,28 ± 0,31	0,23 ± 0,28	0,19 ± 0,27	0,18 ± 0,24	0,16 ± 0,23
NACA 5868-9								
	$R_e \cdot 10^6 \times$		1,80 ± 1,90	1,45 ± 1,40	1,26 ± 1,14	1,18 ± 0,93	1,08 ± 0,89	1,02 ± 0,84
($h = 1,2$)	M		0,47	0,37 ± 0,33	0,33 ± 0,25	0,30 ± 0,20	0,28 ± 0,18	0,26 ± 0,16

Nelle applicazioni si raggiungono i valori: $R_e = 4 \cdot 10^6$; $M = 0,9$

$M = \frac{W_1}{V_g}$ numero di Mach; W_1 velocità risultante all'estremità delle pale; V_g velocità del suono. La definizione di R_e è indicata sulla tab. I.

TAB. IV. — *Dati geometrici delle pale* (vedi fig. 2).

r, R	ELICA GOLDSTEIN SPERIMENTATA			ELICA TIPO NORMALE SPERIMENTATA			ELICA N.A.C.A. 5868-9 (Rif. 2)			ELICA GOLDSTEIN CALCOLATA PER $p_a/D = 1,470$		
	$100l/D$	$100s/l$	θ_a gradi	$100l/D$	$100s/l$	θ_a gradi	$100l/D$	$100s/l$	θ_a gradi	$100l/D$	θ_a gradi	θ gradi
0.20	5.43	26.5	34.25	3.47	42.6	23.05	3.80					
0.25	5.90	23.4	30.16	4.15	35.9	20.25	4.50					
0.30	6.38	20.5	26.00	4.90	30.4	17.43	5.25	37		6.26	25.33	25.33
0.35	6.82	17.9	22.00	5.67	25.7	14.63	6.05	24.5				
0.40	7.20	15.7	18.25	6.43	19.6	17.36	6.78	17.4	15.83			
0.45	7.50	13.7	14.65	7.19	14.7	12.35	7.45	13.8	11.33			
0.50	7.60	12.4	11.36	7.44	12.4	8.90	7.10	11.8	8.25	7.51	14.17	14.17
0.55	7.46	11.3	8.60	7.43	10.9	6.28	7.57	10.8	5.80			
0.60	7.21	10.5	6.00	7.22	10.2	4.35	7.31	10.2	4.10	7.26	5.97	5.97
0.65	6.90	9.77	3.66	6.90	9.66	2.66	7.00	9.7	2.46			
0.70	6.54	9.25	1.65	6.54	9.20	1.25	6.63	9.2	1.10	6.54	1.75	1.75
0.75	6.00	9.00	0.00	6.06	8.94	0.00	6.12	9.0	0.00	5.99	0.00	0.00
0.80	5.37	8.70	-1.70	5.53	8.68	-1.07	5.60	8.7	-1.10	5.40	-1.67	-1.67
0.85	4.64	8.45	3.20	4.98	8.13	-2.17	5.06	8.4	-2.10	4.70	-3.16	-3.16
0.90	3.74	8.31	-4.50	4.37	8.20	-3.01	4.45	8.3	-2.94	3.82	-4.50	-4.50
0.95	2.68	8.29	-5.70	3.73	8.30	-3.63	3.80	8.2	-3.55	2.71	-5.78	-5.78

Simboli: r distanza del profilo dall'asse di rotazione; R raggio dell'elica; $D = 2R$; l corda del profilo; s spessore massimo del profilo; θ_a calettamento aerodinamico del profilo rispetto alla sezione a $0,75 R$; θ calettamento geometrico del profilo rispetto alla sezione a $0,75 R$; p_a passo aerodinamico.

(1) Per gli angoli α_0 (di portanza nulla) dei profili (N.A.C.A. 2400-34) è stato assunto un unico valore (vedi tab. I, II).

(2) Gli angoli α_0 dei profili (Clark Y) sono dedotti da esperimenti del Laboratorio (non pubblicati).

TAB. V. — *Elica Goldstein*
Dall'interpolazione dei risultati sperimentali.

β a 0,75R	γ	1000 τ	1000 κ	$\gamma/\kappa^{1/2}$	$\gamma/\kappa^{1/2}$	η
10°	0,050	28,9	3,8	0,320	0,1525	0,380
	0,075	24,1	3,5	0,494	0,232	0,515
	0,110	16,5	3,0	0,763	0,350	0,603
	0,125	13,0	2,65	0,903	0,409	0,612
	0,150	6,3	1,8	1,232	0,531	0,525
	0,170	0	0,9	1,760	0,691	0
	0,188	— 5,9	0	∞	∞	—
20°	0,050	50,8	9,2	0,239	0,128	0,277
	0,100	45,4	9,0	0,481	0,257	0,505
	0,150	37,7	8,4	0,737	0,390	0,674
	0,225	22,5	6,4	1,210	0,618	0,792
	0,250	15,5	5,2	1,444	0,716	0,745
	0,285	4,7	2,65	2,060	0,934	0,505
	0,300	0	1,25	2,792	1,142	0
	0,315	—	0	∞	∞	—
30°	0,100	54,8	20,6	0,365	0,217	0,266
	0,200	50,4	17,5	0,770	0,449	0,576
	0,250	47,2	15,8	0,997	0,573	0,745
	0,275	44,1	15,05	1,113	0,636	0,806
	0,325	34,9	13,35	1,370	0,770	0,850
	0,375	22,9	10,05	1,737	0,941	0,855
	0,400	15,9	7,8	2,017	1,056	0,816
	0,425	8,4	5,15	2,461	1,219	0,692
	0,440	4,0	3,3	2,955	1,380	0,533
	0,453	0	1,6	3,871	1,642	0
	0,465	—	0	∞	∞	—
40°	0,100	59,1	33,6	0,309	0,197	0,175
	0,200	55,1	31,0	0,637	0,401	0,356
	0,300	51,1	28,3	0,985	0,612	0,541
	0,350	50,8	26,9	1,159	0,721	0,662
	0,400	51,0	25,3	1,363	0,835	0,807
	0,500	36,9	21,3	1,804	1,080	0,867
	0,550	26,3	17,5	2,117	1,235	0,848
	0,575	20,9	15,1	2,327	1,330	0,795
	0,600	14,7	12,1	2,613	1,451	0,720
	0,635	5,75	7,05	3,311	1,711	0,518
	0,657	0	3,40	4,366	2,048	0
	0,676	—	0	∞	∞	—

(Segue Tabella V — Elica Goldstein).

β a 0,75R	γ	1000 τ	1000 κ	$\gamma/\kappa^{1/2}$	$\gamma/\kappa^{1/2}$	η
50°	0,100	56,3	46,7	0,278	0,185	0,121
	0,200	54,3	45,4	0,559	0,371	0,239
	0,300	51,2	43,3	0,854	0,562	0,355
	0,400	48,0	39,8	1,172	0,763	0,482
	0,500	48,5	39,0	1,474	0,956	0,621
	0,550	51,7	39,2	1,619	1,056	0,723
	0,600	52,3	39,1	1,767	1,148	0,803
	0,650	48,4	37,7	1,937	1,253	0,835
	0,700	42,0	35,1	2,140	1,368	0,838
	0,750	34,7	31,6	2,372	1,496	0,823
	0,800	26,8	27,2	2,661	1,645	0,788
	0,850	18,1	21,6	3,051	1,830	0,712
	0,900	8,0	14,4	3,699	2,102	0,500
	0,925	2,65	10,3	4,251	2,309	0,238
	0,937	0	8,1	4,665	2,455	0
	0,982	—	0	∞	∞	—
55°	0,100	52,8	52,4	0,267	0,183	0,101
	0,200	51,7	52,3	0,535	0,361	0,198
	0,300	49,3	51,5	0,806	0,543	0,287
	0,400	45,7	49,2	1,091	0,731	0,372
	0,500	43,6	46,8	1,398	0,922	0,465
	0,600	47,5	47,4	1,658	1,104	0,600
	0,700	53,6	50,3	1,896	1,273	0,747
	0,750	53,9	51,5	2,017	1,357	0,784
	0,800	50,3	50,8	2,162	1,452	0,793
	0,850	44,4	48,2	2,334	1,559	0,783
	0,900	37,6	44,7	2,536	1,675	0,757
	0,950	30,5	40,3	2,770	1,806	0,720
	1,050	14,8	27,9	3,462	2,148	0,556
	1,100	5,8	20,1	4,045	2,402	0,317
	1,130	0	15,3	4,557	2,607	0
	1,225	—	0	∞	∞	—
60°	0,100	47,6	56,5	0,261	0,178	0,084
	0,200	46,5	57,7	0,517	0,354	0,161
	0,300	44,8	57,7	0,776	0,531	0,233
	0,400	41,1	56,8	1,041	0,710	0,280
	0,500	37,7	55,1	1,313	0,892	0,342
	0,600	37,6	54,4	1,584	1,074	0,415
	0,700	44,8	56,9	1,819	1,242	0,550
	0,800	53,1	63,0	2,010	1,391	0,673

(Segue Tabella V — Elica Goldstein).

β a 0,75R	γ	1000 τ	1000 κ	$\gamma/\kappa^{1/2}$	$\gamma/\kappa^{1/2}$	η
60°	0,850	54,9	64,9	2,115	1,468	0,719
	0,900	54,4	65,3	2,235	1,553	0,750
	0,950	51,2	64,5	2,369	1,644	0,755
	1,000	47,0	63,0	2,515	1,739	0,746
	1,100	35,9	57,9	2,844	1,944	0,682
	1,200	23,5	48,6	3,288	2,198	0,581
	1,300	8,4	34,7	3,983	2,546	0,315
	1,350	0	27,1	4,492	2,777	0
	1,500	—	0	∞	∞	—

TAB. VI. — Elica Normale

Dall'interpolazione dei risultati sperimentali.

β a 0,75R	γ	1000 τ	1000 κ	$\gamma/\kappa^{1/2}$	$\gamma/\kappa^{1/2}$	η
10°	0,05	35,1	4,6	0,301	0,147	0,382
	0,075	30,5	4,4	0,458	0,222	0,520
	0,100	24,9	4,1	0,625	0,300	0,606
	0,125	18,3	3,75	0,805	0,383	0,618
	0,160	8,1	2,65	1,156	0,524	0,489
	0,175	3,8	1,90	1,413	0,613	0,350
	0,188	0	1,10	1,821	0,734	0
	0,205	— 5,7	0	∞	∞	—
20°	0,050	55,1	11,0	0,225	0,123	0,250
	0,100	51,9	10,5	0,457	0,249	0,496
	0,150	43,5	9,8	0,701	0,378	0,665
	0,200	33,4	8,7	0,973	0,505	0,767
	0,225	27,9	8,0	1,125	0,577	0,785
	0,250	21,1	6,8	1,320	0,678	0,775
	0,300	6,9	3,5	1,975	0,929	0,590
	0,323	0	1,8	2,655	1,143	0
	0,342	— 5,5	0	∞	∞	—

(Segue Tabella VI — Elica Normale).

β a 0,75R	γ	1000 τ	1000 κ	$\gamma/\kappa^{1/2}$	$\gamma/\kappa^{1/2}$	η
30°	0,100	58,4	22,7	0,353	0,213	0,257
	0,200	54,3	19,8	0,739	0,438	0,550
	0,250	51,6	18,3	0,949	0,557	0,705
	0,300	44,5	16,6	1,176	0,681	0,805
	0,350	34,6	14,5	1,436	0,816	0,835
	0,400	22,6	11,1	1,793	0,984	0,815
	0,450	9,7	6,6	2,399	1,229	0,662
	0,475	3,1	4,1	2,970	1,426	0,359
	0,487	0	2,8	3,451	1,577	0
	0,512	—7,2	0	∞	∞	—
40°	0,100	62,7	35,7	0,304	0,195	0,175
	0,200	59,3	33,9	0,618	0,398	0,350
	0,300	55,8	30,9	0,956	0,601	0,542
	0,400	51,3	28,4	1,310	0,816	0,723
	0,450	46,6	26,9	1,501	0,927	0,780
	0,500	39,1	24,0	1,732	1,054	0,812
	0,550	30,0	20,7	2,003	1,194	0,796
	0,600	19,7	16,7	2,347	1,360	0,708
	0,650	8,6	11,5	2,878	1,587	0,486
	0,675	3,1	8,5	3,308	1,752	0,246
	0,688	0	6,9	3,614	1,861	0
	0,735	—13,7	0	∞	∞	—
50°	0,100	59,3	48,9	0,273	0,183	0,123
	0,200	56,8	47,6	0,552	0,368	0,239
	0,300	54,7	46,0	0,837	0,555	0,357
	0,400	53,1	44,2	1,132	0,747	0,482
	0,500	51,6	43,4	1,423	0,936	0,594
	0,600	49,9	42,7	1,716	1,101	0,700
	0,650	48,3	41,7	1,874	1,227	0,752
	0,700	43,6	39,2	2,060	1,338	0,779
	0,750	36,6	35,8	2,276	1,460	0,769
	0,800	28,2	31,7	2,528	1,595	0,711
	0,850	18,9	26,7	2,844	1,754	0,602
	0,900	9,5	20,5	3,288	1,958	0,417
	0,925	4,7	17,0	3,596	2,089	0,256
	0,950	0	13,3	4,008	2,254	0
	1,027	—	0	∞	∞	—
55°	0,100	56,8	55,0	0,263	0,179	0,103
	0,200	54,8	54,6	0,527	0,358	0,200
	0,300	52,9	53,9	0,794	0,538	0,294

(Segue Tabella VI — Elica Normale).

β a 0,75R	γ	1000 τ	1000 κ	$\gamma/\kappa^{1/2}$	$\gamma/\kappa^{1/2}$	η
55°	0,400	51,4	52,9	1,066	0,720	0,389
	0,500	50,8	52,0	1,339	0,903	0,488
	0,550	51,2	52,1	1,473	0,993	0,541
	0,650	53,2	54,0	1,719	1,165	0,640
	0,750	54,7	56,2	1,957	1,337	0,730
	0,800	52,2	55,7	2,096	1,425	0,750
	0,850	47,6	53,6	2,254	1,526	0,755
	0,950	35,8	46,7	2,638	1,753	0,728
	1,050	21,7	36,8	3,157	2,033	0,619
	1,100	13,5	30,5	3,520	2,211	0,487
	1,150	3,9	23,7	4,002	2,430	0,190
	1,172	0	20,4	4,273	2,553	0
	1,297	—	0	∞	∞	—
60°	0,100	49,7	60,5	0,255	0,175	0,082
	0,200	48,6	60,9	0,508	0,350	0,160
	0,300	47,7	61,0	0,762	0,525	0,234
	0,400	46,7	61,0	1,016	0,700	0,306
	0,500	46,2	61,1	1,269	0,874	0,378
	0,600	47,4	61,2	1,523	1,049	0,465
	0,650	48,8	62,0	1,641	1,133	0,511
	0,750	52,0	66,2	1,854	1,291	0,589
	0,850	55,5	72,2	2,041	1,438	0,653
	0,900	56,9	73,5	2,148	1,515	0,697
	0,950	55,2	73,0	2,273	1,604	0,719
	1,000	51,5	70,9	2,416	1,698	0,726
	1,050	46,9	68,1	2,571	1,797	0,722
	1,100	41,4	64,6	2,741	1,902	0,704
	1,200	28,7	56,5	3,128	2,133	0,610
	1,300	14,4	45,8	3,634	2,409	0,409
	1,393	0	33,6	4,318	2,746	0
	1,575	—	0	∞	∞	—

TAB. VII. — Esempio numerico di confronto tra l'elica Goldstein e la Normale.
Applicazione all'apparecchio da caccia Focke Wulf 190. (Vedi § 7).

Diametro	Elica	Condizioni di velocità massima	Condizioni di salita	Condizioni di involo	Giri dell'elica	
					Giri del motore	
3,20 m	Goldstein Normale	1000 κ = 38,3	1000 κ = 40,6	1000 κ = 18,6	0,603	
		$\gamma/\kappa^{1/3}$ = 2,12	$\gamma/\kappa^{1/3}$ = 1,30	$\gamma/\kappa^{1/3}$ = 0,756		
		η = 0,83	η = 0,52	η = 0,43		
		η = 0,78	η = 0,58	η = 0,46		
3,40 m	Goldstein Normale	1000 κ = 33,9	1000 κ = 36,0	1000 κ = 16,5	0,567	
		$\gamma/\kappa^{1/3}$ = 2,21	$\gamma/\kappa^{1/3}$ = 1,35	$\gamma/\kappa^{1/3}$ = 0,600		
		η = 0,84	η = 0,60	η = 0,47		
		η = 0,77	η = 0,64	η = 0,51		

INDICE

	Pagine
Introduzione di M. PANETTI	VII-XXXII
I TEMA: Principi e trattazioni teoriche	1-189
PISTOLESI Enrico, <i>L'aerodinamica dell'elica aerea</i>	3-83
FERRARI Carlo, <i>L'influenza della larghezza finita della pala sulle caratteristiche aerodinamiche delle eliche. Risultati sperimentali e teorici</i>	84-138
FERRARI Carlo, GHIZZETTI A., POSSIO C., <i>Determinazione della legge di distribuzione della circolazione lungo il raggio per un'elica data col metodo di Sandi-Kawada. Calcolo dell'elica di dato raggio e di data distribuzione della circolazione lungo la pala</i>	139-189
Parte I (di Carlo FERRARI), p. 140-152; Parte II (di A. GHIZZETTI), p. 153-178; Parte III (di C. POSSIO), p. 179-189.	
II TEMA: La propulsione a reazione	191-266
POGGI Lorenzo, <i>Principi dinamici e termodinamici della propulsione a reazione</i>	193-232
CAPETTI Antonio, <i>Della spinta dei gas scaricati dai motori a combustione interna a quattro tempi (con 3 tav. f. t.)</i>	233-266
III TEMA: L'elica navale	267-352
PIERROTTET Ernesto, <i>Scia di carena e comportamento in essa dell'elica navale</i>	269-294
CASTAGNETO Emilio, <i>Cavitazione nelle eliche navali</i>	295-333
POSSIO Camillo, <i>L'influenza della superficie libera sul funzionamento dell'elica marina</i>	334-352

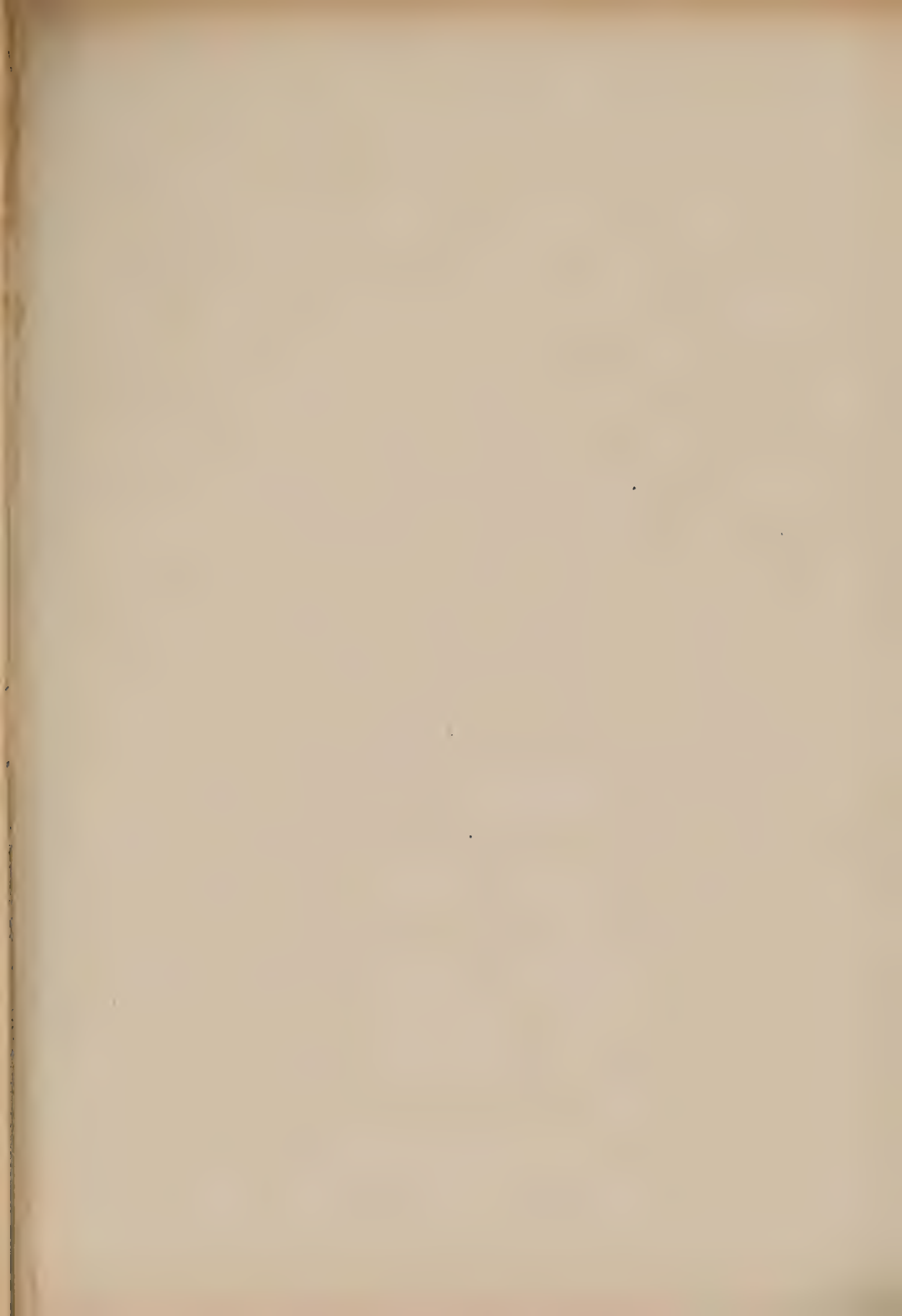
**IV TEMA: Ricerche sperimentali sull'elica aerea e
sui condotti di emissione dei gas nei sistemi a
reazione 353-507**

LABORATORIO DI AERONAUTICA DEL R. POLITECNICO DI TORINO, *Diagrammi logaritmici di eliche a passo variabile, definienti le loro caratteristiche aerodinamiche per la progettazione dei propulsori . .* 355-387

CASTAGNA A., *Eiettori per corrente gassosa. Relazione tra la loro forma e la propulsione sviluppata. Primo controllo sperimentale .* 388-442

LABORATORIO DI AERONAUTICA DEL R. POLITECNICO DI TORINO, *Torretta per la prova di eliche controrotanti* 443-460

MORTARINO Carlo, *Considerazioni ed esperimenti su eliche di minima perdita indotta* 461-507



Sistemi di propulsione per la navigazione aerea e marittima

Metodi teorici di calcolo
e controlli sperimentali

Torino
Accademia delle Scienze

1944

**SISTEMI DI PROPULSIONE
PER LA NAVIGAZIONE
AEREA E MARITTIMA**

SISTEMI DI PROPULSIONE PER LA NAVIGAZIONE AEREA E MARITTIMA

RELAZIONI AL CONVEGNO

TENUTO PRESSO

LA R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE DI TORINO

nei giorni 25 e 26 settembre 1941

TORINO

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

1943-XXI

Proprietà riservata

INTRODUZIONE

M. PANETTI.

NOTIZIA STORICA

Nella adunanza a Classi riunite del 27 settembre 1940 l'Accademia delle Scienze di Torino, già cimentatasi ad un primo esperimento di attività collegiale con la pubblicazione del volume sui *Combustibili nazionali e sul loro impiego*, e convinta dei vantaggi che iniziative di questo genere possono recare al progresso scientifico ed alle sue applicazioni, accolse la proposta di un secondo studio collegiale *sui sistemi di propulsione della navigazione aerea e navale*, riconoscendo l'importanza del tema per l'economia ed il prestigio nazionale.

Il programma, esposto in una successiva riunione del 18 dicembre 1940, e perfezionato in quella del 15 gennaio 1941 dallo scrivente, che aveva, in quel tempo, l'onore di presiedere l'Accademia, comprendeva la trattazione teorica e sperimentale dei problemi del rendimento, di quelli meccanici e strutturali e dei processi tecnologici e di fabbricazione dei propulsori.

L'iniziativa, segnalata ai Ministeri della Marina e dell'Aeronautica, al Consiglio nazionale delle ricerche, alla Associazione Italiana di Aerotecnica, alle Industrie ed agli Istituti sperimentali specializzati, ebbe le migliori accoglienze.

Si cominciarono subito gli scambi di vedute fra il Laboratorio di Aeronautica del Politecnico di Torino, che si assumeva la direzione dei lavori, e la Vasca nazionale per le Esperienze di Architettura navale in Roma; mentre Professori della Facoltà di Ingegneria di Pisa e di Genova e l'Istituto per le applicazioni del Calcolo di Roma, assicuravano la loro collaborazione per il primo quesito.

Per la trattazione del problema tecnologico, si presero accordi con l'Istituto per lo studio delle leghe leggere e coi Laboratori metallurgici della « Alfa Romeo » e della « Isotta Fraschini ». Ma le conclusioni di queste attività non parvero raggiungibili che in

un secondo tempo, mentre i contributi relativi al primo gruppo di ricerche, che, d'altronde, corrispondevano più direttamente al carattere scientifico dell'Accademia, furono rapidamente programmati.

Di essi fu data notizia in una relazione all'Accademia nella adunanza del 25 giugno 1941, nella quale fu deciso di offrire ai Relatori dei temi del primo quesito il modo di coordinare i loro studi con una discussione diretta, indicando presso la sede di Torino due giornate di studio nei giorni 25 e 26 settembre 1941, e predisponendo la distribuzione di bozze stampate delle relazioni già perfezionate.

Furono presenti a quelle giornate i Soci dell'Accademia ed i Relatori dei vari Temi; i Colonnelli del Genio Navale e del Genio Aeronautico Farina e Nuvoli, in rappresentanza dei Ministri della Marina e dell'Aeronautica, il Ten. Col. Eula, per la Direzione Studi ed Esperienze di Guidonia, il Prof. Ghizzetti, per l'Istituto delle Applicazioni del Calcolo, il Prof. Luigi Crocco, per l'A.I.D.A.; l'Ing. Castagneto, per la Vasca nazionale per le esperienze di Architettura navale in Roma, e numerosi rappresentanti delle industrie; gli Ing. Vercelli e Cibrario della « Fiat », De Caria dell'« Alfa Romeo », Granello dell'« Aeritalia », De Ambrosis della « S.I.A.I. », Demma dei « C.R.D.A. », Faraboschi della « Piaggio ».

In quelle discussioni si delinearono gli scopi salienti degli studi intrapresi, che riassumiamo in tre fondamentali:

a) il perfezionamento dei metodi di indagine per lo studio del funzionamento del propulsore, diretti ad elevarne il rendimento;

b) il paragone fra le teorie dell'elica navale, e di quella aerea e dei risultati raggiunti dall'una e dall'altra;

c) effetti propulsivi, ottenibili per reazione.

La chiusura delle giornate di studio venne a coincidere con la adunanza del 26 settembre 1941, nella quale l'Accademia di Torino prese atto dei risultati raggiunti nella discussione.

In seguito si integrarono per via epistolare gli scambi di idee già avvenuti, mentre nel Laboratorio di Torino si eseguivano le ricerche sperimentali, previste dal programma, come mezzo di controllo e di perfezionamento delle indagini teoriche.

Frattanto però le difficoltà create dalla guerra andavano crescendo, tanto che le altre due parti del programma apparvero ben presto di realizzazione troppo difficile, pur essendo pervenuti alcuni importanti studi sulla metallurgia e la fabbricazione delle eliche in lega leggera, riguardanti la colata dei lingotti, la lavo-

razione plastica ed i trattamenti termici, che potranno costituire il nucleo di una nuova attività.

Fu quindi deciso di limitare al primo quesito il volume da pubblicare, come risultato immediato della iniziativa presa, portando a compimento le Relazioni, che lo riguardano, raggruppate intorno a 4 temi, designati coi titoli:

1° *Principi e trattazioni teoriche;*

2° *La propulsione a reazione;*

3° *L'elica navale;*

4° *Ricerche sperimentali sull'elica aerea e sui condotti di emissione dei gas nei sistemi a reazione.*

La loro elaborazione nella forma definitiva occupò i primi mesi del 1942, fino al novembre di quell'anno, data di inizio delle devastazioni sistematiche, compiute nella città di Torino dall'Arma aeronautica inglese, che danneggiarono i mezzi sperimentali, paralizzando le possibilità di studio; e successivamente, l'8 agosto 1943, colpirono la tipografia Bona, distruggendo i fogli del volume, già stampati, corrispondenti alle prime 10 Relazioni, la composizione ancora in piedi e tutti gli zinchetti.

Fortunatamente l'opera non andava distrutta, perchè un esemplare superstite della parte già stampata e gli estratti delle 10 Relazioni, depositati in altra sede, ne assicuravano la sopravvivenza, e ne permisero la ristampa anastatica.

Fu così che, ricostituite in seguito ad un lento e faticoso lavoro, le attività culturali ed esecutive, sia pure con le limitazioni imposte dalle condizioni anormalissime della vita, si poterono condurre a termine le ricerche sperimentali sulle eliche contro rotanti e sulle eliche Goldstein nell'ultimo trimestre del 1943 e nel primo del 1944, riunendo le Relazioni relative al gruppo delle precedenti, nel presente Volume, col quale l'Accademia di Torino dà compimento alla sua iniziativa.

ARGOMENTO

La materia trattata nelle 12 monografie che compongono il volume si può coordinare in una esposizione riassuntiva dell'argomento, raggruppando le Relazioni intorno alle 3 tesi segnalate nella precedente notizia, come scopi fondamentali dello studio.

Ne risulterà per il lettore un collegamento fra lavori molto pregevoli ciascuno separatamente per l'oggetto trattato, ma anche

meglio apprezzabili nel loro insieme, ai fini che lo studio collegiale si era proposto, come preparazione a progressi ulteriori del problema della propulsione.

Inoltre questa esposizione sintetica vuol tener conto delle discussioni avvenute nelle giornate di studio, e degli scambi epistolari fra i Relatori, che le seguirono, mettendo in evidenza il contenuto essenziale di quelle meditazioni.

Prima Tesi.

I METODI DI INDAGINE PER LO STUDIO DEL PROPULSORE

La prima delle finalità proposte allo studio collegiale consistente nel perfezionamento delle teorie dell'elica, per elevarne il rendimento, fu oggetto delle relazioni del primo tema, sui principi fondamentali della teoria e suoi sviluppi, e di una parte di quelle del quarto riguardante le ricerche sperimentali. Ad essi era necessario premettere una esposizione sintetica dei metodi di risoluzione del problema del funzionamento del propulsore. Si assunse tale compito il Prof. PISTOLESI, a cui si deve la prima Relazione *sull'aerodinamica dell'elica aerea*.

La portata di essa è anche più vasta di ciò che il titolo dichiara; poichè i principi della fluido-dinamica, applicati nelle teorie del propulsore ad elica, che la monografia espone, sono estendibili anche all'elica navale; se si astrae dalle particolarità del problema che la riguarda; prima fra tutte la sostituzione di un fluido pesante, limitato superiormente da una superficie libera, al fluido indefinitamente esteso, in cui l'elica aerea lavora, e pel quale è lecito trascurare l'effetto della gravità; e, in secondo luogo, i fenomeni di compressibilità nell'aria e di cavitazione nell'acqua. All'una ed all'altra di queste differenziazioni sono riservate nel presente volume trattazioni speciali, mentre la dimostrazione della applicabilità dei metodi della aerodinamica allo studio dell'elica navale, anche se, per differenza di tradizioni, sono diversi i parametri e gli sviluppi, risulta dalla 2ª Relazione, scritta dal Prof. Ferrari, affrontando il parallelo nel carattere più spiccatamente differenziatore fra le due eliche: la larghezza relativa delle pale.

Premesso questo avvertimento ricorderemo della monografia del Pistolesi quel pochissimo che occorre per stabilire i collegamenti con le altre. L'Autore vi espone i due problemi fondamentali:

quello diretto, consistente nella deduzione delle forme e delle dimensioni dell'elica, data la distribuzione della circuitazione lungo il raggio della pala e dato il rapporto di funzionamento; e quello inverso; data la geometria dell'elica, calcolare, per ogni valore del rapporto, la distribuzione, lungo il raggio, delle azioni fluidodinamiche, e in conseguenza, la spinta e la coppia.

I metodi di risoluzione dell'uno e dell'altro problema sono svolti nella esposizione magistrale del Pistolesi nei successivi gradi della loro approssimazione.

Il primo è quello che si fonda sulla ipotesi semplificatrice della equivalenza dell'elica effettiva con una ideale, costituita da infinite pale di identica larghezza complessiva. Essa permette di considerare il moto del fluido, relativo al propulsore, come moto permanente, con velocità funzioni di due sole coordinate: radiale e longitudinale.

La teoria delle macchine rotative a fluido (compressori elicotici o centrifughi e turbine) si vale, come è noto, con vantaggio, di questo stesso artificio.

Esso chiarisce efficacemente i caratteri del funzionamento, sopra tutto se si astrae dalla resistenza di profilo.

Appare allora nel modo più semplice la diretta dipendenza della propulsione dai parametri fondamentali: il *passo aerodinamico medio ridotto*, che il dispositivo della rotazione delle pale, intorno ai loro assi di imperniamento, può modificare fra i limiti più ampi, e la *larghezza media complessiva*, riferita al raggio del disco, in semplice relazione con la *solidità*, che si definisce come rapporto fra l'area totale delle pale e l'area del disco.

Risulta così che il fattore principale della efficienza del propulsore è l'eccedenza del passo ridotto, sul rapporto di funzionamento.

Essa corrisponde al regresso, base della teoria dell'elica navale: e su questa equivalenza si possono stabilire i legami fra le due teorie.

Si riconosce, in oltre, che la solidità esalta l'efficienza, ma abbassa il rendimento.

Si deduce finalmente l'elica di massimo rendimento indotto con una legge di distribuzione particolarmente semplice della velocità di scia lungo il raggio. Accettandone, per tutti i regimi ad alto rendimento, le espressioni delle caratteristiche, si deduce uno schema capace di spiegare in modo semplice il funzionamento dell'elica a passo variabile, regolata per numero di giri costante.

Però la teoria dell'elica con infinite pale non può evidentemente spiegare come un'elica tripale sia più vantaggiosa di una bipale di uguale solidità.

Occorrono mezzi di indagine più perfezionati, che nella sintesi del Pistolesi sono esposti coi loro caratteri fondamentali, cominciando da quelli che risolvono il problema, per mezzo di un coefficiente correttivo, dato dal rapporto fra le velocità indotte nel caso dell'elica con infinite pale e quelle corrispondenti al caso reale, fino ai procedimenti esatti, che considerano l'induzione delle schiere dei semivortici sfuggenti dalle varie pale, in ragione della variazione della circuitazione lungo ciascuna di esse.

Questi ultimi impongono sviluppi analitici di gravissima complicazione, che furono oggetto di molte ricerche, per rendere il problema accessibile.

La via di risoluzione meno ardua è quella data dal Goldstein, ricorrendo alla equazione differenziale del potenziale del campo creato dal sistema di vortici suddetto. Essa fu considerata quindi come punto di partenza per le calcolazioni svolte da Autori diversi, e permette, come caso speciale, la ricerca, su base rigorosa, dell'elica di minima resistenza indotta, detta per l'appunto elica Goldstein.

Dopo i tentativi di risoluzione approssimata, il Pistolesi espone il metodo di Sandi-Kawada, nel quale il potenziale viene espresso con serie, i cui coefficienti sono funzioni di Bessel, nonché quello del Reissner, che costruisce il campo con un sistema di sorgenti.

Le equivalenze e le divergenze dei due procedimenti vi sono esaminate; mentre, sottolineando la possibilità di tabulazione delle formule del Kawada, si prepara il lettore ad apprezzare il contributo della 3ª Relazione del 1º Tema.

La seconda di esse è quella già menzionata del Prof. Carlo FERRARI, *Sull'influenza della larghezza finita delle pale*, studio poderoso ed originale, che contiene al tempo stesso la dimostrazione della applicabilità all'elica navale delle teorie create per l'elica aerea, e la ragione fondamentale del minore rendimento di quella rispetto a questa.

Paragonando, di fatto, nel funzionamento isolato i valori dei buoni rendimenti nei due campi, senza preoccuparsi di precisare i massimi raggiungibili, si possono indicare i valori di 0,85 e di 0,70 rispettivamente per l'elica aeronautica e per quella navale, mentre la larghezza relativa delle pale passa da 0,12 a 0,50, onde

appare evidente la relazione di causa ad effetto, che deve collegare i due fenomeni.

Il presupposto della applicabilità dei procedimenti adottati per l'elica aerea ad uno strumento della stessa natura, ma di proporzionamento così diverso, quale è l'elica aeronautica, è convalidato dalla elaborazione dei dati sperimentali con la quale, secondo il procedimento di Lock, si può risalire dalle caratteristiche dell'elica a quelle del profilo della sezione rappresentativa.

Il FERRARI la applica alle eliche della serie Inglese di solidità uguale a 0,068, e ne deduce i noti diagrammi di portanza e di resistenza, corrispondenti ad ali di allungamento normale, pei quali la costante angolare per allungamento infinito ha valore prossimo al teorico 2π .

Applica poi lo stesso procedimento ad alcune eliche navali, sperimentate alla Vasca di Roma, di solidità 0,51, giungendo per la così detta sezione rappresentativa a diagrammi di portanza sensibilmente concavi verso l'alto, ed a valori del coefficiente angolare metà circa di quello sopra ricordato, del tutto analoghi a quelli ottenuti dallo Zimmermann per ali di allungamento prossimo all'unità.

Ciò premesso, viene affrontata la trattazione teorica col metodo del potenziale delle accelerazioni, che l'A. estende dal problema dell'ala con apertura finita, trattato da Kármán-Burgers, a quello dell'elica, mettendone in evidenza la maggiore semplicità concettuale, e la equivalenza col procedimento classico, fondato sul meccanismo vorticoso, al quale identicamente si giunge.

Tale meccanismo risulta di infiniti vortici elementari a staffa, aderenti col loro lato intermedio agli elementi radiali della superficie, a cui la pala sottilissima è ridotta, ed estesi coi semi vortici coniugati liberi, fino all'infinito, nella direzione del moto relativo.

Come superficie delle pale, per evitare eccessive complicazioni, si adotta quella di un elicoide retto.

La ricerca assai laboriosa e, dal punto di vista matematico, profonda, conduce ad una generalizzazione del teorema di Kutta Joukowski, in quanto la forza che si esercita sopra un elemento di pala è data dal prodotto esterno della vorticità aderente per la velocità relativa, moltiplicata per la densità del fluido e per l'area dell'elemento.

Così vengono calcolate le azioni aerodinamiche, a cui si somma, per i profili con punta anteriore, quali sono generalmente quelli delle eliche navali, la così detta aspirazione dello spigolo.

La impostazione dei calcoli è fatta per il problema inverso, dell'elica.

Ma l'A., nell'ultimo paragrafo, affronta anche il problema diretto, cioè la determinazione dell'elica di dato raggio, fissate le caratteristiche aerodinamiche, che si vogliono ottenere.

Il procedimento si fonda sulla dimostrazione che è lecito calcolare la circuitazione intorno ad un generico profilo, e quindi la sua portanza, con l'ordinaria teoria dell'elica a pale strette, purchè si assuma il coefficiente angolare di portanza per allungamento infinito, uguale al valore ideale 2π , moltiplicato per un fattore di riduzione funzione del raggio, che vi è definito e discusso.

Dallo studio del Ferrari siamo dunque autorizzati a concludere che il fenomeno prevalente delle pale di grande larghezza consiste nella minore pendenza del diagramma delle portanze per i profili delle singole sezioni. Esso non provoca, per virtù propria, una diminuzione del rendimento; ma la favorisce, in quanto, aumentando l'incidenza, per la quale i profili debbono operare, allo scopo di produrre la trazione desiderata, accresce l'influenza nociva della resistenza di profilo, che l'incidenza esalta.

Sensibili progressi non sembrano quindi possibili, se non a patto di attenuare le resistenze; al quale fine può essere utile l'uso di materiali di alta qualità, che permettano di ridurre gli spessori delle pale, e la verniciatura, per diminuire la rugosità superficiale.

La terza Relazione firmata dai Prof. FERRARI, GHIZZETTI e POSSIO, *Sulla distribuzione della circolazione lungo il raggio col metodo Sandi-Kawada*, offre il mezzo di eseguire i calcoli relativi ai due problemi fondamentali dell'elica, tenendo conto del numero finito delle pale.

Come si disse a proposito della Relazione sintetica del Pistolesi, il procedimento prescelto per la preparazione delle tabelle numeriche, è stato quello di Sandi-Kawada, che, partendo dal potenziale del campo generato dalle schiere di vortici liberi, distribuiti sulle superficie elicoidali, tracciate dalle pale rotanti ed avanzanti nello spazio, deduce gli incrementi di velocità, e, per mezzo di essi, scrive le equazioni, che determinano la circuitazione lungo il raggio.

Immaginata divisa la pala in un numero finito di tronchi, attribuendo a ciascuno di essi, come fosse costante, il valore medio corrispondente della circuitazione, le equazioni differenziali del

problema si trasformano in altrettante equazioni algebriche lineari quanti sono i valori incogniti della circuitazione.

I coefficienti delle suddette incognite sono funzioni soltanto del rapporto di funzionamento e del numero delle pale. I termini noti dipendono dai caratteri geometrici dell'elica.

Dato il numero elevato dei parametri, coi quali i suddetti caratteri possono essere definiti, ci si dovette limitare a pochi di essi, facendone una opportuna scelta.

Si fissarono perciò due sole leggi di variazione della larghezza relativa delle pale; e si adottò, come legge di variazione della loro incidenza apparente, una funzione lineare del raggio, atta a rappresentare, con la opportuna scelta delle costanti, la modificazione della legge suddetta, prodotta dalla manovra della variazione del passo. Finalmente il numero delle pale fu variato da 2 a 4, ed il rapporto di funzionamento da 0,2 a 2.

Il calcolo dei coefficienti delle incognite fu eseguito con le formole approssimate di Nicholson, relative alle funzioni di Bessel, con argomento immaginario, dall'Istituto per le applicazioni del Calcolo, ad opera del Prof. Ghizzetti, che ne verificò l'approssimazione con una ricerca laboriosissima, completando così la tabulazione delle suddette funzioni, con vantaggio del corredo matematico che le riguarda.

In seguito furono risolte le equazioni fra i 10 valori medi della circuitazione nei 10 tronchi, ricavandoli come funzioni lineari delle costanti g , introdotte per definire la variazione dell'incidenza apparente. I risultati sono raccolti in 30 tabelle, corrispondenti a tutte le possibili combinazioni delle 2 leggi della larghezza relativa; dei 3 casi del numero di pale e di 5 valori del rapporto di funzionamento, fra i limiti citati.

Una terza parte della Relazione, scritta dal Possio, dimostra con esempi come si possano dedurre dal tracciato dell'elica le costanti g , e successivamente si ricavano dalle tabelle suddette, per dati rapporti di funzionamento, i valori della circuitazione, che permettono il tracciamento del diagramma del carico aerodinamico lungo la pala, dal quale, per integrazione, si deduce la spinta del propulsore.

Osservando poi, che i coefficienti delle equazioni risolventi si possono calcolare indipendentemente dalle forme delle pale, si suggerisce un processo di iterazione, applicabile al caso in cui tali forme differiscono sensibilmente da quelle assunte per il calcolo delle tabelle.

Finalmente si dimostra la possibilità di risolvere per mezzo delle stesse tabelle il problema diretto dell'elica, e se ne svolge un esempio, assumendo come legge di distribuzione della circuitazione quella che dà luogo alla minima perdita di energia indotta, determinata dal Goldstein.

Viene così messo a disposizione del progettista, in forma semplice, e con guida sicura, il mezzo, sino ad oggi più perfetto, di risoluzione dei problemi dell'elica.

Il gruppo degli studi sull'elica aerea si completa con quelli di carattere sperimentale contenuti nelle Relazioni sul 4° tema.

Ha stretti rapporti con la precedente ricerca la Relazione dell'Ing. MORTARINO dal titolo *Considerazioni ed esperimenti su eliche di minima perdita indotta*.

In una prima parte dello studio sono discusse le approssimazioni accettate nel calcolo dell'elica di minima perdita indotta, ed è esposto un metodo che, mediante alcune ipotesi semplificative, permette di individuare l'elica di minima perdita totale per una particolare condizione di volo, in relazione alla libertà consentita dai dati di progetto.

Segue la impostazione di esperimenti come mezzo di controllo della attendibilità del metodo di calcolo, e col fine di dedurre il rendimento per gli altri regimi di funzionamento.

Come oggetto delle prove sono state scelte due eliche: una di tipo Goldstein e un'altra designata come normale, quasi esattamente simile all'elica NACA 5868-9 di frequente impiego pratico.

La Goldstein è stata calcolata in base alle tabelle di Lock e Yeatman (A.R.C.R. M 1674 1935-36). La legittimità del confronto è stabilita dalla condizione che le due eliche, in corrispondenza del massimo rendimento, soddisfino agli stessi dati di progetto.

Gli esperimenti del Mortarino, dei quali era stata data notizia nelle « Giornate di studio », vennero ripetuti da lui, come è detto nelle notizie, dopo il rinnovamento dei mezzi di ricerca, raggiungendo una maggior precisione nella misura della coppia, e furono estesi ai calettamenti da 10° a 60°.

Risultò, per l'elica Goldstein, un rendimento massimo, superiore di circa il 3,3% a quello dell'elica normale. Tale superiorità si può realizzare però soltanto alle alte velocità di volo. Invece nei regimi di involo e di salita, l'elica Goldstein sperimentata risultò alquanto meno vantaggiosa dell'elica normale.

Poichè però i profili usati per le due eliche sono differenti, non si può dire a priori in quale misura l'inferiorità della Goldstein

sia da attribuire al particolare disegno della sua pala, o ai profili. Si ritiene che predomini l'influenza del disegno, e si vede perciò la necessità di eliminare tale caratteristica sfavorevole. Il fatto che, per essa, il rendimento rimane elevato in una estesa zona del rapporto di funzionamento intorno al massimo, fa ritenere possibile di ottenere, mediante il coordinamento di calcoli analitici con esperimenti, l'elica di miglior compromesso fra le principali esigenze dei regimi più importanti di funzionamento, se si accetta un lieve abbassamento della vetta dei suoi rendimenti.

Per documentare poi l'influenza dei fattori che sfuggono per ora all'esame teorico, parve opportuna una elaborazione della serie più importante delle ricerche sperimentali note: e precisamente di quella eseguita dal NACA, nel triennio 1937-39. Ne furono raccolti i risultati più caratteristici nel diagramma Eiffel, normalmente adottato in Italia per la scelta dell'elica adatta ad un dato motore con determinata velocità e quota di volo, e per la determinazione del comportamento dell'elica in tutti gli altri regimi di volo, supposta nota la curva di calibratura del motore alle varie quote.

Questo compito è stato assolto con la Relazione intitolata *Diagrammi logaritmici di eliche a passo variabile*, nel quale sono discusse le influenze della forma della gondola motrice, della solidità dell'elica, del profilo, della distribuzione del passo lungo il raggio e della figura geometrica delle pale sull'efficienza e sul rendimento del propulsore.

Vi è segnalato il carattere del diagramma del coefficiente di trazione, quando l'incidenza effettiva dei profili, per una sufficiente estensione della pala, raggiunge il valore critico.

Particolare importanza ha la parte della monografia, che riguarda l'influenza della compressibilità dell'aria, quale risulta dalle ricerche sperimentali citate, in quanto la teoria dei fenomeni ipersonori, per la gravissima complicazione dei calcoli, non conduce per ora a risultati suscettibili di concrete applicazioni, nelle eliche.

Le conclusioni dei Rendiconti Americani segnalano tale influenza a cominciare dai regimi, per i quali il numero di Mach, riferito alla velocità periferica delle pale, supera 0,5 nelle condizioni corrispondenti alla manovra di involo ed al volo in salita.

In questi regimi di fatto, essendo l'incidenza grande, le velocità massime sul dorso delle pale possono superare la velocità del suono, anche quando la velocità assintotica è metà appena di essa.

Oltre alle influenze del numero di Mach, sia sui coefficienti τ e z di trazione e di coppia, sia sul rendimento η , dipendentemente dai caratteri geometrici e di funzionamento, sono dati i fattori di correzione di τ , z ed η , mercè i quali si può passare dai valori che ad essi competono, escludendo il fenomeno di compressibilità, a quelli che risultano, tenendone conto.

Tali fattori sono deducibili da schiere di diagrammi riferiti al numero di Mach, nell'intervallo da 0,5 a 0,9, ciascuno dei quali corrisponde ad un dato valore del rapporto fra il coefficiente di trazione, preso in considerazione, e quello critico.

Con l'uso dei suddetti diagrammi si risolve il problema, sia nel caso del passo costante, sia in quello della sua variazione regolata per numero di giri costante. La via da seguire è chiarita con opportuni esempi.

Finalmente, per rispondere ai quesiti posti dall'impiego sempre più frequente delle eliche coassiali controrotanti, suggerite dalle esigenze di progetto dei motovelivoli, nei quali si debbano concentrare grandi potenze su piccolo numero di assi, per non menomare la maneggevolezza dell'aereo, il Laboratorio di Torino aveva messo allo studio una torretta di ricambio della sua bilancia dinamometrica per eliche, capace di misurare separatamente le coppie assorbite da due eliche coassiali controrotanti.

L'apparecchio, appena costruito all'epoca della attività collegiale di cui riferiamo, fu messo in azione nelle giornate di studio del settembre 1941, e successivamente adoperato per esaminare il comportamento di alcuni tipi di questi speciali propulsori, la cui teoria è tuttora limitata alle approssimazioni di primo grado: quelle che ammettono, per ciascuna elica, la sostituzione di infinite pale di larghezza complessiva equivalente.

Fu quindi presentata dal Prof. PANETTI e dall'Ing. MORTARINO una Relazione dal titolo *Torretta per eliche controrotanti*, che ne descrive e discute le caratteristiche. Il nuovo strumento non modifica le possibilità della bilancia, capace di misurare la somma delle coppie e la spinta del complesso delle due eliche, nonchè le eventuali azioni di deriva; ma la integra con la misura separata delle due coppie, grazie allo sdoppiamento della trasmissione dal giogo cardanico alle eliche, realizzata con due molle coassiali indipendenti, reagenti per flessione, i cui capi subiscono rotazioni relative, proporzionali ai momenti trasmessi.

La misura delle rotazioni consente quindi, grazie alla taratura delle molle, la valutazione dei momenti.

A tale scopo, fra le due molle, è interposto un tubo rigido, collegato alle loro estremità, in basso, dal lato del comando, e sorreggente all'altra estremità due avvolgimenti di costantana, isolati fra loro, ed estesi a mezzo giro circa, i cui capi sono portati fuori dell'apparecchio. Su di un lato dell'avvolgimento i tratti di filo nudi permettono prese di corrente striscianti, per mezzo di contattori, portati dalle estremità superiori delle molle, le cui rotazioni modificano la lunghezza dell'avvolgimento compresa fra un capo ed il contatto strisciante.

La resistenza elettrica corrispondente varia quindi proporzionalmente alla rotazione, e viene misurata con un ponte di Wheatstone.

Il proporzionamento delle molle è fatto in modo di elevare al massimo il numero critico, che ad esse corrisponde, senza rinunciare alla deformabilità necessaria. La torretta può di fatto raggiungere senza fenomeni vibratori i 2600 giri, e misura con la massima rotazione dei suoi contattori coppie di 2080 kg.mm., mentre la discontinuità della misura, per effetto della inserzione di una spira in ciascun avvolgimento, corrisponde a 10 kg.mm., ai quali corrisponde quindi la insensibilità dello strumento.

Seconda Tesi.

L'ELICA NAVALE

Il problema dell'elica navale è stato studiato considerandola sia isolata, sia soggetta all'influenza della scia di carena e del battente idraulico sul suo asse.

A differenza dell'elica aerea, di fatto, i fenomeni di induzione del corpo, al quale è fissata, sono di grande rilievo, perchè l'elica navale è sistemata a poppavia della carena, le cui dimensioni, rispetto al raggio del propulsore, sono, in oltre, grandiose.

Occorre quindi, più che mai, distinguere il rendimento dell'elica isolata, da quello realizzabile nel suo funzionamento effettivo con la nave; e quest'ultimo si definisce come rapporto fra la potenza occorrente al rimorchio, e quella trasmessa all'asse del propulsore, congiunto alla carena, per ottenere la stessa velocità di avanzamento.

Naturalmente la misura della resistenza da vincere col rimorchio deve essere fatta, tenendo conto di tutte le particolarità di forma della carena, nonchè delle prese e degli scarichi, che si realizzano in navigazione.

Sarebbe, di fatto, irrazionale imputare alla propulsione le perdite dovute a queste singolarità.

Il rendimento dell'elica, congiunta alla nave, si determina sperimentalmente con le prove di *auto-propulsione* alla vasca, misurando la spinta dell'elica in presenza della carena, e confrontandola con la resistenza al rimorchio.

Ne risulta una perdita supplementare di rendimento, che si dovrà aggiungere a quella dell'elica isolata, e che, secondo esperimenti della vasca di Roma, può variare dal 5 al 10% col variare della velocità e del rapporto di funzionamento: cosicchè i buoni rendimenti dell'elica navale discendono da 0,70 a 0,65, e anche a 0,60, in conseguenza dei fenomeni di mutua induzione fra carena e propulsore.

Questi fenomeni appartengono a due ordini di fatti distinti. Da un lato si devono considerare le deformazioni che le forme poppiere della nave provocano sulla corrente relativa al propulsore, riducendone la velocità, e alterandone la fisionomia ideale di moto uniforme, con la convergenza a valle delle linee di corrente.

Dall'altro lato bisogna tener presente che la depressione a monte del propulsore riduce la contropressione sulla parete di poppa della carena, aumentandone la resistenza all'avanzamento, e quindi provocando una perdita di rendimento.

Il primo di questi fenomeni, ossia l'induzione della carena sull'elica, prende in architettura navale il nome di effetto di scia. Il secondo si dice risucchio.

Il Prof. PIERROTET, della Facoltà di Ingegneria di Genova, tratta questo problema con la sua Relazione: *Scie di carena e comportamento dell'elica navale*, sottolineando anzitutto il significato attribuito alla parola scia, per designare il fenomeno generale della deformazione del campo, provocato dalle forme poppiere della carena, anzichè il moto vorticoso della zona ristretta, chiusa entro il prolungamento dello strato limite, a tergo della sezione di distacco.

Perciò appunto la sua trattazione prende le mosse dallo studio del fenomeno nell'ipotesi del fluido perfetto, con questo risultato che il trascinamento dell'acqua per parte della carena, raggiunge nel piano di simmetria la velocità stessa della nave, mentre, scostandosi da esso, la velocità di scia diminuisce rapidamente di valore.

Secondo le tradizioni delle scienze navali è detto *coefficiente locale di scia* il rapporto fra la velocità dell'acqua nel suo moto

relativo alla nave e quella della nave stessa, cosicchè al valore 1 del suddetto coefficiente corrisponde l'annullamento del fenomeno di scia.

L'analisi è condotta senza tener conto della via aperta alla corrente sotto la carena, come se questa si protendesse fino a profondità infinita, secondo un fasciame cilindrico a generatrici verticali.

Quindi il trascinamento è alquanto sopravvalutato.

Ma, d'altra parte, come l'Autore osserva, non potendosi mettere esattamente in conto nè l'influenza dell'attrito, nè quella della turbolenza, la ricerca teorica non può condurre a risultati aderenti alla realtà, nella quale sappiamo che il campo delle velocità a poppavia di una carena differisce profondamente da quello deducibile con la teoria dei moti fluidi a potenziale.

Perciò il Prof. Pierrotet ricorre ai risultati sperimentali ottenuti nella Vasca di Roma, sopra accennati, osservando che essi danno direttamente il valore medio del coefficiente di scia, relativo al disco di elica, non come semplice media aritmetica, ma come valore efficace, nei riguardi del modo di operare del propulsore.

Il procedimento consiste nel confronto dei diagrammi numero di giri-spinta, per le diverse velocità di avanzamento, tracciati per l'elica in presenza della carena e per l'elica libera.

I rapporti delle velocità, calcolati per punti di uguali coordinate delle due serie di diagrammi, sono le medie efficaci dei coefficienti locali di scia.

Per mezzo di questi coefficienti, osserva l'Autore, è possibile passare dal regresso apparente dell'elica a quello effettivo, poichè essi permettono di dedurre la velocità con la quale l'elica avanza nel suo moto relativo all'acqua in cui opera, mentre, dal numero di giri e dal passo, si deduce la velocità nominale.

Riferendosi pertanto alle prove di collaudo di una nave veloce, col sussidio dei risultati sperimentali del Froude sulle relazioni fra regresso e rendimento, l'Autore ne deduce che col crescere della velocità della nave il coefficiente di scia cresce fino a superare l'unità; ossia la velocità di trascinamento diminuisce fino a cambiar segno per la prevalenza della corrente di regresso (effetto della reazione dell'elica sull'acqua) sulla corrente di trascinamento provocata dalla carena.

L'Autore ritiene che questo fenomeno si possa anche spiegare col moto a potenziale intorno alla carena, per il quale, come è noto, nel tratto compreso fra la sezione maestra e l'estremità di poppa (regione delle eliche nelle navi a 2 ed a 4 assi) la velocità

dell'acqua in moto relativo può superare quella assintotica del campo, e quindi l'eccedenza della prima sulla seconda, per posizioni non troppo vicine all'estremità di poppa, può essere diretta all'indietro.

La Relazione termina con la discussione dell'interdipendenza fra i coefficienti di scia e di risucchio, favorevole il primo e contrario il secondo al rendimento, per discuterne il valore globale.

Il Relatore poi, e con lui i partecipanti alle giornate di studio hanno espresso il voto che apposite esperienze alla vasca e misure in navigazione e in rimorchio permettano di chiarire ulteriormente il problema.

La seconda Relazione del tema riguarda il fenomeno della cavitazione, dannoso al rendimento dell'elica, non meno che alla integrità del materiale, di cui è costituita. Esso impone limiti alla sua velocità periferica, e quindi al suo raggio ed al numero di giri; come succede per l'elica aerea in conseguenza della compressibilità dell'aria.

L'analogia fra i due fenomeni non è, del resto, soltanto formale, ma fisica; e si estende alla loro localizzazione, che, per entrambi, corrisponde alle sezioni, nelle quali si verificano le massime velocità relative, cioè alle porzioni anteriori del dorso delle pale, in prossimità del massimo raggio, a cui corrispondono, per conseguenza, le depressioni più accentuate.

Raggiungendosi in quelle regioni la velocità del suono nel caso dell'elica aerea, si verificano i fenomeni dell'onda d'urto, accompagnati, come si disse, da una diminuzione del rendimento.

Nell'elica navale, invece, le depressioni provocano la separazione dell'aria disciolta nell'acqua e la sua stessa vaporizzazione, quando la pressione effettiva, risultante dalla differenza fra la pressione atmosferica, incrementata del battente idraulico, e la pressione dinamica, corrispondente alla velocità, scende al disotto della tensione del vapore saturo alla temperatura ambiente.

Allora l'acqua si trasforma rapidamente in una emulsione, il cui comportamento è paragonabile a quello del vapore a basso titolo x , di densità $\varrho = \varrho_a(1 - x)$, detta ϱ_a la densità dell'acqua, rispetto alla quale è trascurabile quella del vapore.

La piccola densità della emulsione riduce talmente la velocità di propagazione dell'onda di pressione in seno ad essa, che un vero fenomeno d'urto si produce nel suo movimento relativo alla pala verso la zona delle pressioni crescenti, ossia verso l'orlo di uscita. Ivi ha luogo la ricondensazione, e quindi il martellamento del

metallo, per effetto della precipitazione del liquido nelle regioni occupate dalle bolle di vapore.

Nelle giornate di studio questo problema fu accennato dallo scrivente e dal Prof. Codegone, facendo notare che, ammessa la legge isentropica, interpretabile, per approssimazione con la formula di Rankine $pr^k = \text{costante}$, l'esponente k , dato il titolo x molto basso, ha valore assai minore dell'ordinario.

Ad esempio per $x = 0,20'$ e $t = 20^\circ \text{C}$, si può ritenere $k = 0,8$. Essendo allora $c = 1'g_0$, e quindi $p = C'(g_0 a)^k (1 - x)^k$, si deduce la velocità a di propagazione dell'onda di pressione dalla formula

$$a^2 = \frac{dp}{dg_0} = \frac{dp}{dx} \frac{dx}{dg_0} = \frac{kp}{g_0(1-x)}.$$

Per i valori già citati, supponendo $p = 0,2 \text{ kg/cm}^2$, risulterebbe $a = 40 \text{ m/s.}$, che dimostra la possibilità del regime d'urto, anche con le velocità moderate delle eliche navali.

Il fenomeno è stato studiato a fondo dal Prof. Ackeret di Zurigo, nella sua memoria su « *Forschung auf dem Gebiete des Ingenieur-wesen* » (gennaio e febbraio 1930), applicando le equazioni dell'urto alla corrente della emulsione, in fase di riduzione del volume delle bolle di vapore, fino al loro annullamento, e tenendo conto dell'energia cinetica della massa dell'acqua, nel suo moto centripeto rispetto alla bolla, che va riducendo il suo diametro.

Gli effetti del rapidissimo aumento di pressione nella zona d'urto delle pale, consistenti in profonde erosioni del metallo, tanto più temibili quanto più porosa è la sua struttura, impongono la scelta razionale del materiale. In questo indirizzo ha svolto la sua azione l'Istituto tecnologico del Massachusetts, come risulta dalla nota di Hunsaker (*Progress on cavitation Research*) pubblicata sui « *Trans. ASME* » nel 1935, che riferisce sugli esperimenti di corrodibilità per urto fluido, provocati da un apparecchio vibratorio, funzionante per fenomeno di magnetostrizione.

La Relazione dell'Ing. CASTAGNETO sul tema: *Cavitazione nelle eliche navali*, premette una descrizione del fenomeno della cavitazione e degli impianti sperimentali per il suo studio, costituiti da canali, percorsi da corrente a piena sezione, ovvero con superficie libera, sotto pressione uguale all'atmosferica, o riducibile a mezzo di aspirazione.

Segnala le regioni sulle quali il fenomeno di preferenza si localizza: e cioè sulla faccia delle pale, dietro l'orlo anteriore, ai

bassi carichi; sul dorso, verso l'orlo posteriore, ai carichi medi; sul dorso verso l'orlo anteriore ai carichi massimi.

Discute in seguito la modificazione delle caratteristiche di spinta, di coppia e di rendimento di un'elica tipica al variare dell'indice di cavitazione, definito come rapporto fra l'eccesso della pressione statica sulla tensione del vapore e la pressione corrispondente alla velocità: e fa notare che tali modificazioni sono particolarmente gravi nei regimi con basso rapporto di funzionamento.

Esamina la formola dell'Eggert come criterio pratico per limitare la velocità misurata ai $9/10$ del raggio, onde evitare la cavitazione, in un'elica di data larghezza relativa di pala, e di dato spessore relativo del profilo, operante con una incidenza pure determinata.

In seguito presenta i diagrammi del Lerbs per le eliche Schaffran con pale a contorno ellittico, generatrice di faccia e di dorso rettilinea, profili parabolici a due punte, di spessore, misurato sull'asse del propulsore, uguale ad $1/20$ del diametro.

Tali diagrammi, relativi l'uno ad eliche tripale, l'altro ad eliche quadripale, consistono in linee limiti dei regimi, per i quali la cavitazione si inizia sul dorso e scompare dalla faccia, nel riferimento al rapporto di funzionamento come ordinata, ed al prodotto dell'indice di cavitazione per la solidità come ascissa.

In vero dagli esperimenti della Vasca di Amburgo, presso la quale le ricerche furono eseguite, sarebbe risultato che la solidità, entro certi limiti, ha un'influenza della stessa natura dell'indice di cavitazione per ritardare il fenomeno.

Ciascuna coppia di tali linee corrisponde ad un determinato valore del rapporto passo diametro, e limita in funzione di esso il campo, per il quale l'elica può funzionare senza cavitazione.

La Relazione si chiude con un saggio di trattazione del problema dell'elica navale coi procedimenti proprii dell'elica aerea, utilizzando i risultati sperimentali del Gutsche, relativi tanto ai profili parabolici a due punte, quanto a quelli alari, per fornire le massime depressioni sulla faccia e sul dorso di essi con diagrammi riferiti al coefficiente di portanza ed allo spessore relativo alla corda.

Riesce così possibile prevedere le zone in cui la cavitazione si manifesta, adottando un procedimento di iterazione per il calcolo degli incrementi, necessari a stabilire con quale valore effettivo della portanza ciascun profilo operi.

Vi sono pure riportati i diagrammi di correzione, coi quali si tiene conto della depressione, che il moto rotatorio della scia d'elica provoca per centrifugazione della massa fluida, e quelli coi quali si valuta il così detto effetto di cascata, cioè l'induzione di ciascuna pala sulle adiacenti, come mezzo approssimato di trapasso dalla teoria dell'elica con infinite pale, a quella che considera il loro numero effettivo.

La differenza più caratteristica fra l'aerodinamica e l'idrodinamica dei corpi parzialmente, o totalmente immersi, a poca profondità dalla superficie limitante la massa liquida, in movimento rispetto ad essa, consiste nel moto ondoso, che deforma tale superficie, in modo di soddisfare alla condizione della pressione costante in tutti i suoi punti, appartenenti al confine dello spazio occupato dal liquido pesante.

Nasce così, per effetto statico dei dislivelli e dinamico delle velocità proprie del moto ondoso, una resistenza addizionale, che da un certo valore della velocità in poi cresce in modo rapidissimo.

Il parametro, in base al quale, si stabilisce la similitudine del fenomeno è il numero di Froude $V/\sqrt{gh}$ essendo h una delle dimensioni del corpo in immersione.

Anche il problema dell'elica navale subisce l'influenza di questo fenomeno, in misura tanto maggiore quanto più grande è il rapporto ϵ del suo raggio alla profondità del suo asse, la quale ultima può essere scelta come dimensione h di riferimento del numero di Froude. Ma evidentemente una risoluzione teorica del problema è possibile, senza esagerate complicazioni, soltanto nell'ipotesi che l'elica rimanga costantemente tutta sommersa, con un certo margine, cioè quando ϵ è sensibilmente minore dell'unità; nel qual caso la superficie libera del fluido, per effetto del moto ondoso, si scosta dal piano limite di riposo di quantità piccole rispetto al raggio dell'elica. Bisogna, in oltre, rinunciare a tener conto dell'effetto del numero finito delle pale. In tal modo, di fatto, l'elica si può ridurre al suo disco, sulle cui facce crea una differenza di pressione, in stretto legame con l'incremento della velocità in corrispondenza di esso, ossia con la velocità di regresso, che ivi possiede la sua scia.

La resistenza addizionale, dovuta al moto ondoso, si può allora calcolare, per approssimazione, come quella di una piastra immaginaria di ugual raggio, che, nel moto entro un fluido esteso indefinitamente, creasse lo stesso salto di pressione.

Si è detto piastra immaginaria, perchè il salto di pressione realizzato da una piastra reale, è naturalmente di segno opposto a quello generato dall'elica con ufficio propulsivo.

D'altra parte il calcolo della resistenza d'onda, eccitata dal moto di un corpo di forma qualsiasi, è stato risolto dall'Havelock in due note inserite nei « Proceeding of the Royal Society » di Londra degli anni 1927 e 1933, dando formole generali, che la determinano come effetto del movimento delle singolarità (sorgenti o dipoli) con le quali si può generare il campo intorno al corpo.

Tali singolarità sono quelle che impongono alla velocità del campo la condizione di tangenza alla superficie del corpo.

Nel caso dell'elica, e limitatamente al campo esterno al tubo di flusso, che ha per sezione il suo disco, queste singolarità si possono ridurre ad una distribuzione di sorgenti negative (pozzi) su di esso.

Ciò è stato dimostrato dal Dickmann in una nota pubblicata dall'« Ingenieur-Archiv » nel 1932, riconoscendo l'identità delle funzioni potenziali nella suddetta regione, quando la carica dei pozzi sia tale da provocare una portata doppia di quella che corrisponde all'incremento assiale al disco provocato dall'elica.

In modo intuitivo si può riconoscere l'analogia dei due fenomeni, osservando che il complesso dei pozzi crea all'esterno del tubo di flusso, circoscritto all'elica, una velocità centripeta, che, componendosi con quella del moto traslatorio, provoca la convergenza delle linee di corrente da monte a valle del disco, carattere distintivo della scia d'elica in fase propulsiva.

Il Prof. POSSIO, nella sua *Relazione Influenza della superficie libera sul funzionamento dell'elica marina*, riprende questo problema che il Dickmann aveva trattato, limitandosi a collocare un pozzo isolato nel centro del suo disco, e lo svolge considerando una distribuzione uniforme di pozzi sul disco, e giungendo ad una espressione della resistenza d'onda composta di una serie, il cui primo termine è quello già noto, mentre i successivi permettono di apprezzare con maggiore approssimazione il fenomeno, nel caso di rapporti ε fra raggio e profondità, prossimi ad uno.

Dimostra poi come alla resistenza d'onda corrisponda una maggiore velocità incrementale al disco, per mezzo della quale calcola la variazione del rapporto di funzionamento, e, conseguentemente, la perdita di rendimento, tanto più grave quanto più ε si accosta all'unità ed il numero di Froude, riferito alla profondità dell'asse, si innalza, ossia cresce la velocità di avanzamento.

Finalmente estende la ricerca al caso di più eliche collaboranti, studiandone l'interferenza, nei riguardi del fenomeno ondoso, e deducendone, nell'ipotesi di due eliche gemelle, il valore in funzione del rapporto fra la distanza dei loro assi e la profondità, il quale valore, come percentuale della perdita totale, è presso a poco indipendente dal numero di Froude.

Possiamo pertanto concludere che le tre Relazioni del PIERROTET, del CASTAGNETO e del POSSIO, integrandosi con quella del FERRARI sull'influenza della larghezza delle pale, mettono in rilievo tutti i caratteri distintivi dell'elica navale rispetto all'elica aerea; danno un importante contributo al progresso dello studio razionale della prima; e potranno costituire il fondamento di ulteriori sviluppi, sopra tutto se integrate con ricerche sperimentali, che, alla luce dei principi in esse svolti, riusciranno particolarmente istruttive.

Terza Tesi.

LA PROPULSIONE PER REAZIONE

La terza tesi riguarda la propulsione per reazione, sia come sostituibile a quella realizzata dall'elica, sia come integrazione di essa.

L'applicazione, di carattere totalitario, acquista tutto il suo rilievo nei regimi velocissimi, per i quali l'elica si dimostra incapace a conservare le sue buone qualità, in conseguenza dei fenomeni di compressibilità nell'aria e di cavitazione nell'acqua.

Invece la spinta, ottenibile con la emissione di un fluido da una capsula viaggiante, non dipende dalla velocità del recipiente, se non per fatti secondari, che è lecito, in prima approssimazione, trascurare; quindi il lavoro propulsivo, che esso sviluppa, cresce con la velocità della corsa, e il campo della sua prevalenza è proprio quello in cui l'elica è deficiente.

Il razzo, primitiva realizzazione del principio, utilizza per la produzione dei gas da emettere una sostanza termogena, che è al tempo stesso combustibile e comburente; ma questa, col suo peso elevato per unità di calore sviluppabile, grava sull'autonomia del trasporto. Perciò l'antico strumento della reazione è stato sostituito col termopropulsore, che porta con sé il solo combustibile, e capta l'aria occorrente alla sua combustione.

L'alto rendimento del termopropulsore è però subordinato a due condizioni: quella che la velocità di volo sia un'aliquota abbastanza cospicua della velocità di emissione dei gas; e quella che la combustione avvenga sotto pressione.

La prima è condizione del buon rendimento propulsivo, e la seconda del buon rendimento termodinamico; poichè, come è noto, quest'ultimo aumenta con la pressione, alla quale ha luogo l'introduzione di calore nel cielo.

Ora queste due condizioni sono antitetiche. In vero la velocità di efflusso raggiunge quella del suono, appena la pressione interna alla camera è doppia di quella dell'ambiente in cui avviene lo scarico (rapporto critico); mentre le massime velocità raggiunte in aviazione sono poco superiori alla metà di quella della propagazione del suono. Quindi, soddisfacendo scarsamente alla seconda condizione, si toccano già i limiti, pei quali il regime cessa di essere vantaggioso rispetto alla prima.

D'altra parte la compressione preliminare dell'aria captata presenta difficoltà di effettuazione, non essendo sufficiente la presa dinamica con le velocità attuali del volo.

Si ricorre perciò a compressori meccanici, rinunciando alla semplicità dello schema, che dovrebbe idealmente consistere in un condotto, che dalla apertura di prua raggiunge la camera di combustione e da essa si estende a poppa fino all'ugello di scarico.

Finalmente, per aumentare la spinta disponibile, si è data all'ugello la funzione di *ciettore*, introducendo una presa d'aria addizionale, che si immette nel circuito, percorso dal getto dei gas di scarico, viene da esso trascinata e resa partecipe al fenomeno di reazione (sistemi a evoluzione ripartita).

È noto di fatto che la quantità di moto di una corrente, da cui dipende la spinta di reazione, si può esaltare aumentandone la portata a spese della velocità, con associazione di altra massa fluida, semprechè l'urto fra il fluido trascinante e quello trascinato, che ha luogo nell'atto del mescolamento, avvenga con piccola perdita di energia.

Concludendo: lo schema del termopropulsore si può riassumere come segue: a prora la presa dinamica integrata con una compressione meccanica moderata, per la quale è sufficiente un gruppo moto compressore di piccola potenza, realizza le condizioni favorevoli alla introduzione di calore susseguente, effettuata da combustori.

Per mezzo di essi ha luogo quella che il Campini, realizzatore in Italia del volo a reazione, chiamò moltiplicazione della potenza, nel senso che la propulsione ottenibile, grazie al calore direttamente immesso nei gas, può corrispondere ad una potenza meccanica di gran lunga superiore a quella installata per il compressore.

In seguito, immettendo nel condotto di scarico una corrente d'aria addizionale, si abbassa la velocità di efflusso al valore con-

veniente per conciliarla con la velocità del volo, in modo di assicurare un buon rendimento di propulsione.

La bontà del sistema dipende dalla possibilità di tenere alti i rendimenti delle sue varie trasformazioni di energia, con opportuni compromessi fra le grandezze in giuoco; e il quadro da discutere si presenta vasto, suggestivo e complesso.

Opportunamente quindi il Prof. POGGI nella sua Relazione sui *Principi dinamici e termodinamici della propulsione a reazione*, si propose sopra tutto di discutere i rendimenti delle varie modalità dello strumento.

Egli considera più specialmente l'influenza della diluizione della miscela, di cui definisce come fattore il rapporto fra il peso di combustibile abbruciato per unità di peso d'aria, e quello che occorrerebbe alla utilizzazione integrale dell'ossigeno presente. Fa dipendere da essa il rendimento termodinamico della introduzione di calore, mentre con essa si coordina anche il rendimento propulsivo, per l'influenza, già avvertita, della portata del fluido sull'effetto della reazione.

A proposito dei sistemi ad evoluzione ripartita, mette in evidenza il vantaggio di premettere al miscelamento dell'aria supplementare coi gas caldi, erompenti dalla camera di combustione, una espansione atta a ridurre la differenza delle loro velocità, dato che con questa differenza crescono le perdite del miscelamento.

Finalmente discute le possibilità dei recuperi di calore, offerti dalla refrigerazione e dallo scarico del motore ausiliario per la compressione.

La Relazione del Prof. CASTAGNA dal titolo *Eiettori per corrente gassosa*, affronta invece, anche col sussidio di ricerche sperimentali, il problema dell'ugello di scarico, sul quale si concentra il fenomeno della reazione, e ne deduce le relazioni fra la legge di variazione della sezione e la spinta ottenibile con un dato salto di pressione fra la camera dei gas e l'esterno, nei vari rapporti possibili fra la pressione dell'ambiente di scarico e quella terminale dell'ugello.

Questa può essere maggiore o minore della pressione esterna, quando si forma un'onda d'urto, rispettivamente esterna od interna all'orifizio.

Il caso della pressione terminale uguale alla pressione esterna si realizza costantemente soltanto con un'espansione interamente iposonora, ovvero con un proporzionamento dell'ugello, predisposto alla caduta di pressione disponibile.

L'Autore tratta il problema con molta finezza e rigore di analisi, servendosi di parametri adimensionali, esprimenti i rapporti delle pressioni e delle temperature ai valori iniziali, nonché quelli della velocità alla velocità limite, corrispondente all'espansione adiabatica nel vuoto.

Dimostra che la spinta diventa massima quando l'espansione si estende a tutto l'ugello, raggiungendo al suo termine la pressione di scarico.

Altri regimi capaci di aumentare ulteriormente la velocità di efflusso danno spinte minori; mentre possono verificarsi regimi particolarmente sfavorevoli alla grandezza della spinta, se il salto di pressione utilizzato in espansione è scarso.

Notevole il fatto, messo in evidenza coi calcoli, e precisato con risultati numerici, che ugelli, limitati al solo tronco convergente, danno costantemente spinte prossime alle massime.

I risultati sono raccolti in un diagramma sintetico, riferito ai parametri adimensionali indicati.

Finalmente una apposita apparecchiatura sperimentale del Laboratorio di Aeronautica di Torino, consistente in una capsula di forme esterne affusolate, collocata nella galleria aerodinamica ad alta velocità, ed alimentabile con aria a pressione regolabile entro ampi limiti ha reso possibile al Prof. Castagna il controllo sperimentale delle teorie svolte, pesando la differenza fra la spinta sviluppata dal getto di scarico per reazione e la resistenza opposta dal corpo fusiforme alla corrente della galleria.

I risultati ottenuti sono prossimi a quelli della teoria per il caso corrispondente, e ne costituiscono quindi una conferma, dimostrando che i fenomeni, ritenuti come secondari, possono effettivamente essere trascurati. In particolare è stata indagata l'influenza del fenomeno aerodinamico esterno al corpo sul comportamento dell'ugello; e fu accertato che, nei limiti delle velocità sperimentate, tale influenza si può ridurre alla caduta di pressione alla luce di efflusso, deducibile nel fuso inerte, indipendentemente dalla funzione affidatagli di propulsore.

La utilizzazione della reazione dei gas di scarico dei motori, come contributo alla propulsione del veicolo, è stata oggetto della Relazione del Prof. CAPETTI dal titolo *Spinta dei gas scaricati dai motori a combustione interna a quattro tempi*.

Anche per essa si verifica la proprietà fondamentale che, trattandosi di grandezze praticamente indipendenti dalla velocità del veicolo, salvo l'effetto di depressione allo scarico, la potenza

propulsiva, che se ne può ricavare, cresce con la velocità stessa. Quanto al valore della spinta, essendo il tracciato dei condotti di scarico, segnatamente nell'attraversamento delle valvole, lontanissimo dalla forma razionale di un ugello utilizzatore dell'energia disponibile, era da attendersi, come l'Autore osserva, una grande variabilità della reazione con le dimensioni e le forme dei collettori di accompagnamento dei gas, fino alle luci di efflusso.

Il Prof. CAPETTI premette un calcolo teorico della spinta, supponendo l'espansione nelle valvole limitata al rapporto critico, e continuata poi nelle tubazioni.

Ne deduce, per condizioni medie di funzionamento, una spinta di reazione uguale a 50 volte la portata in peso dei gas di scarico; e, di fatto, tale valore verrà confermato come prossimo ai massimi realizzabili dalla bella serie di esperienze, istituite sul monocilindro C.F.R. e sul Fiat 6 cilindri 120, con la più grande varietà di tubi di scarico. Nella serie dei tubi sperimentati segnaliamo il dispositivo di tubi indipendenti per ogni cilindro, o in servizio di gruppi di tre, o col carattere di collettore generale, e, in oltre, variabili per lunghezza e sezione terminale, entro i limiti più ampi.

Le misure furono eseguite con maggior sensibilità e comodità di metodo, pesando l'azione dei gas di scarico contro una piastra opposta al getto, e normale ad esso, ad opportuna distanza dallo sbocco, dopo aver constatata l'identità dei valori così ottenuti, con quelli deducibili dalla misura diretta della reazione.

Le prove hanno rivelato l'enorme influenza delle variabili, e sopra tutto della sezione di efflusso, e dello sviluppo longitudinale dei tubi di scarico, in rapporto col numero di giri e dei cilindri del motore.

I risultati delle molte centinaia di esperimenti eseguiti sono raccolti in diagrammi, che danno i valori della *reazione specifica* (quoziente della reazione totale per la portata in peso dei gas di scarico) in funzione delle citate variabili.

Il giudizio su di essi è stato riassunto nel modo seguente dall'Autore:

Una spiegazione almeno parziale può essere trovata anzitutto nell'esistenza di fenomeni di risonanza. Infatti i massimi relativi della reazione compaiono per lunghezze e numeri di giri tali, che il periodo degli scarichi risulta eguale o multiplo intero del periodo di oscillazione propria dei tubi, considerati come canne sonore, chiuse ad un estremo ed aperte all'altro.

Operando in condizione di tali massimi sul motore 120 al regime di 3000 giri al minuto, con tubi di scarico separati per ciascun

cilindro, lunghi m. 4,5 circa, si raggiunge, per la reazione specifica, un massimo assoluto uguale a 60.

Quando si è lontani dalla risonanza, il tubo acquista invece la funzione di ricevitore, ossia colla sua capacità trasmette più o meno attenuate le pulsazioni, che la velocità possiede al suo imbocco, cioè all'uscita dalla valvola di scarico. L'attenuazione è naturalmente tanto maggiore quanto più ristretto è lo sbocco, perchè allora aumenta la differenza media di pressione tra l'interno e l'esterno del tubo, mentre il valor medio della velocità di efflusso (a cui la reazione specifica è in massima proporzionale) aumenta colla velocità angolare del motore, ossia con la portata che deve essere scaricata nell'unità di tempo.

La tubazione di scarico esercita poi anche una funzione passiva, creando resistenze al moto del gas, e disperdendo una parte del calore posseduto da essi.

Tale azione non deve essere rilevante, come risulta dal confronto dei massimi di prima e seconda risonanza, constatati col motore C.F.R. a 900 giri. Di fatto, essendosi ottenuta la prima risonanza con 12 m. di tubazione, e la seconda con 6 metri, la reazione specifica risultò per la prima inferiore che per la seconda; ma in misura ridotta; segno che la maggiore resistenza del tubo più lungo ha effettivamente agito, ma con lieve risultato.

Le misure contemporanee della reazione di scarico, della potenza e del rendimento volumetrico del motore hanno permesso di rilevare come la forma e le dimensioni dell'apparato di scarico non esercitino un'azione notevole sul motore, fino a che non si scenda a valori estremamente ridotti della sezione di efflusso. Nelle esperienze del Prof. Capetti, la contropressione si è fatta sentire decisamente solo per sezioni a cui corrispondevano velocità medie dell'ordine di 250 m./s.

La Relazione si chiude con la definizione del proporzionamento degli scarichi, in modo di ottenere la massima reazione specifica, utilizzabile come complemento della spinta propulsiva.

Il contributo dato dalle due monografie del Prof. CAPETTI e dell'Ing. CASTAGNA al problema della propulsione per reazione è dunque di grande rilievo, per la concretezza dei risultati raggiunti nei due campi della applicazione del principio, col concorso felice della indagine teorica e della ricerca sperimentale.

I TEMA.

PRINCIPI E TRATTAZIONI TEORICHE

E. PISTOLESI

L'aerodinamica dell'elica aerea.

SOMMARIO: 1. Principi fondamentali e cenno storico. — 2. I due problemi dell'aerodinamica dell'elica. — 3. L'elica ad infinite pale. — 4. La condizione di minima perdita per l'elica ad infinite pale. — 5. Perfezionamento della teoria per l'elica ad infinite pale. — 6. L'allungamento virtuale. — 7. Il calcolo approssimato delle velocità indotte per l'elica con numero finito di pale. — 8. Calcolo rigoroso della velocità indotta col metodo dell'integrazione. — 9. Calcolo della velocità indotta col metodo potenzialteoretico. — 10. Il metodo potenzialteoretico del Reissner. — 11. Altri metodi approssimati per il calcolo delle velocità indotte. — 12. Contributo della resistenza di profilo. — 13. Risoluzione del 2° problema. — 14. Metodo dell'allungamento virtuale. — 15. Metodo di Glauert o dell'incidenza effettiva. — 16. Metodi sintetici o globali: metodo della sezione rappresentativa. — 17. Metodi di correzione globale: calcolo dell'elica senza induzione. — 18. Correzione globale per l'induzione. — 19. Metodo degli incrementi medi. — 20. L'elica a passo variabile. — 21. Influenza del mozzo. — 22. L'elica fortemente caricata. — 23. L'elica in corrente non uniforme e in corrente obliqua. — 24. Eliche in tandem e controeliche. — 25. Altri problemi: eliche intubate; eliche con molte e larghe pale; mutui influssi. — 26. Influsso delle alte velocità.

1. — *Principi fondamentali e cenno storico.*

Il calcolo aerodinamico dell'elica aerea, dopo un primo periodo di incertezze e di tentativi, durato fino al 1921, trovò la sua base sicura nella teoria vorticosa di PRANDTL trasferita dal problema dell'ala finita a quello dell'elica.

Le prime ricerche di PRANDTL risalgono al 1918; ed è del 1919 la memoria di BETZ (*Schraubenpropeller mit geringstem Energieverlust*) ⁽¹⁾, nella quale si pone per la prima volta con esattezza il concetto dell'elica come un sistema di vortici aderenti, distesi lungo le pale, e di un sistema di vortici liberi, uscenti dalle pale

(¹) Vedasi Bibl. [B 4].

stesse e fluenti liberamente nella scia a valle dell'elica ⁽¹⁾. Si ammette in detta memoria che i vari elementi dei vortici liberi, in analogia a quanto già si ammetteva nella teoria di PRANDTL per l'ala finita, mantengano inalterata nello spazio la posizione in cui sono stati formati, di guisa che la loro configurazione sia quella di eliche cilindriche coassiali all'elica, di passo uguale all'avanzo V/n (V = velocità di avanzamento, n = numero di giri al secondo). Si estende inoltre alla portanza agente su ogni elemento di pala il teorema di KUTTA-JOUKOWSKI. La prima ipotesi è stata successivamente precisata dimostrando che le linee vorticoso libere coincidono con le linee di corrente riferite ad assi rotanti con l'elica ⁽²⁾; dimodochè l'ipotesi in discorso equivale a trascurare, di fronte alle *velocità relative apparenti* (velocità dei punti delle pale riferite al fluido immobile a grande distanza dall'elica), le *velocità incrementali* indotte dai vortici del sistema (aderenti e liberi). La teoria dell'elica basata su tale ipotesi risulta pertanto una *teoria di prima approssimazione*, come è di prima approssimazione la teoria alare di PRANDTL. I successi da questa ottenuti e le conferme sperimentali che l'hanno collaudata autorizzano, salvo casi eccezionali, ad adottare anche per l'elica analoghe semplificazioni.

Se, sempre in analogia con la teoria alare, si sostituisce al sistema vorticoso aderente su ciascuna pala un unico *vortice aderente*, che, nella maggior parte dei casi pratici, potrà ritenersi avere un andamento *radiale*, il sistema dei vortici aderenti si ridurrà ad un numero p di vortici radiali simmetricamente disposti intorno al centro nel cosiddetto *disco dell'elica*, mentre il sistema dei vortici liberi rivestirà tanti elicoidi retti quanti sono quelli descritti nel moto roto-traslatorio dell'elica dai raggi a cui i vortici aderenti sono legati.

Il BETZ non si limitò alla descrizione di questo sistema vorticoso, ma estese subito ad esso teoremi analoghi a quelli dimostrati nella teoria dei sistemi portanti. Si hanno, così, i *teoremi di BETZ*: «La perdita di energia complessivamente derivante dal mutuo influsso di due elementi di pala d'elica è uguale a quella che si avrebbe in corrispondenza di uno solo di essi se i vortici

⁽¹⁾ Un accenno a tale configurazione vorticoso si trova anche in lavori anteriori, ma con errori di concetto e senza sviluppi o deduzioni di qualche entità.

⁽²⁾ Questa dimostrazione, nonchè l'estensione all'elica del teorema di KUTTA-JOUKOWSKI e lo studio del campo di velocità e di pressioni attorno all'elica sono stati effettuati dallo scrivente nelle note [A 7, 8] del 1922.

elicoidali dell'altro si estendessero indefinitamente nei due sensi »; e « in un'elica le cui pale siano simmetricamente (regolarmente) disposte sul disco, la velocità indotta in un punto di una pala è metà di quella indotta nel punto corrispondente dell'elicoide relativo a detta pala, a distanza infinita a valle dell'elica ».

Si dimostra pure con semplici ragionamenti sintetici che la velocità indotta all'infinito sugli elicoidi induttori, quando la distribuzione di circuitazione sulle pale è quella cui corrisponde — per una data spinta — la minima perdita di energia, è uguale a quella che si genererebbe nel fluido per un moto traslatorio assiale (o rotatorio) degli elicoidi stessi, supposti materializzati ⁽¹⁾.

La velocità indotta, sulle pale dal sistema dei vortici liberi sarà — per il teorema citato — metà della precedente.

Considerazioni di simmetria mostrano che queste velocità indotte sono ortogonali alle superficie degli elicoidi induttori.

Queste ricerche di BETZ contengono in germe la teoria aerodinamica dell'elica e i metodi di calcolo che ne derivano; ma non enunciano esplicitamente il concetto fondamentale del procedimento.

Questa enunciazione, se dobbiamo credere alla dichiarazione di v. KÁRMÁN e BIENEN ⁽²⁾, fu data per la prima volta in Italia dallo scrivente in una conferenza tenuta all'Associazione Italiana di Aerotecnica [A 6] e subito sviluppata in un'ampia ricerca [A 8], anteriore ad altre analoghe che vennero pubblicate in altri Paesi mano mano che le teorie di PRANDTL venivano a conoscenza degli studiosi.

Sia concesso un breve cenno di carattere, dirò così, storico alle circostanze in cui tale enunciazione ebbe luogo.

Fino a quel tempo (1921) il calcolo aerodinamico dell'elica si faceva in base alla cosiddetta teoria alare, estendendo agli elementi di pala le proprietà aerodinamiche delle ali, secondo l'indirizzo di DRZEWIECKI e di altri. Vi erano peraltro due punti assai oscuri: essendo noto che le caratteristiche aerodinamiche di un'ala dipendevano (in maniera allora ignota) dall'allungamento, quale allungamento « virtuale » dovevasi attribuire agli elementi di pala? Inoltre, essendo manifesto, in base a semplici considera-

⁽¹⁾ Per i teoremi qui enunciati vedasi l'opera citata, oppure: E. PISTOLESI, *Aerodinamica* [Bibl. VI], pag. 471 e seguenti.

⁽²⁾ V. Bibliografia [D 4]. I due Autori si riferiscono alla nota [A 10] del 1923; ma l'impostazione e lo sviluppo della teoria risalgono all'anno precedente (memoria [A 8]).

zioni sintetiche ricavate dai teoremi della quantità di moto e del momento della quantità di moto, che l'aria che investe le pale dell'elica possiede già una certa velocità incrementale (la « vitesse préalable » di SOREAU), prodotta (oggi diremmo *indotta*) dal funzionamento dell'elica, dovevasi, e fino a che punto, tenere conto di tale velocità nel calcolo dell'incidenza e della velocità relativa all'aria degli elementi di pala?

La teoria di PRANDTL sull'ala di allungamento finito gettò chiara luce sul problema fino allora oscuro, additandone senza ambiguità la razionale soluzione: le caratteristiche aerodinamiche da attribuire agli elementi di pala sono quelle dell'ala di allungamento infinito e la velocità relativa dell'aria rispetto alla pala si deve calcolare tenendo conto degli incrementi di velocità indotti dai vortici liberi.

Queste parole, che si leggono nella citata conferenza, costituiscono, potremmo dire, l'atto di nascita della teoria aerodinamica dell'elica.

Esse presuppongono approssimazioni semplificative in tutto analoghe a quelle che si ammettono nella teoria dell'ala di apertura finita e che sono — come già si è accennato — giustificate dalla rispondenza di tale teoria all'esperienza.

La suindicata risposta agli interrogativi che gravavano sulla teoria dell'elica è suscettibile anche di una diversa interpretazione: non tener conto esplicitamente delle velocità indotte, ma assegnare agli elementi di pala un *allungamento virtuale* che ne tenga conto implicitamente, cioè un allungamento corrispondente alla variazione d'incidenza (ossia all'incidenza indotta) dovuta agli incrementi.

L'uno e l'altro punto di vista furono poi sviluppati dallo scrivente nel più ampio lavoro, che già abbiamo citato.

2. — I due problemi dell'aerodinamica dell'elica.

Possiamo considerare per l'elica, come per l'ala di apertura finita, due problemi:

1° *problema*: Data la distribuzione della circuitazione lungo il raggio della pala, determinare, per un dato valore del rapporto di funzionamento $\lambda = \frac{V}{R\Omega}$ ⁽¹⁾, la forma dell'elica che realizza tale distribuzione e calcolare la spinta e il momento dell'elica;

(1) Vedasi, per il significato dei simboli, l'elenco alla fine della relazione.

2° problema: Data la forma della pala (forma e calettamento delle sezioni ai vari raggi) determinare la distribuzione della circuitazione e quindi la spinta e il momento dell'elica per un dato valore del rapporto di funzionamento.

La risoluzione del primo problema è legata alla possibilità di calcolare le velocità indotte, nota la distribuzione della circuitazione.

Tale possibilità non presenta difficoltà concettuali.

Se indichiamo con v gli incrementi di velocità assiale, con u gli incrementi di velocità tangenziale, con c_r gli incrementi di

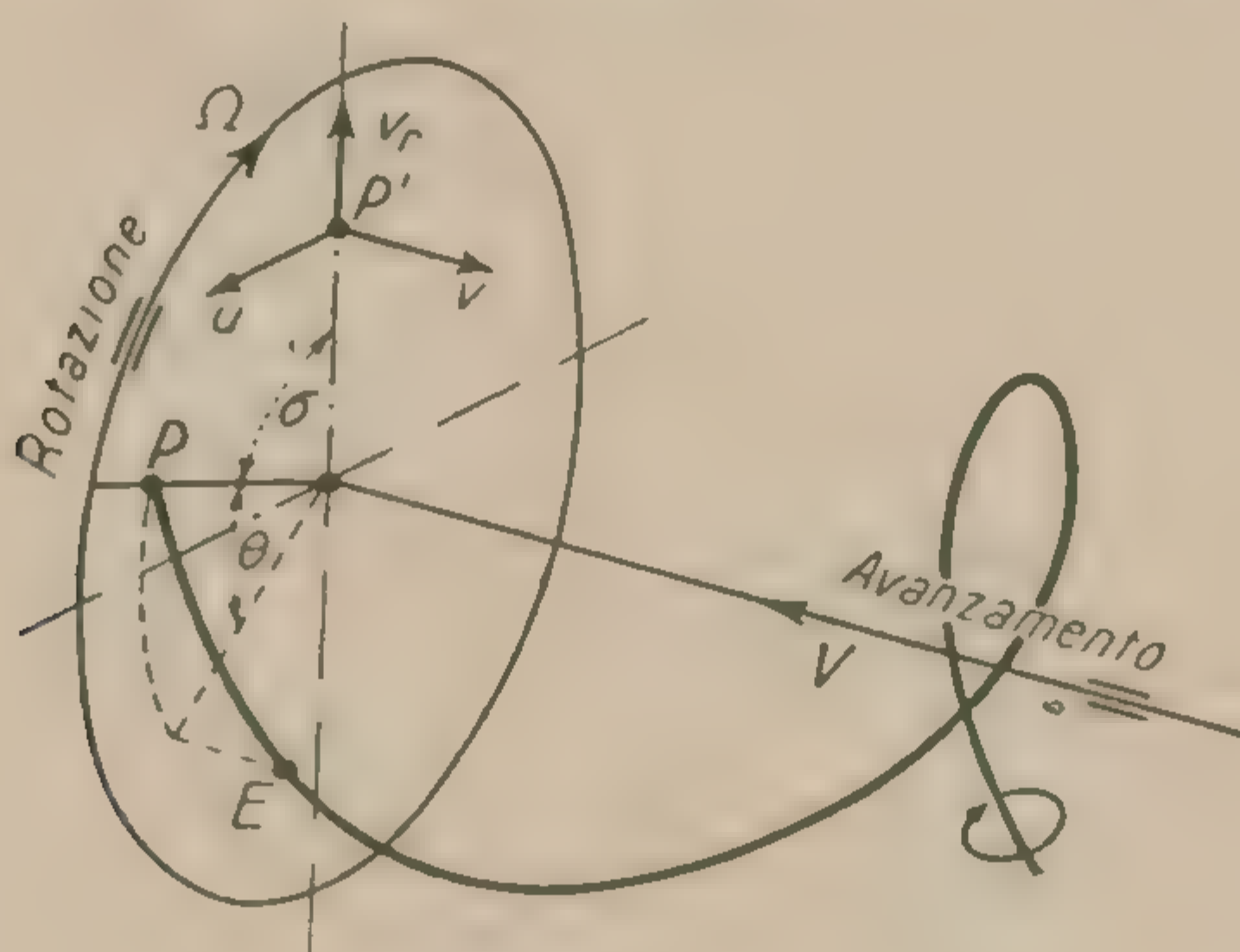


Fig. 1.

velocità radiale (ossia le componenti della velocità incrementale in coordinate cilindriche, x, θ, r), l'induzione esercitata da un filetto vorticoso elicoidale di intensità Γ , uscente (fig. 1) da un punto P del disco ($r, 0$) in un punto P' ($r', -\sigma$) del disco stesso, può determinarsi in base alla legge dell'induzione aerodinamica e fornisce ⁽¹⁾:

$$(1) \quad v = -\frac{\Gamma}{4\pi} r \int_0^\infty N^{-3/2} [r - r' \cos(\theta + \sigma)] d\theta$$

$$(2) \quad u = \frac{\Gamma}{4\pi} \cdot \frac{V}{\Omega} \int_0^\infty N^{-3/2} [r' - r \cos(\theta + \sigma) - r\theta \sin(\theta + \sigma)] d\theta$$

$$(3) \quad c_r = \frac{\Gamma}{4\pi} \cdot \frac{V}{\Omega} \int_0^\infty N^{-3/2} [r \sin(\theta + \sigma) - r\theta \cos(\theta + \sigma)] d\theta$$

⁽¹⁾ Gli angoli θ sono contati in senso opposto alla rotazione dell'elica. Per queste formule vedasi [A, 4].

dove si è posto, per brevità:

$$(4) \quad N = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\theta + \sigma) + \frac{V^2}{\Omega^2} \theta^2.$$

Tralasciando la v_r , alla quale si attribuisce un influsso trascurabile, è chiaro che il calcolo di v e di u presenta unicamente difficoltà di carattere pratico. Osserviamo in primo luogo che è opportuno mettere la (1) e la (2) in forma adimensionale. Posto:

$$\lambda_r = \frac{V}{r\Omega}$$

si può scrivere:

$$(1a) \quad v = \frac{\Gamma}{4\pi r} \int_0^\infty v^{-3/2} \left[1 - \frac{r'}{r} \cos(\theta + \sigma) \right] d\theta$$

$$(2a) \quad u = \frac{\Gamma}{4\pi r} \lambda_r \int_0^\infty v^{-3/2} \left[\frac{r'}{r} - \cos(\theta + \sigma) - \theta \operatorname{sen}(\theta + \sigma) \right] d\theta$$

dove

$$(4a) \quad v = 1 + \left(\frac{r'}{r} \right)^2 - 2 \frac{r'}{r} \cos(\theta + \sigma) + \lambda_r^2 \theta^2.$$

Si osservi che $\frac{\Gamma}{2\pi r}$ è la velocità media u_{m1} a valle del disco che corrisponde alla circuitazione Γ al raggio r ; perciò $\frac{\Gamma}{4\pi r}$ è la metà di essa, ossia l'incremento tangenziale medio sul disco, u_m . Gli integrali che compaiono a secondo membro della (1a) e della (2a) sono funzioni di $\frac{r'}{r}$ e di σ , nonchè di λ_r ; perciò potremo scrivere:

$$(5) \quad v = \frac{\Gamma}{4\pi r} f_1 \left(\frac{r'}{r}, \sigma, \lambda_r \right)$$

$$(6) \quad u = \frac{\Gamma}{4\pi r} f_2 \left(\frac{r'}{r}, \sigma, \lambda_r \right).$$

Quando le funzioni f_1 ed f_2 siano calcolate (ad es. tabellate), il problema proposto è facilmente risolto.

Se infatti $\Gamma(r)$ è la circolazione al raggio r , il filamento vorticoso che fluisce da ogni pala fra i raggi r ed $r + dr$ è $\frac{d\Gamma}{dr} dr$. Avremo pertanto sopra una pala al raggio r' :

$$(7) \quad v(r') = \frac{1}{4\pi} \int_0^R \frac{d\Gamma}{dr} \left\{ f_1 \left(\frac{r'}{r}, 0, \lambda_r \right) + f_1 \left(\frac{r'}{r}, \frac{2\pi}{p}, \lambda_r \right) + \dots \right\} \frac{dr}{r}$$

$$(8) \quad u(r') = \frac{1}{4\pi} \int_0^R \frac{d\Gamma}{dr} \left\{ f_2 \left(\frac{r'}{r}, 0, \lambda_r \right) + f_2 \left(\frac{r'}{r}, \frac{2\pi}{p}, \lambda_r \right) + \dots \right\} \frac{dr}{r}.$$

I valori di σ per cui occorre calcolare le funzioni f_1 ed f_2 sono:
 $0, \pi$ per eliche a due pale; $0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$ per eliche a tre pale;
 $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ per eliche a quattro pale; per eliche con p pale:

$$0, \frac{2\pi}{p}, \frac{4\pi}{p} \dots \frac{(p-1)\pi}{p}$$

Nell'effettuare l'integrazione rispetto ad r si incontra la difficoltà che la f_1 e la f_2 diventano infinite per $r = r'$ se $\sigma = 0$, cioè quando si effettua l'integrazione sulla stessa pala indotta. La difficoltà viene girata prendendo come valore dell'integrale il cosiddetto valore principale.

3. — L'elica ad infinite pale.

Data la difficoltà di calcolare direttamente le u, v mediante gli integrali (7) ed (8), si è dapprima ricorso all'artificio di sostituire ai valori di u e v sulla pala i valori medi lungo la circonferenza di raggio r , il che equivale a sostituire ai vortici aderenti concentrati in numero finito una vorticosità aderente diffusa su tutto il disco, spettando ad ogni settore $d\theta$ di esso una vorticità (radiale) uguale ad $p\Gamma \frac{\theta}{2\pi}$. Questa disposizione, nota col nome di *elica ad infinite pale*, porta come conseguenza che anche i vortici liberi, anzichè essere distesi su di un numero finito di elicoidi, riempiono tutto il cilindro di scia a valle del disco, distribuendosi uniformemente su ogni superficie cilindrica coassiale all'elica.

In questa ipotesi si trova facilmente, con considerazioni elementari ⁽¹⁾, che la u_{m1} all'infinito è uguale a $\frac{p\Gamma}{2\pi r}$ e che v_{m1} è uguale all'infinito a:

$$\frac{p\Gamma}{2\pi} \cdot \frac{\Omega}{V} = u_{m1} \cdot \frac{1}{\lambda_r}.$$

Gli incrementi al disco saranno pertanto:

$$(9) \quad u_m = \frac{p\Gamma}{4\pi r}; \quad v_m = \frac{p\Gamma}{4\pi} \cdot \frac{\Omega}{V} = u_m \cdot \frac{1}{\lambda_r}.$$

(1) V. PISTOLESI, *Aerodinamica* [Bibl. VI].

Se ne deduce l'espressione del *rendimento indotto elementare* al raggio r , definito dalla formula:

$$(14) \quad \eta_r = \frac{dT \cdot V}{dQ : \Omega}$$

e per le (12) e (13):

$$(15) \quad \eta_r = \frac{V}{V + v} \cdot \frac{U - u}{U},$$

prodotto di due fattori: un *rendimento assiale*:

$$(16) \quad \eta_a = \frac{V}{V + v}$$

e un *rendimento periferico*:

$$(17) \quad \eta_p = \frac{U - u}{U}$$

Questi rendimenti non sono effetto di forze dissipative (viscosità, attrito) ma dell'energia cinetica che l'elica imprime al fluido influenzato; il rendimento assiale è in relazione con le velocità assiali impresse all'aria, il rendimento periferico con le velocità tangenziali.

Se supponiamo la distribuzione di F in funzione del raggio tale da realizzare la minima perdita di energia, si ha, per il teorema di BETZ, che la w è la componente, ortogonale a W , di una velocità assiale $\bar{v}$ (AA'' in fig. 2), uguale per tutte le sezioni, cioè indipendente dal raggio. L'espressione del rendimento acquista allora un'espressione particolarmente semplice. In effetti la (15) può scriversi:

$$\eta_r = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{tg} \varphi'}$$

ossia, se, come è lecito in una teoria di prima approssimazione, si confondono le due direzioni OA' e OA'' :

$$\eta_r = \frac{V}{U} \cdot \frac{U}{V + \bar{v}}$$

$$(18) \quad \eta_r = \frac{V}{V + \bar{v}}$$

Dalla (18) si deduce che in tal caso il rendimento è costante su tutta la pala e coincide col rendimento *globale* (indotto) dell'elica.

Se nelle (12) sostituiamo i valori (9) abbiamo:

$$(19) \quad dT = ep\Gamma \left(U - \frac{p\Gamma}{4\pi r} \right) dr$$

$$(20) \quad dQ = ep\Gamma \left(V + \frac{p\Gamma}{4\pi} \cdot \frac{\Omega}{V} \right) r dr$$

dalle quali, per integrazione, si ricavano i valori di T e di Q dell'intera elica:

$$T = \int_{r_0}^R \frac{dT}{dr} dr$$

$$Q = \int_{r_0}^R \frac{dQ}{dr} dr$$

(r_0 = raggio del mozzo) risolvendo il problema del calcolo di T e di Q per l'elica di cui sia nota la distribuzione della circolazione lungo il raggio.

Per la completa risoluzione del 1° problema resta da determinare la forma dell'elica che fornisce la supposta distribuzione di circolazione. Per questo, nota w , se ne deduce l'incidenza indotta α_i semplicemente ponendo:

$$\alpha_i = \frac{w}{W} = \frac{u}{V} = \frac{c}{U}$$

e per le (9):

$$(21) \quad \alpha_i = \frac{p\Gamma}{4\pi V} \cdot \frac{1}{r}$$

D'altra parte, se si indica con l' la *larghezza di pala ridotta*, deducibile dalla larghezza di pala reale mediante la relazione:

$$(22) \quad 2\pi l' = \frac{dc_p}{da} \cdot l$$

si avrà:

$$\Gamma = \pi W' l' \alpha'$$

($\alpha' =$ incidenza effettiva) ⁽¹⁾, od anche (dato che $W' \cong W$):

$$\Gamma = \pi W l' \alpha'$$

da cui:

$$(23) \quad l' \alpha' = \frac{\Gamma}{\pi W} = \frac{\Gamma}{\pi [V^2 - U^2]}.$$

Dalla (23) si deduce il prodotto $l' \alpha'$ e quindi, fissato l' , l'incidenza effettiva α' . Finalmente l'incidenza « geometrica » o *apparente* α risulterà:

$$(24) \quad \alpha = \alpha' + \alpha_i$$

e il calettamento β della pala:

$$(25) \quad \beta = \varphi + \alpha.$$

4. — *La condizione di minima perdita per l'elica ad infinite pale.*

Se supponiamo sia verificata, sempre per l'elica ad infinite pale, la condizione di rendimento massimo, si avrà:

$$w = \bar{v} \cos \varphi$$

da cui:

$$(26) \quad v = \bar{v} \cos^2 \varphi$$

$$(27) \quad u = \bar{v} \sin \varphi \cos \varphi$$

e, per le (9):

$$(28) \quad \frac{p\Gamma}{4\pi} = \frac{V}{\Omega} \bar{v} \cos^2 \varphi = C \cos^2 \varphi.$$

Sostituendo nelle (19) e (20) si ha:

$$dT = 4\pi \rho \cdot \frac{V}{\Omega} \bar{v} \cos^2 \varphi (r\Omega - \bar{v} \sin \varphi \cos \varphi) dr$$

$$dQ = 4\pi \rho \cdot \frac{V}{\Omega} \bar{v} \cos^2 \varphi (V + \bar{v} \cos^2 \varphi) r dr$$

⁽¹⁾ Le incidenze si intendono riferite alla direzione di portanza nulla del profilo.

e integrando (per semplicità fra 0 ed R ; le varianti per il caso in cui il limite inferiore dell'integrale è $r_0 > 0$ sono ovvie), tenuto conto che:

$$\cos^2 \varphi = \frac{r^2 \Omega^2}{V^2 + r^2 \Omega^2}$$

si ha:

$$(29) \quad T = 2\pi \rho R^2 V^2 \left[\frac{v}{V} \left(1 - \lambda^2 \ln \frac{1 + \lambda^2}{\lambda^2} \right) + \left(\frac{\bar{v}}{V} \right)^2 \left(\frac{\lambda^2}{1 + \lambda^2} - \lambda^2 \ln \frac{1 + \lambda^2}{\lambda^2} \right) \right]$$

$$(30) \quad Q = 2\pi \rho R^3 W^2 \left[\frac{\bar{v}}{V} \lambda \left(1 - \lambda^2 \ln \frac{1 + \lambda^2}{\lambda^2} \right) + \left(\frac{v}{V} \right)^2 \lambda \left(\frac{1 + 2\lambda^2}{1 + \lambda^2} - 2\lambda^2 \ln \frac{1 + \lambda^2}{\lambda^2} \right) \right]$$

da cui, posto:

$$(31) \quad T = \frac{1}{2} \rho \pi R^2 V^2 c_T = \frac{1}{2} \rho \pi R^4 \Omega^2 k_T$$

$$(32) \quad Q = \frac{1}{2} \rho \pi R^3 V^2 c_Q = \frac{1}{2} \rho \pi R^5 \Omega^2 k_Q$$

$$(33) \quad P = Q\Omega = \frac{1}{2} \rho \pi R^2 V^3 c_P = \frac{1}{2} \rho \pi R^5 \Omega^3 k_Q$$

si deduce ⁽¹⁾:

$$(34) \quad c_T = 4 \frac{\bar{v}}{V} \left(1 - \lambda^2 \ln \frac{1 + \lambda^2}{\lambda^2} \right) + 4 \left(\frac{\bar{v}}{V} \right)^2 \left(\frac{\lambda^2}{1 + \lambda^2} - \lambda^2 \ln \frac{1 + \lambda^2}{\lambda^2} \right)$$

$$(35) \quad c_Q = 4 \frac{\bar{v}}{V} \lambda \left(1 - \lambda^2 \ln \frac{1 + \lambda^2}{\lambda^2} \right) + 4 \left(\frac{v}{V} \right)^2 \lambda \left(\frac{1 + 2\lambda^2}{1 + \lambda^2} - 2\lambda^2 \ln \frac{1 + \lambda^2}{\lambda^2} \right)$$

⁽¹⁾ Si vede facilmente che il rendimento indotto $\tau_n = \frac{c_T}{c_P}$ uguaglia $\frac{1}{1 + \frac{\bar{v}}{V}}$

qualora si trascuri la terza potenza del rapporto $\frac{v}{V}$.

$$(36) \quad c_P = \frac{c_Q}{\lambda} = 4 \frac{\bar{v}}{V} \left(1 - \lambda^2 \ln \frac{1 + \lambda^2}{\lambda^2} \right) + 4 \left(\frac{\bar{v}}{V} \right)^2 \left(\frac{1 + 2\lambda^2}{1 + \lambda^2} - \right. \\ \left. - 2\lambda^2 \ln \frac{1 + \lambda^2}{\lambda^2} \right)$$

$$(37) \quad k_T = c_T \lambda^2$$

$$(38) \quad k_Q = c_Q \lambda^3 = c_P \lambda^3.$$

In queste formule il primo termine al secondo membro rappresenta le caratteristiche dell'elica che si otterrebbero facendo astrazione dalla resistenza indotta, il secondo termine il contributo di questa. Vedremo in seguito l'interesse di questa osservazione. Indicheremo i primi termini, quando occorra, con l'indice p , i secondi con l'indice i .

Mancano i termini che rappresentano il contributo della resistenza di profilo. Vedremo fra poco come possano essere calcolati. Essi costituiranno i terzi termini delle formule, che indicheremo con l'indice r .

5. — *Perfezionamento della teoria per l'elica ad infinite pale.*

Se nelle (12) e (13) si sostituiscono a Γ i valori che si possono dedurre dalla (9), si ha:

$$dT = 4\pi\rho(U - u)urdr \\ dQ = 4\pi\rho(V + v)ur^2dr = 4\pi\rho \frac{V}{\Omega} (V + v)vdr.$$

Ora un raffinamento della teoria, suggerito dal PRANDTL come opportuno, specie per le eliche fortemente caricate ⁽¹⁾, per le quali è sensibile la differenza di direzione fra W e W' , si può ottenere supponendo che la velocità indotta w sia ortogonale, non già alla W , ma alla W' (fig. 3), cioè che i vortici seguano eliche di inclinazione $\frac{V + v}{U - u}$, anzichè $\frac{V}{U}$.

(¹) Cioè con forte valore del c_T . Si deduce infatti dalla (39), supposto ad es. v costante sul disco, previa integrazione fra 0 ed R :

$$c_T = 4 \left(1 + \frac{v}{V} \right) \frac{v}{V}$$

da cui:

$$\frac{v}{V} = \frac{1}{2} (-1 + \sqrt{1 + c_T}) \cong \frac{1}{4} c_T.$$

In tal caso le (9) vengono sostituite dalle seguenti:

$$(9a) \quad u = \frac{p\Gamma}{4\pi r} \quad v = \frac{p\Gamma}{4\pi r} \cdot \frac{U - u}{V + v}$$

da cui:

$$\frac{u}{v} = \frac{V + v}{U + u}$$

Sostituendo nelle (12) e (13) si ha:

$$(39) \quad dT = 4\pi\rho(U - u)urdr = 4\pi\rho(V + v)vrd r$$

$$(40) \quad dQ = 4\pi\rho(V + v)ur^2dr.$$

Le formule (39) e (40) si possono ottenere direttamente come applicazione dei teoremi della quantità di moto e del momento

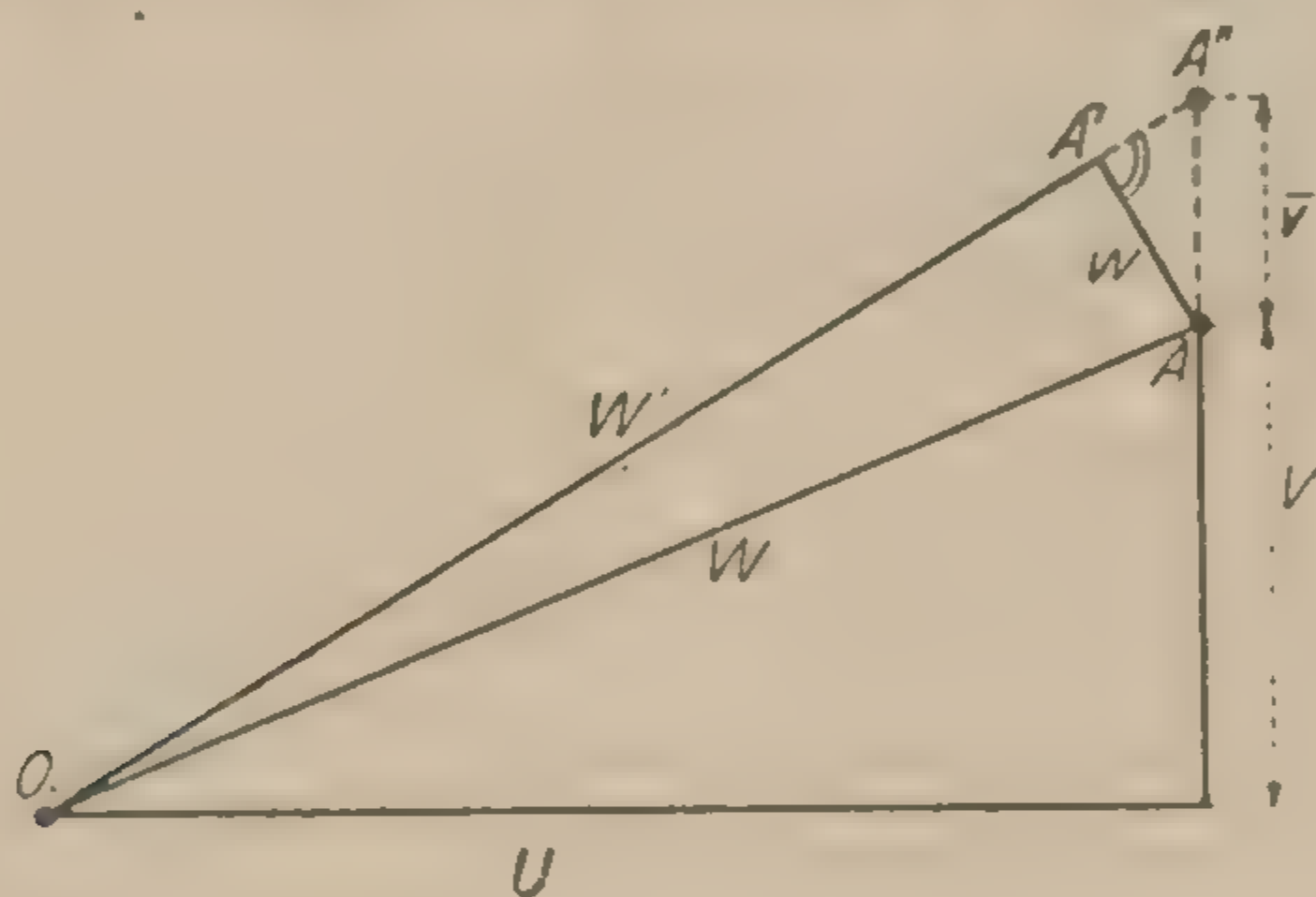


Fig. 3.

della quantità di moto. È noto peraltro che nell'applicazione di questi teoremi si debbono fare molte ipotesi e prescindere dalla depressione che regna nella scia per effetto del suo moto rotatorio e dalla contrazione della stessa. Perciò le (39) e (40) conservano, in qualsiasi modo siano dedotte, un valore di approssimazione che presenta un certo grado di arbitrarietà, di cui è difficile a priori valutare l'importanza. Ritorneremo in seguito su questo punto.

Se in base alle (39) e (40) calcoliamo il rendimento elementare al raggio r , si ha ancora la (15) che, però, può scriversi:

$$\eta_r = \frac{V}{U} \cdot \frac{v}{u}.$$

In luogo delle (26) e (27) varranno le seguenti:

$$(26a), \quad v = \bar{v} \cos^2 \varphi'$$

$$(27a) \quad u = \bar{v} \sin \varphi' \cos \varphi'$$

e per $\eta_r = \text{cost.}$, cioè nel caso di minima perdita indotta, varrà, rigorosamente in questo caso, la (18), ma l'andamento della circuitazione in funzione del raggio risulterà variata alquanto da quella espressa dalla (28) in quanto a $\cos^2 \varphi$ dovremo sostituire $\cos^2 \varphi'$.

In questo caso l'espressione dell'incidenza indotta sarà:

$$(21a) \quad \alpha_i = \frac{w}{W'} = \frac{u}{V + v} = \frac{v}{U - u} = \frac{p\Gamma}{4\pi(V + v)} \cdot \frac{1}{r}.$$

6. — L'allungamento virtuale.

Un altro modo di impostare il problema del calcolo della spinta e della coppia, analogo a quello che si segue nella teoria

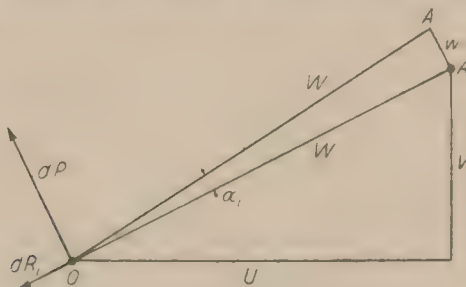


Fig. 4

dell'ala finita, è il seguente (fig. 4): l'azione aerodinamica sull'elemento di pala si suppone composta di una portanza dP ortogonale a W e di una resistenza indotta dR , diretta secondo W . Si ha allora:

$$dP = \rho \Gamma W dr$$

$$dR_i = dP \cdot \alpha_i$$

da cui, proiettando nelle direzioni assiale e tangenziale:

$$dF_a = \rho \Gamma (U - V \alpha_i) dr$$

$$dF_t = \rho \Gamma (V + U \alpha_i) dr$$

da cui, ponendo per α_i il rapporto $\frac{u}{V} = \frac{v}{U}$ si ottengono la (12) e la (13).

Possiamo anche, come già si è accennato, introdurre il concetto di *allungamento virtuale* di una sezione come l'allungamento di un'ala (con distribuzione ellittica della portanza) che al valore di c_p competente alla sezione considerata faccia corrispondere il valore di a , competente alla stessa sezione. Per questo basterà considerare che

$$c_p = \frac{2\Gamma}{Wl}; \quad a_i = \frac{c_p}{\pi A} = \frac{2\Gamma}{\pi WlA}$$

e per la (21):

$$(41) \quad A = \frac{8r}{pl} \quad \frac{V}{W} = \frac{8r}{pl} \sin \varphi.$$

Facendo uso della (21a) si troverebbe in modo analogo:

$$(41a) \quad A' = \frac{8r}{pl} \sin \varphi'.$$

7. — *Il calcolo approssimato delle velocità indotte per l'elica con numero finito di pale.*

Le conclusioni precedenti, valevoli per l'elica ad infinite pale, possono servire al calcolo dell'elica con numero finito di pale qualora sia possibile istituire un rapporto fra gli incrementi di velocità medi (elica ad infinite pale) e gli incrementi sulle pale.

Ciò può farsi, ad esempio, prendendo come caso tipico rappresentativo quello dell'elica con perdita minima di energia.

Una risoluzione approssimata di questo caso fu data, com'è noto, dal PRANDTL in appendice al già citato lavoro del BETZ sull'elica con perdita minima di energia [A 4; B 1] mediante la formula:

$$(42) \quad \Gamma = \frac{8\bar{v}}{p} \cdot \frac{Vr^2\Omega}{V^2 + r^2\Omega^2} \cdot \arccos e^{-\pi(R-r)a}$$

con

$$a = \frac{2\pi RV}{p\sqrt{V^2 + R^2\Omega^2}} = \frac{2\pi R}{p} \sin \varphi_1$$

(dove φ_1 indica il valore di φ per $r = R$); ossia:

$$(42') \quad \Gamma = \frac{8\bar{v}}{p} \cdot \frac{V}{\Omega} \cos^2 \varphi \cdot \arccos e^{-\pi(R-r)a}.$$

Per l'elica ad infinite pale vale la (28), che può scriversi:

$$(28 \text{ rip.}) \quad p\Gamma = 4\bar{v} \cdot \pi \cdot \frac{V}{\Omega} \cos^2 \varphi.$$

Se si pone in generale:

$$(43) \quad k = \frac{p\Gamma\Omega}{4\pi V\bar{v}}$$

si ha:

$$k_{\infty} = \cos^2 \varphi$$

e il rapporto ϑ fra k_p (valore di k per elica con p pale) e k_{∞} risulta espresso da:

$$(44) \quad \vartheta = k_p/k_{\infty} = \frac{2}{\pi} \arccos e^{-\pi(R-r)/a}.$$

Naturalmente, a parità di Γ , il rapporto dei $\bar{v}$ risulterà l'inverso del precedente, cioè: $1/\vartheta$.

Il rendimento indotto di una sezione risulterà:

$$\eta_i = \frac{1}{1 + \frac{\bar{v}}{V}} = \frac{1}{1 + \frac{p\Gamma\Omega}{4\pi V^2 k}} = \frac{1}{1 + \frac{p\Gamma\Omega}{4\pi V^2 \cos^2 \varphi}} \cdot \frac{1}{\vartheta}$$

Qualora si intenda applicare il principio indicato al paragrafo 5, occorrerà porre $\cos \varphi'$ in luogo di $\cos \varphi$. In tal caso si potrà ricavare φ' con un procedimento di approssimazioni successive. Ma su ciò ritorneremo in altro paragrafo.

Per le sezioni più lontane dall'estremità delle pale, dove $e^{-\pi(R-r)/a}$ è circa zero, si ha $\vartheta \cong 1$, mentre $\vartheta = 0$ per $r = R$.

L'approssimazione di PRANDTL è ottenuta con la sostituzione di un problema piano (sistema di semipiani paralleli distanti a) al problema spaziale. Tale approssimazione, come risulta dalla soluzione esatta del problema, è abbastanza buona per i piccoli valori di $\frac{\Gamma}{R\Omega}$ e per le sezioni più esterne della pala, mentre si discosta sensibilmente dalla soluzione esatta per le porzioni più interne della pala e per i bassi valori del rapporto di funzionamento.

Essa è inoltre migliore, com'è naturale, per eliche con maggior numero di pale.

La risoluzione esatta dell'elica con perdita minima di energia fu data per la prima volta dal GOLDSTEIN [B 2], il quale, intro-

dotte coordinate elicoidali r e z con $z = \theta - \Omega z/V$ (z lungo l'asse dell'elica) scrisse l'equazione differenziale del potenziale:

$$(45) \quad \left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} \right)^2 \varphi + (1 + \mu^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$$

essendo:

$$\mu = r\Omega/V$$

e dovendo essere verificata la condizione al contorno,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = - \frac{\mu^2}{1 + \mu^2}$$

per $z = 0$ o π (il GOLDSTEIN prende dapprima in esame l'elica a due pale) e $0 \leq r \leq R$; mentre d'altra parte $\text{grad } \varphi$ deve svanire per $r \rightarrow \infty$. La soluzione della (45) con queste condizioni fornisce la funzione potenziale φ nell'ipotesi $\frac{\bar{v}V}{\Omega} = 1$.

La integrazione dell'equazione (45) è ottenuta mediante sviluppi in serie trigonometriche nella z , essendo i coefficienti esprimibili mediante funzioni di Bessel modificate (gli sviluppi risultano naturalmente diversi per $r < R$ e $r > R$). La soluzione è poi estesa al caso dell'elica con un numero qualsiasi di pale.

Dall'espressione del potenziale si deducono quelle delle velocità incrementali e conseguentemente quella di pV mediante la (9), dalla quale infine, mediante la (43), il valore del rapporto k e di ϑ .

I valori di ϑ sono noti in base al citato lavoro di GOLDSTEIN, ad una elaborazione di LOCK e YEATMAN [D 21, 24, 25] e ad altra calcolo di KRAMER [B 3] per $p = 2$. Per $p = 4$ il GOLDSTEIN fornisce il calcolo solo per μ_1 (valore di μ per $r = R$) = 5. LOCK e YEATMAN forniscono i valori di ϑ per $p = 2$, $p = 3$ e $p = 4$; ma le loro tabelle sono ottenute con procedimenti di approssimazione e i valori da esse fornite non concordano con altri calcolati (ma non pubblicati) dalla D. V. L. (1).

Sarebbe dunque desiderabile un calcolo rigoroso, che potrebbe essere affidato all'Istituto per le Applicazioni del Calcolo del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

Diamo qui pertanto, con le riserve indicate, le tabelle di LOCK e YEATMAN e quella del KRAMER.

(1) Vedasi lavoro di KRAMER già citato [B 3].

Valori di ϑ per eliche a 2, 3 e 4 pale (LOCK & YEATMAN)

$$x = r/R$$

$\sin q$	0.4	0.45	0.5	0.55	0.6	0.65	0.7	0.75	0.8	0.85	0.9	0.95	p
0.05	1.000	1.000	1.000	0.999	0.997	0.994	0.985	0.950	0.780				2
	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.998	0.990	0.973	0.863				3
	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.998	0.995	0.945				4
0.1	1.000	0.998	0.997	0.988	0.971	0.937	0.877	0.773	0.586				2
	1.000	0.999	0.999	0.998	0.994	0.980	0.948	0.872	0.692				3
	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.993	0.985	0.943	0.770				4
0.2	0.994	0.991	0.961	0.901	0.852	0.784	0.694	0.578	0.415				2
	0.997	0.995	0.988	0.964	0.935	0.884	0.810	0.693	0.512				3
	0.998	0.997	0.995	0.989	0.973	0.940	0.882	0.777	0.590				4
0.3	0.978	0.959	0.874	0.774	0.709	0.634	0.548	0.444	0.308				2
	0.992	0.987	0.955	0.892	0.843	0.774	0.684	0.566	0.406				3
	0.996	0.994	0.984	0.945	0.909	0.852	0.774	0.651	0.476				4
0.4	0.958	0.906	0.783	0.663	0.595	0.520	0.442	0.351	0.243				2
	0.984	0.966	0.902	0.809	0.746	0.670	0.581	0.471	0.331				3
	0.991	0.984	0.950	0.883	0.830	0.759	0.671	0.554	0.396				4
0.5	0.914	0.848	0.690	0.564	0.501	0.434	0.367	0.289	0.199				2
	0.975	0.940	0.836	0.725	0.658	0.581	0.496	0.396	0.275				3
	0.985	0.971	0.905	0.812	0.750	0.674	0.585	0.476	0.334				4
0.6	0.930	0.784	0.608	0.492	0.435	0.376	0.316	0.249	0.171				2
	0.973	0.909	0.771	0.650	0.582	0.508	0.429	0.341	0.236				3
	0.986	0.954	0.855	0.745	0.678	0.601	0.517	0.414	0.290				4
0.7	0.922	0.722	0.547	0.441	0.387	0.333	0.278	0.218	0.149				2
	0.983	0.880	0.714	0.586	0.520	0.450	0.377	0.299	0.203				3
	0.999	0.939	0.803	0.682	0.615	0.541	0.459	0.369	0.255				4
0.8	0.916	0.677	0.502	0.398	0.347	0.297	0.247	0.193	0.131				2
	1.010	0.849	0.661	0.533	0.470	0.404	0.337	0.265	0.182				3
	1.035	0.924	0.756	0.627	0.562	0.490	0.413	0.329	0.228				4
0.9	0.935	0.657	0.464	0.360	0.311	0.265	0.220	0.172	0.117				2
	1.061	0.831	0.622	0.494	0.429	0.367	0.304	0.239	0.164				3
	1.103	0.917	0.713	0.581	0.516	0.447	0.375	0.298	0.205				4
1.0	1.012	0.633	0.425	0.325	0.279	0.238	0.197	0.154	0.105				2
	1.185	0.832	0.588	0.457	0.393	0.335	0.278	0.218	0.149				3
	1.256	0.923	0.681	0.543	0.477	0.412	0.345	0.272	0.187				4

Valori di ϑ per eliche a 2 pale (KRAMER)

$$x = r/R$$

$\begin{matrix} \text{tg } \varphi_1 \\ x \end{matrix}$	0,250	0,333	0,500	0,667	1,000	2,500	∞
0,1	1,682	1,987	2,390	2,62	2,858	3,092	3,167
0,2	1,071	1,146	1,274	1,35	1,436	1,532	1,559
0,3	0,929	0,920	0,927	0,940	0,963	0,997	1,012
0,4	0,874	0,823	0,760	0,733	0,724	0,724	0,729
0,45	0,857	0,790	—	0,668	0,643	0,630	0,632
0,5	0,839	0,762	0,663	0,612	0,577	0,552	0,551
0,6	0,797	0,706	0,585	0,522	0,468	0,430	0,424
0,7	0,737	0,635	0,510	0,442	0,378	0,333	0,325
0,75	0,692	0,591	0,469	0,399	0,337	0,290	0,281
0,8	0,637	0,537	0,424	0,356	0,296	0,249	0,239
0,85	0,574	0,477	0,372	0,310	0,253	0,207	0,197
0,9	0,484	0,399	0,307	0,252	0,205	0,163	0,154
0,925	0,424	0,351	—	0,22	0,177	0,139	0,131
0,95	0,352	0,292	0,220	0,182	0,145	0,112	0,105
0,975	—	0,21	—	0,13	0,102	0,078	0,073

Il KRAMER fornisce altresì una formula di approssimazione, valevole per forti valori di $\lambda = \frac{V}{R\Omega}$:

$$(46) \quad \vartheta \simeq \frac{11}{\pi r} \frac{x^2}{\left| 1 + \frac{1x^2}{6} \cdot \frac{1}{\lambda^2} \right|}$$

Mediante queste tabelle, in base all'ipotesi ammessa che il rapporto ϑ resti lo stesso qualunque sia la distribuzione del I' lungo il raggio, sarà possibile calcolare la r , e quindi la w , la v e la u , in funzione di I' , mediante le formule che si deducono dalle (9):

$$(47) \quad u = \frac{pI'}{4\pi r} \cdot \frac{1}{\vartheta} \quad v = \frac{pI'}{4\pi} \cdot \frac{\Omega}{V} \cdot \frac{1}{\vartheta}$$

Analogamente si avrà per l'incidenza indotta:

$$(48) \quad u_i = \frac{pI'}{4\pi V} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{\vartheta}$$

e per l'allungamento virtuale:

$$(49) \quad A = \frac{8r}{pl} \cdot \sin \varphi \cdot \vartheta$$

con le quali formule il 1° problema sulle eliche è risolto.

8. — *Calcolo rigoroso della velocità indotta col metodo dell'integrazione.*

La risoluzione di cui al paragrafo precedente ha il pregio della semplicità; ma include un'approssimazione di cui è difficile valutare « a priori » l'importanza.

Perciò può essere interessante effettuare il calcolo rigoroso delle velocità indotte, nota la distribuzione di Γ lungo il raggio. Si tratta, in sostanza, di rendere pratico il calcolo delle v e delle u date dalle formule (7) e (8).

Il problema è stato preso in esame da vari Autori, con due diversi metodi, che chiameremo *metodo dell'integrazione* e *metodo potenziale*.

Il metodo dell'integrazione consiste semplicemente nel calcolo degli integrali (1a) e (2a).

Il primo in ordine di tempo che abbia effettuato questo calcolo, con metodi di approssimazione (grafici e numeri) è stato il TROLLER [C 1 e D 20]. I risultati del calcolo sono da lui dati in grafici per la sola elica a due pale (ossia per un solo vortice inducente, ma per $\sigma = 0$ e $\sigma = \pi$). Poichè l'integrale diviene ∞ per $\sigma = 0$ ed $r' = r$, il TROLLER ricorre all'artificio di calcolare la differenza fra le velocità indotte da due vortici di uguale intensità Γ uscenti da due punti situati sul raggio del punto indotto ($\sigma = 0$), a uguali distanze, ma da parti opposte, di detto punto (naturalmente molto vicini ad esso). Le fig. 5 e 6 traducono in grafico, per alcuni valori di λ_r , i risultati del TROLLER ⁽¹⁾; mentre sappiamo che l'Istituto per le Applicazioni del Calcolo del C.N.R., ad iniziativa della Direzione Superiore Studi ed Esperienze, sta elaborando le relative tabelle numeriche.

Il procedimento da seguire è evidente. Diviso il raggio in tronchi, si suppongono i vortici elicoidali liberi uscire dai punti di divisione dei tronchi, con vorticità uguale alla differenza fra

⁽¹⁾ In questi grafici I indica l'integrale della formula (1a). Diagrammi più estesi e precisi si trovano in [D 20].

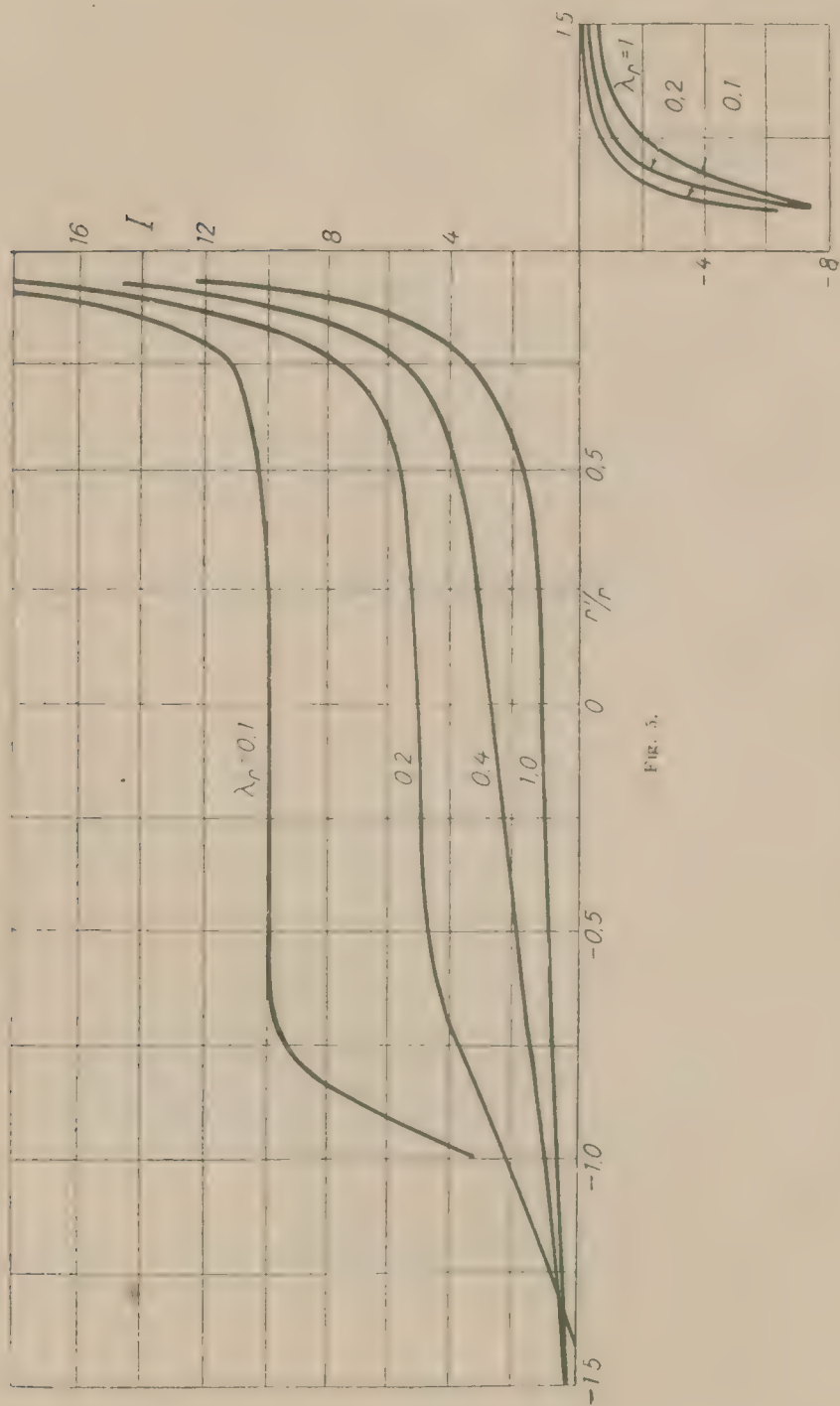


FIG. 3.

le vorticità medie dei due tronchi contigui. Si calcola la velocità indotta nei punti di mezzo dei tronchi, valendosi, per i vortici uscenti dalle estremità del tronco a cui appartiene il punto indotto, dall'artificio suaccennato ⁽¹⁾.

Il calcolo del TROLLER si limita alla velocità assiale c . La velocità tangenziale u si può calcolare ammettendo che la velocità

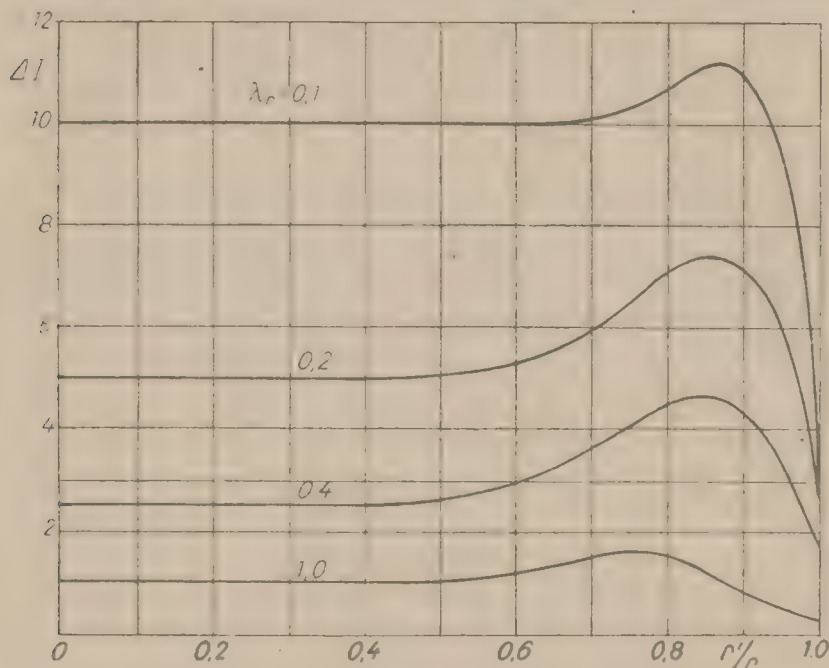


Fig. 6.

indotta risultante w sia ortogonale alla velocità relativa (apparente od effettiva, a seconda che si adotta l'uno o l'altro criterio di approssimazione) ⁽²⁾.

⁽¹⁾ La differenza fra i due ΔI competenti ai due estremi (differenza corrispondente alla derivata seconda di Γ rispetto al raggio) si può, secondo il TROLLER, trascurare.

⁽²⁾ Si osservi che l'ortogonalità fra la w risultante di u e di v e la W risultante di U e V vale, come dimostreremo parlando del metodo di S. KAWADA, per la w indotta non dal solo vortice elicoidale, ma da questo e dal corrispondente vortice assiale di rotazione contraria. La distinzione, che ha importanza quando si considerino i singoli filamenti vorticosi elicoidali, cessa di aver valore quando si consideri la totalità di essi, giacché la somma delle loro circuitazioni è nulla e quindi è nulla l'intensità del vortice centrale, salvo il caso in cui la circuitazione sulla pala per $r = 0$ sia diversa da zero, nel qual caso il vortice centrale deve essere considerato fra i vortici di scia ed ha una intensità pari alla somma (salvo il segno) degli altri vortici liberi.

Non sostanzialmente dissimile da quello di TROLLER, sebbene presentato in una forma ingegnosa e meritevole di considerazione, è il procedimento di T. MORIYA [C 2, C 4 e D 34]. Questi calcola direttamente la componente della velocità indotta normale a W ⁽¹⁾.

Questa componente normale w_n è manifestamente calcolabile dalle (1 a) e (2 a) mediante la formula:

$$w_n = v \cos \varphi + u \sin \varphi = \frac{v - u \lambda_r'}{1 + \lambda_r'^2}$$

e quindi, poichè $\lambda_r' = \lambda/x'$:

$$dw_n = \frac{d\Gamma}{4\pi R} \int_0^\pi \frac{[x^2 - xx' \cos(\theta + \sigma)]x' + \lambda^2 [x\{\theta \cos(\theta + \sigma) + \cos(\theta + \sigma)\} - x']}{[x^2 + x'^2 - xx' \cos(\theta + \sigma) + \lambda^2 \theta^2]^{3/2} [x'^2 + \lambda^2]^{1/2}} d\theta.$$

Sommando l'influsso dei p vortici uscenti allo stesso x dalle p pale sullo stesso punto x' di una qualunque di esse, possiamo scrivere:

$$dw_n = \frac{d\Gamma}{4\pi R} f_{p,\lambda}(x, x').$$

La w_n indotta da tutti i filamenti vorticosi liberi sarà pertanto:

$$(50) \quad w_n(x') = \int_0^1 \frac{\frac{d\Gamma}{dx}}{4\pi R} f_{p,\lambda}(x, x') dx.$$

Se confrontiamo la (50) con la formula che dà il dw_n nel caso dell'ala finita, che possiamo scrivere (ponendo l'origine delle coordinate in un estremo dell'ala e facendo uguale ad R l'apertura e ad Rx l'ascissa corrente):

$$dw_n = \frac{d\Gamma}{4\pi R} \cdot \frac{1}{x - x'}$$

si vede che la differenza fra le due formule consiste nella sostituzione di $f_{p,\lambda}(x, x')$ al semplice rapporto $\frac{1}{x - x'}$

Se pertanto poniamo:

$$f_{p,\lambda}(x, x') = I_{p,\lambda}(x, x') \cdot \frac{1}{x - x'}$$

(¹) Vedasi a questo proposito la precedente nota.

dove il fattore I viene chiamato dall'A. *fattore d'induzione*, potremo scrivere:

$$(51) \quad w_n(x') = \frac{1}{4\pi R} \int_0^1 \frac{d\Gamma}{dx} \cdot \frac{I(x, x')}{x - x'} dx$$

con che il calcolo della velocità indotta sull'elica è ricondotta a quello della velocità sull'ala (per il quale esistono molti e ben noti metodi) semplicemente sostituendo a $\frac{d\Gamma}{dx}$ il prodotto

$$\frac{d\Gamma}{dx} I_{p, \lambda}(x, x').$$

La semplificazione è certo più apparente che reale, giacchè il calcolo di I equivale al calcolo della $f_{p, \lambda}$ e potrebbe perciò sembrare più semplice e pratico tabellare o diagrammare $f_{p, \lambda}$, anzichè I . Ma non è così, giacchè, come si è già osservato, la funzione f diventa infinita per $x = x'$, mentre ciò non accade della I , anzi, come il MORIYA giustamente osserva, I tende ad 1 quando $x \rightarrow x'$. Il vantaggio vi è dunque veramente, giacchè l'inconveniente del valore infinito della w_n per $x = x'$, che si presenta anche per l'ala, è, nei metodi di calcolo dell'ala finita, aggirato e superato attraverso i ben noti artifici matematici di tali metodi.

Riteniamo pertanto che il metodo del MORIYA sia veramente meritevole di essere preso in considerazione.

L'A. rappresenta i valori di I in grafici; sarebbe, per la pratica applicazione, preferibile che fossero tabellati.

Riportiamo in fig. 7 l'andamento di I in funzione di x' per vari valori di x , per $\lambda = 0,3$ e per $p = 2$, a titolo di esempio. Le integrazioni sono state effettuate dall'Autore graficamente, per l'elica a 2 pale nella prima delle pubblicazioni citate, per le eliche a 3 e 4 pale nella seconda.

Nell'ultima pubblicazione [10 34] il MORIYA ha completato il suo procedimento, ispirandosi precisamente ai metodi di calcolo delle ali. Egli pone:

$$x = \frac{1}{2}(1 + \cos \theta)$$

e introduce la « circuitazione adimensionale »:

$$\gamma = c_p \frac{l}{D} \sqrt{\frac{\lambda^2 + x^2}{\lambda^2 + x'^2}}$$

ossia

$$\gamma = \frac{\Gamma(x)}{R^2 \Omega \sqrt{\lambda^2 + x'^2}} = \frac{\Gamma(x)}{RV \sqrt{1 + \frac{1}{\lambda^2 x'^2}}}$$

o infine:

$$\gamma = \frac{\Gamma(x)}{RV} \operatorname{sen} \varphi(r');$$

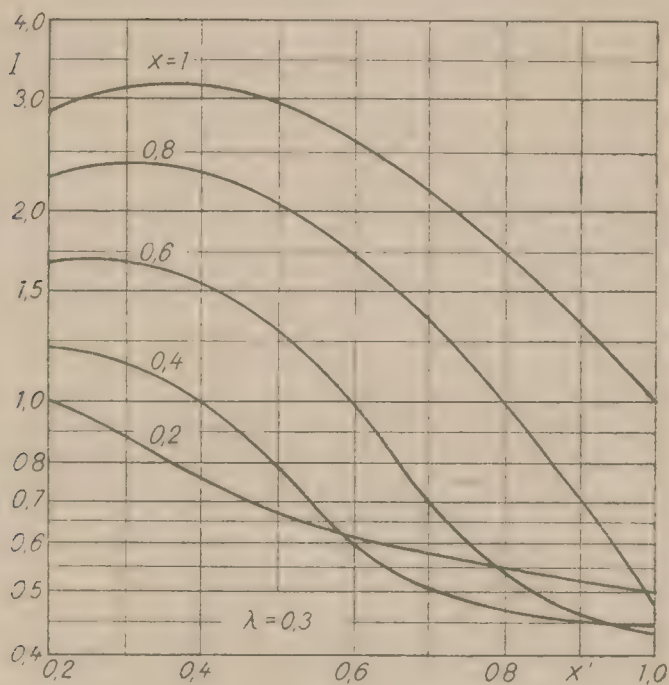


FIG. 7.

circuitazione adimensionale che sviluppa in un polinomio trigonometrico:

$$\gamma = (1 + \cos \theta) \sum a_n \operatorname{sen} n\theta.$$

I valori dell'incidenza indotta si ottengono allora nelle sezioni scelte come combinazioni lineari dei valori $\gamma(\theta, x')$ relativi a valori opportunamente scelti di θ .

9. — Calcolo della velocità indotta col metodo potenzialteorico.

Il metodo potenzialteorico è stato seguito da S. KAWADA [C 5 e 7] e da REISSNER [C 6].

SANDI KAWADA parte dalla stessa equazione differenziale di GOLDSTEIN (cioè l'equazione di LAPLACE in coordinate elicoidali):

$$(52) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \mu^2} + \frac{1}{\mu} \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} + \left(1 + \frac{1}{\mu^2}\right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \zeta^2} = 0$$

che si ottiene dalla (45) dividendo per μ^2 e nella quale i simboli hanno i significati già a suo luogo indicati (si considera la corrente all'infinito a valle dell'elica).

Le condizioni al contorno sono però, naturalmente, diverse, e precisamente:

per $\mu > \mu_1$, (dove μ_1 è il valore di μ nel punto di distacco del vortice) φ è una funzione a un sol valore, continua, di μ e di ζ , dispari e periodica in ζ e tendente a zero per $\mu \rightarrow \infty$.

per $\mu < \mu_1$, φ presenta una discontinuità sugli elicoidi descritti dalle pale (cioè per $\zeta = k \cdot \frac{2\pi}{p}$ essendo k intero: 0, 1... $p-1$), la discontinuità uguagliando l'intensità del vortice Γ che fluisce dal punto μ_1 .

Si faccia attenzione che l'aver supposto il potenziale per $\mu > \mu_1$ ad un sol valore significa, come il KAWADA del resto nota esplicitamente, aver considerato, insieme al vortice elicoidale uscente dal punto $\mu = \mu_1$, il vortice opposto uscente dal centro e disteso lungo l'asse.

In base a quanto sopra, si pone:

$$\varphi_e = \sum_1^{\infty} a_n K_{pn}(pn\mu) \operatorname{sen} pn\zeta \quad \text{per } \mu > \mu_1$$

$$\varphi_i = -\frac{p\Gamma}{2\pi} \left(\frac{\pi}{p} - \xi \right) + \sum_1^{\infty} b_n I_{pn}(pn\mu) \operatorname{sen} pn\zeta \quad \text{per } \mu < \mu_1$$

dove i coefficienti a_n , b_n sono costanti, K_{mn} e I_{mn} sono funzioni di Bessel modificate rispettivamente di seconda e di prima specie.

In base alla condizione di continuità dei due domini (interno ed esterno al cilindro su cui si avvolge il vortice), eccetto che nei

punti singolari $z = 0, 2\pi p$, si possono calcolare i coefficienti a_n e b_n . Il risultato è espresso dalle formule seguenti:

$$(53) \quad \varphi_e = -\frac{p\mu_1\Gamma}{\pi} \sum_1^{\infty} I'_{pn}(pn\mu_1) K_{pn}(pn\mu) \operatorname{sen} pn\zeta$$

$$(54) \quad q_i = -\frac{p\Gamma}{2\pi} \left(\frac{\pi}{p} - \zeta \right) - \frac{p\mu_1\Gamma}{\pi} \sum_1^{\infty} K_{pn}(pn\mu_1) I_{pn}(pn\mu) \operatorname{sen} pn\zeta$$

dove l'apice è indice di derivazione.

Dai valori del potenziale si deducono le componenti, assiale e tangenziale, della velocità indotta. Si ha:

$$u = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta}$$

e quindi:

$$(55) \quad u_e = -\frac{p^2\mu_1\Gamma}{2\pi r} \sum_1^{\infty} n I'_{pn}(pn\mu_1) K_{pn}(pn\mu)$$

$$(56) \quad u_i = \frac{p\Gamma}{4\pi r} \left[1 - 2p\mu_1 \sum_1^{\infty} n K'_{pn}(pn\mu_1) I_{pn}(pn\mu) \right].$$

Si ha poi naturalmente:

$$(57) \quad v = -\frac{1}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} \cdot \frac{\Omega}{V} = -\mu u.$$

Si osservi che questa relazione, che sancisce l'ortogonalità della w rispetto alla W , dipende dall'aver considerato, insieme al vortice elicoidale, il vortice assiale corrispondente (V. nota al paragrafo 8). Tale ortogonalità, tuttavia, anche se si aggiunga la velocità indotta dal vortice assiale, non risulta direttamente, almeno in modo semplice ed evidente, dagli integrali di BETZ, formule (1) e (2).

L'uso delle precedenti formule è ostacolato dalla mancanza di tavole complete delle funzioni di BESSEL ⁽¹⁾; perciò l'A. propone, per alti valori di μ e di μ_1 , gli sviluppi asintotici di NICHOLSON, dai quali si deduce:

$$(58) \quad u_e = -\frac{p\Gamma}{4\pi r} \left(\frac{1 + \mu_1^2}{1 + \mu^2} \right)^{1/4} \left[\frac{1}{e^{\mu^2} - 1} - \frac{1}{2p\mu_1} \left(1 + \frac{1}{\mu_1^2} \right)^{-3/2} \ln \frac{1}{1 - e^{-p^2 t_1}} \right]$$

⁽¹⁾ Questo calcolo è stato affidato all'Istituto per le applicazioni del calcolo del C. N. R. Vedasi la relazione FERRARI-GHIZZETTI-POSSIO in questo stesso volume.

$$(59) \quad u_i = \frac{p\Gamma}{4\pi r} \left[1 + \left(\frac{1 + \mu_1^2}{1 + \mu^2} \right)^{1/4} \left\{ \frac{1}{e^{\mu t_1} - 1} + \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{2p\mu_1} \left(1 + \frac{1}{\mu_1^2} \right)^{-3/2} \ln \frac{1}{1 - e^{-\mu t_1}} \right\} \right]$$

dove ⁽¹⁾:

$$t_1 = \frac{1}{\mu} \ln \frac{(1 + \mu^2 + 1)(1 + \mu_1^2 - 1)}{(1 + \mu^2 - 1)(1 + \mu_1^2 + 1)}, \mu > \mu_1 \\ t_2 = \frac{1}{\mu} \ln \frac{(1 + \mu^2 + 1)(1 + \mu_1^2 - 1)}{(1 + \mu^2 - 1)(1 + \mu_1^2 + 1)}, \mu < \mu_1$$

Nella prima delle sue Note [C 5] il KAWADA aveva indicato l'approssimazione ancora più semplice fornita dalle formule seguenti:

$$u_e = - \frac{p\Gamma}{4\pi r} \left(\frac{\mu_1}{\mu^2} \right)^{1/2} \frac{1}{e^{\mu t_1} - 1} \\ u_i = - \frac{p\Gamma}{4\pi r} \left[1 + \left(\frac{\mu_1}{\mu} \right)^{1/2} \frac{1}{e^{\mu t_1} - 1} \right]$$

con

$$t_1 = \mu - \mu_1$$

$$t_2 = \mu_1 - \mu$$

che si ottengono dalle precedenti supponendo l'unità trascurabile di fronte a μ^2 e μ_1^2 ; ma queste espressioni semplificate sono state abbandonate nel secondo lavoro più elaborato.

In questo poi si addita la soluzione del problema del calcolo della u indotta, col metodo della divisione in tronchi. Diviso il raggio dell'elica in 8 tronchi (0 - 0,1 - 0,3 - 0,5 - 0,7 - 0,8 - 0,9 - 0,95 - 1,0) si suppone la vorticità costante in ogni tronco e un vortice elicoidale (assiale il primo) uscente dal punto di divisione fra tronco e tronco.

Si ha allora, indicando con u_m la velocità indotta nel punto r_m ⁽²⁾:

$$u_m = \frac{p\Gamma_1}{4\pi r_m} + \frac{p(\Gamma_1 - \Gamma_2)}{4\pi r_m} \lambda_{1m} + \frac{p(\Gamma_2 - \Gamma_3)}{4\pi r_m} \lambda_{2m} \dots + \frac{p\Gamma_8}{4\pi r_m} \lambda_{8m}$$

(¹) Si sono lasciati invariati i simboli usati dall'A.; ma è facile vedere che $t_2 = -t_1$.

(²) I punti scelti per il calcolo delle u_m sono i punti medi dei tronchi, ossia $x = 0,05 - 0,2 - 0,4 - 0,6 - 0,75 - 0,85 - 0,925 - 0,975$.

dove i coefficienti λ_{nm} sono deducibili dalle formule (55) e (56);
od anche, ordinando diversamente:

$$(60) \quad \frac{u_m}{V} x_m = J_1(1 + \lambda_{1m}) + J_2(\lambda_{2m} - \lambda_{1m}) + \dots + J_8(\lambda_{8m} - \lambda_{7m})$$

dove invece di Γ è posto il rapporto adimensionale:

$$(61) \quad J = \frac{p\Gamma}{4\pi R V}$$

o infine:

$$(62) \quad \frac{u_m}{V} x_m = a_{1m}J_1 + a_{2m}J_2 \dots + a_{8m}J_8$$

dove il significato dei coefficienti a_{nm} risulta immediato dal confronto con la (60).

Il KAWADA ha fornito una tabella dei valori dei coefficienti a_{nm} calcolati con metodi approssimati per $\mu_1 = 3,6$ e 9, tutti corrispondenti ad eliche con piccola velocità di avanzamento in confronto di quella rotatoria, e per $\mu_1 = 0$, nel qual caso i vortici liberi sono rettilinei e paralleli all'asse e valgono le formule di W. MÜLLER (*Mathematische Strömungslehre*, p. 97):

$$(63) \quad u_e = - \frac{p\Gamma}{4\pi r} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{\mu_1}{\mu}\right)^p}$$

$$(64) \quad u_i = \frac{p\Gamma}{4\pi r} \left\{ 1 + \frac{1}{\left(\frac{\mu_1}{\mu}\right)^p - 1} \right\}.$$

Le approssimazioni indicate dal KAWADA cadono certamente in difetto per le regioni più interne delle eliche, per le quali non è lecito supporre μ , μ_1 grandi. Fortunatamente queste regioni apportano un contributo assai piccolo, sia alle forze aerodinamiche prodotte dall'elica, sia alle velocità indotte nelle sezioni più efficienti della pala.

Ma non ci dilunghiamo più oltre sul metodo di KAWADA, che forma oggetto di una relazione a parte in queste Giornate di studio.

Un metodo, che potremmo chiamare « misto », è quello usato da H. LAMB ⁽¹⁾ nel calcolo del campo magnetico indotto da un conduttore elicoidale, problema formalmente identico a quello della velocità indotta da un vortice elicoidale. Il LAMB scrive le componenti del campo sotto forma di integrali identici a quelli di BETZ (1) (2) (3); quindi pone tali componenti sotto forma di sviluppi trigonometrici e, in base all'equazione di LAPLACE a cui anche le componenti del campo debbono soddisfare, determina, a meno di costanti, i coefficienti dello sviluppo, determinando infine le costanti mediante gli integrali sopra indicati.

I risultati coincidono con quelli di KAWADA, espressi dalle formule (55) e (56).

10. — Il metodo potenzialteoretico del REISSNER.

Il REISSNER si avvale ancora dell'equazione del potenziale (45) o (52) e determina l'espressione del potenziale con la condizione al contorno più generale, quale si ha supponendo il Γ comunque distribuito lungo il raggio, e cioè che il potenziale q abbia in corrispondenza dei p elicoidi descritti dalle pale una discontinuità $\Gamma(r)$, ed inoltre che la velocità indotta si annulli per $r \rightarrow \infty$. Il metodo seguito dal REISSNER è alquanto artificioso, giacchè fa uso inizialmente di una distribuzione di sorgenti, ma non differisce sostanzialmente da quelli di GOLDSTEIN e di KAWADA.

Anzi i risultati possono dedursi senz'altro da quelli di KAWADA. In effetti se $\Gamma(\mu)$ è la distribuzione della circolazione lungo la pala, da un elemento $d\mu$ avremo l'uscita di un vortice elicoidale $-\frac{d\Gamma}{d\mu} d\mu$; perciò, integrando le (53) e (54), tenendo naturalmente conto che per $\mu < \mu'$ vale la (53) e per $\mu > \mu'$ vale la (54) si ha:

$$q = \frac{p\Gamma(\mu')}{2\pi} \left(\zeta - \frac{\pi}{p} \right) + \frac{p}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^{\mu'} I'_{pn}(pn\mu) K_{pn}(pn\mu') \mu \frac{d\Gamma}{d\mu} d\mu + \right. \\ \left. + \int_{\mu'}^{\mu_1} K'_{pn}(pn\mu) I_{pn}(pn\mu') \mu \frac{d\Gamma}{d\mu} d\mu \right] \sin pn\zeta$$

⁽¹⁾ H. LAMB, *The magnetic field of a helix*, « Proc. Cambridge Philosophical Society », vol. XXI, Part. V, 1923, p. 477, citato da TROLLER [C 1].

ovvero:

$$(65) \quad \varphi = \frac{p\Gamma(\mu')}{2\pi} \left(\zeta - \frac{\pi}{p} \right) + \frac{p}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[K_{pn}(pn\mu') \int_0^{\mu'} I'_{pn}(pn\mu) \mu \frac{d\Gamma}{d\mu} d\mu + \right. \\ \left. + I_{pn}(pn\mu') \int_{\mu'}^{\mu_1} K'_{pn}(pn\mu) \mu \frac{d\Gamma}{d\mu} d\mu \right] \operatorname{sen} pn\zeta.$$

Mediante integrazione per parti, si ottiene facilmente ⁽¹⁾:

$$(66) \quad \varphi = \frac{p\Gamma}{2\pi} \left(\zeta - \frac{\pi}{p} \right) - \\ - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left[I_{pn}(pn\mu') K_{pn}(pn\mu_1) \right] \operatorname{sen} pn\zeta \cdot \mu_1 \left(\frac{d\Gamma}{d\mu} \right)_{\mu=\mu_1} \\ - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left[K_{pn}(pn\mu') \int_0^{\mu'} I_{pn}(pn\mu) d \left(\mu \frac{d\Gamma}{d\mu} \right) + \right. \\ \left. + I_{pn}(pn\mu') \int_{\mu'}^{\mu_1} K_{pn}(pn\mu) d \left(\mu \frac{d\Gamma}{d\mu} \right) \right] \operatorname{sen} pn\zeta.$$

Questa formula differisce da quella di REISSNER (formula (6) della citata nota) per due titoli: 1) nella formula di REISSNER la sommatoria reca $(-1)^n$, cioè la serie è a segni alternati, ma ciò dipende dal diverso campo di variazione del ζ che noi, seguendo KAWADA, facciamo variare da 0 a $\frac{2\pi}{p}$, mentre il REISSNER la fa variare da $-\frac{\pi}{p}$ a $+\frac{\pi}{p}$; 2) nella formula di REISSNER non compare la prima sommatoria, come se fosse $\left(\frac{d\Gamma}{d\mu} \right)_{\mu=\mu_1} = 0$, ciò che in generale non può dirsi.

Sembra dunque che fra le due formule vi sia proprio una reale divergenza; questione, questa, che dovrà essere esaminata con cura.

(¹) Si suppone che $\frac{d\Gamma}{d\mu}$ per $\mu = 0$ non sia infinita, o almeno che

$$\left(\mu \frac{d\Gamma}{d\mu} \right)_{\mu=0} = 0.$$

Inoltre il REISSNER confronta direttamente la w con la W facendo il quoziente:

$$\alpha_i - \frac{w}{W} = \frac{u}{V} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{Vr} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right)_{\xi=0}$$

e si ha:

$$\begin{aligned} \frac{w}{W} = & \frac{p\Gamma}{4\pi r V} + \frac{p}{2\pi r V} \sum_{n=1}^{\infty} \left[I_{pn}(pn\mu) K_{pn}(pn\mu_1) \right] \cdot \mu_1 \left(\frac{d\Gamma}{d\mu} \right)_{\mu=\mu_1} - \\ & - \frac{p}{2\pi r V} \sum_{n=1}^{\infty} \left[K_{pn}(pn\mu) \int_0^{\mu} I_{pn}(pn\xi) d\left(\xi \frac{d\Gamma}{d\xi} \right) + \right. \\ & \left. + I_{pn}(pn\mu) \int_{\mu}^{\mu_1} K_{pn}(\xi) d\left(\xi \frac{d\Gamma}{d\xi} \right) \right] \end{aligned}$$

dove sotto gli integrali si è cambiato μ in ξ per poter ripristinare μ in luogo di μ' . Introdotta la vorticità adimensionale

$$\Gamma^* = p\Gamma \frac{\Omega}{V}$$

si può scrivere:

$$\begin{aligned} (67) \quad \frac{w}{W} = & \frac{1}{4\pi\mu} \left[\Gamma^* + 2 \sum_{n=1}^{\infty} I_{pn}(pn\mu) K_{pn}(pn\mu_1) \cdot \mu_1 \left(\frac{d\Gamma^*}{d\mu} \right)_{\mu=\mu_1} - \right. \\ & - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ K_{pn}(pn\mu) \int_0^{\mu} I_{pn}(pn\xi) d\left(\xi \frac{d\Gamma^*}{d\xi} \right) + \right. \\ & \left. \left. + I_{pn}(pn\mu) \int_{\mu}^{\mu_1} K_{pn}(\xi) d\left(\xi \frac{d\Gamma^*}{d\xi} \right) \right\} \right] \end{aligned}$$

coincidente con la (8) di REISSNER, salvo la prima sommatoria in più.

Facendo uso della (63) si avrebbe:

$$\begin{aligned} \frac{w}{W} = & \frac{1}{4\pi\mu} \left[\Gamma^* + 2p \sum_{n=1}^{\infty} n \left\{ K_{pn}(pn\mu) \int_0^{\mu} I'_{pn}(pn\xi) \xi d\Gamma^* + \right. \right. \\ & \left. \left. + I_{pn}(pn\mu) \int_{\mu}^{\mu_1} K'_{pn}(\xi) \xi d\Gamma^* \right\} \right] \end{aligned}$$

Anche il REISSNER ricorre alle espressioni asintotiche di NICHOLSON, ottenendo ⁽¹⁾:

$$(68) \quad \frac{w}{W} = \frac{1}{4\pi\mu} \left[\Gamma^* - \frac{1}{p\tau^{1/2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(U_1^{-n} \int_0^{\tau} U_1^n U_2 d\xi + \right. \right. \\ \left. \left. + U_1^n \int_{\tau}^{\tau_1} U_1^{-n} U_2 d\xi \right) \right]$$

dove

$$\tau = \sqrt{1 + \mu^2} = \frac{1}{\sin \varphi}$$

$$U_1 = \left[e^{\tau \left(\frac{\tau-1}{\tau+1} \right)^{1/2}} \right]^p; \quad U_2 = \frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} \left(\xi \frac{d\Gamma^*}{d\xi} \right) \cdot \tau^{1/2}.$$

11. — Altri metodi approssimati per il calcolo delle velocità indotte.

Accanto ai metodi di calcolo tipo TROLLER e tipo KAWADA, che possiamo in un certo senso chiamare *esatti*, sono da annoverarsi procedimenti *approssimati*; che però hanno perduto gran parte del loro valore dopo l'introduzione dei metodi esatti e lo perderanno totalmente quando, attraverso appropriate tabellazioni, l'applicazione di tali metodi sarà resa semplice e spedita.

Fra i metodi approssimati il più notevole è senza dubbio quello di LOCK [13], che rappresenta una estensione della approssimazione di PRANDTL. Si sostituisce, cioè, come fa il PRANDTL, un problema piano al problema spaziale, procurando di determinare la corrente attorno ad un sistema di infinite lamine parallele (fig. 8), susseguentesi ad una distanza h uguale a quella degli strati elicoidali dell'elica, misurata ortogonalmente ad essi sulla superficie cilindrica costituente il margine della scia; ma mentre il PRANDTL si è limitato al caso in cui la distribuzione di vorticità sugli strati piani è tale da fornire velocità corrispondenti ad un moto di traslazione rigido degli strati stessi, considerati come lamine materiali, il LOCK suppone che la vorticità sia distribuita sulle lamine a partire dal bordo libero con una legge generale, riproducendo la distribuzione del Γ sulle pale dell'elica. Tale riproduzione peraltro non è identica, giacchè in base a conside-

⁽¹⁾ La (68) è ottenuta senza tener conto della prima sommatoria.

razioni che qui per brevità omettiamo, l'A. effettua alcune variazioni che adesso preciseremo.

Se si pone:

$$\Gamma_{\text{lamina}} = \frac{hV'}{\pi} \left(A_0\beta + A_1 \sin \beta + \frac{1}{2} A_2 \sin 2\beta + \frac{1}{3} A_3 \sin 3\beta \dots \right)$$

essendo:

$$\cos \frac{\beta}{2} = e^{-\frac{\pi l}{h}}$$

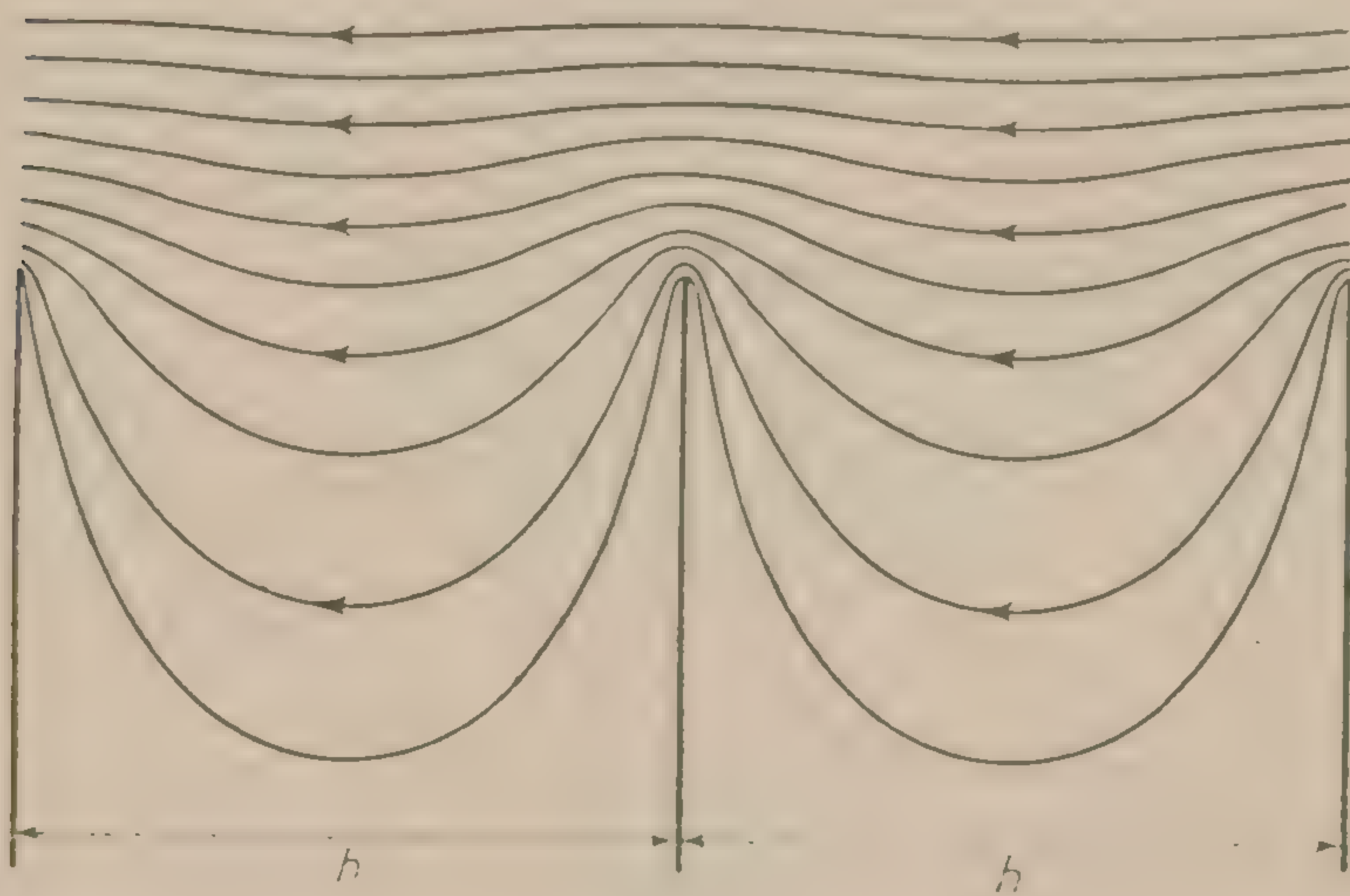


Fig. 8.

dove l è la distanza dal margine delle lamine, si trova per la velocità indotta u l'espressione:

$$u = V \left\{ A_0 + \cot \frac{\beta}{2} (A_1 \sin \beta + A_2 \sin 2\beta + \dots) \right\}.$$

Nelle formule precedenti:

$$l = R - r$$

$$h = \frac{2\pi R}{p} \sin \varphi_1.$$

Per tener conto in qualche modo delle diversità esistenti fra il problema piano e il problema spaziale dell'elica, il LOCK sostit-

tuisce a $\frac{\Gamma}{h}$ ossia a $\frac{\rho I^*}{2\pi R \sin \varphi_1}$ il valore $\frac{\rho I^*}{2\pi r \sin \varphi} \cdot \frac{\cos \varphi_1}{\cos \varphi}$, con che si ha ⁽¹⁾:

$$\Gamma_{elica} = \frac{2V}{p} r \sin \varphi \frac{\cos \varphi}{\cos \varphi_1} \left(A_0 \beta + A_1 \sin \beta + \frac{1}{2} A_2 \sin 2\beta + \dots \right).$$

Inoltre la velocità u competente al caso piano la moltiplica, oltrechè per il fattore $\frac{1}{2}$, rapporto fra la velocità indotta sul disco e quella indotta all'infinito, per $\cos \varphi / \cos \varphi_1$:

$$w = \frac{1}{2} V \frac{\cos \varphi}{\cos \varphi_1} \left\{ A_0 + \cot \frac{\beta}{2} (A_1 \sin \beta + A_2 \sin 2\beta + \dots) \right\}.$$

12. — Contributo della resistenza di profilo.

A questo punto possiamo ormai raccogliere le fila e concludere per quanto riguarda la risoluzione del primo problema.

Supposta nota la distribuzione del Γ lungo il raggio o , che praticamente è lo stesso, del c_p , giacchè, come già fu osservato:

$$(69) \quad c_p = \frac{2\Gamma}{Wl}$$

se ne deducono, con uno dei metodi accennati nei precedenti paragrafi, i valori delle velocità indotte u e v e quindi, per le (12) e (13), i valori di dT e di dQ calcolati *astruendo* dalla resistenza di profilo e che indicheremo con dT_p e dQ_p . Ma occorre pure tener conto di questa, che dà alla spinta assiale e alla coppia un contributo

$$(70) \quad dT_r = - \rho p \Gamma \varepsilon (V + v) dr$$

$$(71) \quad dQ_r = \rho p \Gamma \varepsilon (U - u) r dr$$

dove ε indica il rapporto di resistenza (per allungamento infinito):

$$(72) \quad \varepsilon = \frac{c_r}{c_p}.$$

⁽¹⁾ In termini più chiari:

$$\frac{\Gamma_{lamina}}{\Gamma_{elica}} = \frac{B}{r} \cdot \frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi} \cdot \frac{\cos \varphi_1}{\cos \varphi} = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{tg} \varphi_1} \cdot \frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi} \cdot \frac{\cos \varphi_1}{\cos \varphi} = \frac{\cos^2 \varphi_1}{\cos^2 \varphi}.$$

E quindi:

$$(73) \quad dT = \rho p \Gamma \{ U - u - \varepsilon(V + v) \} \, dr$$

$$(74) \quad dQ = \rho p \Gamma \{ V + v + \varepsilon(U - u) \} r \, dr.$$

Se ne deduce l'espressione del rendimento η_r al raggio r :

$$\eta_r = \frac{dT \cdot V}{dQ \cdot \Omega} = \eta_i \cdot \frac{1 - \varepsilon \operatorname{tg} \varphi'}{1 + \varepsilon \cot \varphi'}$$

prodotto del *rendimento indotto* per un fattore dipendente da ε , che può chiamarsi *rendimento alare*.

Facendo uso della (69) si possono scrivere le (12) e (13) nella forma:

$$(75) \quad dT_p = \frac{1}{2} \rho p l c_p W (U - u) \, dr$$

$$(76) \quad dQ_p = \frac{1}{2} \rho p l c_p W (V + v) r \, dr$$

e le (70) e (71) nella forma:

$$(77) \quad dT_r = - \frac{1}{2} \rho p l c_{r\infty} W (V + v) \, dr$$

$$(78) \quad dQ_r = \frac{1}{2} \rho p l c_{r\infty} W (U - u) r \, dr.$$

Talvolta può tornar comodo, approfittando della piccola differenza di direzione che in pratica si riscontra fra W e W' , e della piccolezza della resistenza di profilo, di ritenere che la resistenza sia diretta secondo W (analogamente a quanto si fa nel caso dell'ala). In questo caso si ha:

$$(79') \quad dT_r \cong - \frac{1}{2} \rho p l c_{r\infty} W V \, dr$$

$$(80') \quad dQ_r \cong \frac{1}{2} \rho p l c_{r\infty} W U r \, dr.$$

Osserviamo che alcuni Autori fanno entrare la resistenza di profilo nel computo della spinta T a cui è legata la velocità in-

dotta, ragionando in base al principio della quantità di moto, come può farsi, ad es., nel caso dell'elica ad infinite pale (formule 39 e 40). A noi sembra più logico far dipendere i fenomeni di induzione unicamente dalla portanza e considerare la resistenza come un fenomeno accessorio, che si sovrappone a quello.

13. — *Risoluzione del 2° problema.*

Ci siamo intrattenuti piuttosto a lungo sul primo problema, perchè esso è la base indispensabile per la risoluzione del *secondo problema*, che è praticamente il più interessante.

I primitivi metodi di risoluzione, usati quando la teoria vorticale non aveva ancora proiettato la sua definitiva luce sul problema dell'elica, si basavano puramente e semplicemente sul cosiddetto « *metodo della striscia* », cioè sul calcolo delle azioni elementari in base alla velocità apparente W e alla incidenza apparente α ; verteva però, come già accennammo, incertezza sul valore dell'allungamento da attribuire alle sezioni della pala.

Sappiamo ora invece che il calcolo delle azioni elementari deve essere fatto in base alla velocità relativa effettiva W' , tenendo cioè conto degli incrementi indotti.

Ora i vari procedimenti — che sono numerosissimi — per il calcolo delle eliche possono raggrupparsi in due categorie, secondo che calcolano l'effetto dell'induzione « *sezione per sezione* » (*metodi analitici*) ovvero lo valutano globalmente (*metodi sintetici*).

Senza dubbio i due aggettivi: « *analitici* » e « *sintetici* » possono prestarsi ad equivoci e non sono forse del tutto appropriati; ma in mancanza di meglio, useremo quelle due denominazioni.

I metodi di calcolo escogitati per le eliche sono, come si è detto, moltissimi, ma possono ridursi a pochi tipi.

Il metodo più ovvio e concettualmente più rigoroso è quello che si avvale dei metodi di calcolo delle velocità indotte, nota la distribuzione del Γ lungo la pala, ed è un metodo di *successive approssimazioni* o di *iterazione*. Si parte cioè da una supposta distribuzione del Γ , ottenuta attribuendo, p. es., a tutte le sezioni dell'elica l'allungamento 5 o 6; calcolando in 1^a approssimazione le velocità indotte con i metodi indicati parlando del 1° problema e da queste deducendo l'incidenza indotta in 1^a approssimazione e quindi l'incidenza effettiva in 2^a approssimazione:

$$\alpha'_2 = \alpha - \alpha_{i1}.$$

Ripetendo il procedimento, avremo un'incidenza indotta in 2^a approssimazione e quindi un'incidenza effettiva in 3^a approssimazione:

$$\alpha'_3 = \alpha - \alpha_{i2}$$

e così via.

Altro procedimento è quello della divisione della pala in tronchi e del calcolo dell'incidenza indotta nei punti di mezzo dei tronchi, supponendo la circuitazione Γ costante in ciascun tronco. In tal caso i vortici induttori sono tanti quanti i tronchi ed è possibile impostare un sistema di n equazioni in n incognite, che forniscono $\Gamma_1, \Gamma_2 \dots \Gamma_n$. Basterà scrivere:

$$\Gamma_n = \frac{1}{2} c'_p \cdot W_n l_n (\alpha_n - \alpha_{in})$$

dove.

$$w_n = W_n \alpha_{in} = \sum_m k_{nm} \Gamma_m$$

e quindi:

$$(81) \quad \Gamma_n = \frac{1}{2} c'_p \cdot W_n l_n \alpha_n - \frac{1}{2} c'_p l_n \sum_m k_{nm} \Gamma_m$$

che è appunto il sistema di equazioni cercato.

Adottando i simboli di S. KAWADA (§ 9), si ha, ad esempio:

$$(82) \quad \beta_m J_m = \alpha_m x_n - (\alpha_{1m} J_1 + \alpha_{2m} J_2 \dots + \alpha_{8m} J_8)$$

dove

$$\beta_m = \frac{8\pi r_m \sin q_m}{c'_{pm} p l_m}$$

Ricordando l'espressione (41) dell'allungamento virtuale (per ∞ pale) si vede che $\beta_m = \frac{\pi A_m}{c'_{pm}}$

A questi procedimenti appartiene il metodo di MORIYA, che, riconducendo il problema dell'elica a quello dell'ala a mezzo dei fattori d'induzione, permette di applicare all'elica i numerosi e svariati procedimenti escogitati dall'aerodinamica per la risoluzione del 2° problema dell'ala finita.

14. — Metodo dell'allungamento virtuale.

Fra i metodi che abbiamo chiamato « analitici » meritano una particolare menzione quelli « *approssimati* » che si avvalgono della teoria dell'elica ad infinite pale, facendo uso del fattore correttivo ϑ di cui al § 7.

Fra questi ricorderemo: il *metodo dell'allungamento virtuale* e il *metodo di GLAUERT*.

Il concetto di « allungamento virtuale » o « allungamento equivalente » (MORIYA), sebbene considerato successivamente da vari altri Autori, è stato primieramente introdotto dallo scrivente [A 8]. La sua applicazione è semplicissima.

La formula (49) fornisce il valore dell'allungamento virtuale per la sezione considerata, e quindi le caratteristiche aerodinamiche di questa, in funzione della velocità relativa apparente W e dell'incidenza apparente α .

Se indichiamo con $\bar{c}_p$ e $\bar{c}_r$ i coefficienti aerodinamici della sezione competenti al suddetto allungamento, avremo:

$$(83) \quad dT = \frac{1}{2} \rho p l W (\bar{c}_p U + \bar{c}_r V) dr$$

$$(84) \quad dQ = \frac{1}{2} \rho p l W (\bar{c}_p V + \bar{c}_r U) r dr$$

da cui, integrando, i valori di T e di Q ⁽¹⁾.

L'uso dell'allungamento virtuale può essere utilmente associato al procedimento di successive approssimazioni di cui al precedente paragrafo, allo scopo di partire subito da valori molto approssimati del T e così ridurre il numero delle approssimazioni successive necessarie alla risoluzione del problema.

Qualora, giusta il concetto già illustrato — e sul quale ritorneremo a proposito delle eliche molto caricate — si credesse di seguire la (41 a) anziché la (41), occorrerebbe procedere qui pure per successive approssimazioni. Calcolato A in 1^a approssimazione mediante la (49), se ne dedurrebbe, in base al $\bar{c}_p$ della se-

⁽¹⁾ Il metodo dell'allungamento virtuale è stato usato da L. SILLA e P. TEOFILATO per la determinazione di una famiglia di eliche di grande rendimento [D 12].

zione, l' α_i corrispondente e quindi $\varphi' = \varphi + \alpha_i$ in 1^a approssimazione. Facendo allora:

$$A_{(2)} = \frac{8r}{pl} \sin \varphi'_{(1)} \vartheta$$

si otterrebbe A in 2^a approssimazione, da cui il nuovo $\bar{c}_p$, α_i e φ' in 2^a approssimazione e così via.

In pratica si raggiunge lo scopo molto rapidamente.

15. — Metodo di GLAUERT o dell'incidenza effettiva (1).

Questo procedimento parte dalle formule (47) scritte introducendo il coefficiente di portanza c_p (2):

$$(85) \quad u = \frac{plc_p W'}{4\pi r \vartheta} \quad v = \frac{plc_p W'}{4\pi r \vartheta} \cdot \frac{U - u}{V + v}$$

od anche, introdotto il *grado di pieno* (« solidità » secondo GLAUERT) σ :

$$(86) \quad \sigma = \frac{pl}{2\pi r}$$

$$(85') \quad u = \frac{\sigma c_p}{2\vartheta} \cdot W' \quad v = \frac{\sigma c_p}{2\vartheta} \cdot W' \cot \varphi'$$

Posto

$$V + v = V(1 + a)$$

$$U - u = U(1 - a')$$

dalle (85') si ricava facilmente (3):

$$(87) \quad \frac{a'}{1 - a'} = \frac{\sigma c_p}{2\vartheta \cos \varphi'} \quad ; \quad \frac{a}{1 + a} = \frac{\sigma c_p}{2\vartheta} \cdot \frac{\cos \varphi'}{\sin^2 \varphi'}$$

(1) Vedansi Bibl. [VII], [A 9], [C 5, 6, 7].

(2) Si è sostituita nella seconda delle (47) $\frac{l}{V+v}$ a $\frac{l}{V}$, cioè $\cot \varphi'$ a $\cot \varphi$, in base al criterio, seguito dal GLAUERT, di ritenere gli elicoidi vorticosi tangenti a W' anzichè, a W .

(3) Il GLAUERT pone, anzichè c_p , $c_p(1 - \varepsilon \tan \varphi')$ nel rapporto $\frac{a'}{1+a'}$ e $c_p(1 + \varepsilon \cot \varphi')$ nel rapporto $\frac{a}{1+a}$, e ciò in base al concetto di computare anche il contributo della resistenza di profilo nell'applicazione del teorema della quantità di moto.

Il valore di c_p si suppone noto, cioè si suppone nota per la sezione considerata l'incidenza effettiva a' (occorre perciò sia data la polare dell'ala di allungamento infinito).

Ma dal valore di c_p , noto φ' , si deducono il dT/dr e il dQ/dr in base alle (79) e (80) che qui si ripetono, introducendo esplicitamente l'angolo φ' e ponendo W' al posto di W :

$$(79a) \quad \frac{dT}{dr} = \frac{1}{2} \rho p l c_p W'^2 (\cos \varphi' - \varepsilon \sin \varphi')$$

$$(80a) \quad \frac{dQ}{dr} = \frac{1}{2} \rho p l c_p W'^2 (\sin \varphi' + \varepsilon \cos \varphi') \cdot r$$

ossia (posto, come al solito, $x = r/R$):

$$\frac{dT}{dx} = \pi \rho R^4 \Omega^2 \sigma c_p x^3 (1 - a')^2 (\cos \varphi' - \varepsilon \sin \varphi') \sec^2 \varphi'$$

$$\frac{dQ}{dx} = \pi \rho R^5 \Omega^2 \sigma c_p x^4 (1 - a')^2 (\sin \varphi' + \varepsilon \cos \varphi') \sec^2 \varphi'$$

da cui, in base alle notazioni (31) (32):

$$(88) \quad \frac{dk_T}{dx} = 2 \sigma c_p x^3 (1 - a')^2 (\cos \varphi' - \varepsilon \sin \varphi') \sec^2 \varphi'$$

$$(89) \quad \frac{dk_Q}{dx} = 2 \sigma c_p x^4 (1 - a')^2 (\sin \varphi' + \varepsilon \cos \varphi') \sec^2 \varphi'.$$

A questi valori di $\frac{dk_T}{dx}$ e $\frac{dk_Q}{dx}$ corrisponde un valore del rapporto di funzionamento λ dato da:

$$\lambda = \frac{Vx}{r\Omega} = x \operatorname{tg} \varphi.$$

Ma

$$\operatorname{tg} \varphi' = \frac{V(1+a)}{U(1-a')} = \operatorname{tg} \varphi \frac{1+a}{1-a'},$$

perciò

$$(90) \quad \lambda = x \operatorname{tg} \varphi' \cdot \frac{1-a'}{1+a}.$$

È così possibile far corrispondere, sezione per sezione, ad ogni valore di c_p un valore di λ e i corrispondenti valori di dk_T/dr e di dk_Q/dr , e quindi tracciare i grafici che forniscono, sezione per sezione, i valori di queste derivate in funzione di λ .

Ciò premesso, l'applicazione del metodo è chiara. Per ogni valore di λ si ricavano, dai precedenti diagrammi, i valori di dk_T/dr e di dk_Q/dr . Integrando rispetto alla x fra 0 ed 1, si ottengono i valori di k_T e di k_Q corrispondenti al valore di λ prescelto ⁽¹⁾.

16. — *Metodi sintetici o globali: metodo della sezione rappresentativa.*

Parliamo ora brevemente dei metodi che abbiamo chiamato « sintetici » o « globali ». Questi possono a loro volta dividersi in due categorie: quelli che calcolano analiticamente le caratteristiche dell'elica come se ogni sezione avesse allungamento virtuale infinito, ossia come se non fossero presenti gli incrementi di velocità indotta, e valutano globalmente l'effetto dell'induzione (*metodi di correzione globale*) e quelli che calcolano l'elica come se tutta la parte attiva della pala fosse concentrata ad un raggio determinato, ossia la pala fosse ridotta ad un elemento situato a quel determinato raggio, di area uguale all'area complessiva delle pale, con incidenza e caratteristiche uguali a quelle della sezione effettuata nella pala a quel determinato raggio (*metodo della sezione rappresentativa*).

Di questi ultimi metodi ⁽²⁾ ci possiamo sbrigare rapidamente. Il calcolo dell'elica in questo caso è infatti oltremodo semplice, purchè sappiamo attribuire alla sezione rappresentativa un'incidenza indotta od un allungamento virtuale convenienti. In pratica si adotteranno i valori dell'incidenza indotta o dell'allungamento virtuale competenti alla sezione scelta, come facente parte dell'elica intera.

Un altro problema è quello di assegnare il rapporto $x = r/R$ competente alla sezione rappresentativa. Già dimostrammo, nel primo nostro lavoro sulle eliche [A 8], che tale rapporto non è rigorosamente costante, ma varia (per l'elica ad ∞ pale) al va-

⁽¹⁾ Sono immediate le varianti da applicare alle formule qualora si volessero calcolare direttamente i valori di c_T , c_Q o c_P .

⁽²⁾ Vedansi, ad es., [D 21, 24, 27, 33]. Uno dei primi, se non il primo, di tali metodi fu quello proposto da A. ZEZI [D 11].

riare del passo aerodinamico dell'elica; che anzi, mentre per certe caratteristiche $\Gamma r/R$ cresce al crescere del passo, per altre diminuisce. Le variazioni sono tuttavia in pratica assai limitate, talchè si può assumere senza grave errore $\alpha \doteq 0,7$ per la sezione rappresentativa. Per l'elica a numero finito di pale, poichè l'induzione più forte nelle sezioni estreme ne diminuisce l'importanza e il contributo all'azione totale dell'elica, è verosimile che si debba prendere un valore di α alquanto minore (ad es. $\alpha = 2/3$).

La determinazione della polare della sezione rappresentativa (*polare equivalente*) può farsi « a posteriori » partendo dalle caratteristiche, note sperimentalmente, di eliche date. La polare così determinata può utilmente servire a calcolare le caratteristiche aerodinamiche di eliche dello stesso tipo, ma con caratteristiche geometriche diverse (es. diverso rapporto del passo al diametro).

17. — *Metodi di correzione globale: Calcolo dell'elica senza induzione.*

Caratteristica comune di tali metodi è il calcolo delle caratteristiche dell'elica in assenza di incrementi, ossia il calcolo effettuato col metodo della striscia, assumendo come caratteristiche delle sezioni quelle relative ad allungamento infinito.

Già dai primi suoi lavori sulle eliche lo scrivente dimostrò che, se si fa astrazione dalla resistenza di profilo, il diagramma del k_T in funzione di λ è rettilineo e quello del k_Q è parabolico.

Vale la pena di ripetere qui la semplice dimostrazione.

Si indichi con l' la larghezza ridotta di pala, definita dalla (22); su ogni sezione avremo:

$$dP = \rho \pi l' W^2 \sin \alpha$$

$$dR = \rho l' W^2 c'_r$$

avendo posto $c'_r = c_{r\infty} \frac{l}{l'}$.

Ora

$$dT = p (dP \cos \varphi - dR \sin \varphi)$$

$$dQ = pr(dP \sin \varphi + dR \cos \varphi).$$

Indicando con dT_0 l'elemento di spinta proveniente dalla portanza (senza incrementi) e con dT_r l'elemento di spinta proveniente dalla resistenza, e analogamente per dQ , si avrà:

$$dT_0 = p \cdot dP \cdot \cos \varphi$$

$$dT_r = -p \cdot dR \cdot \sin \varphi$$

$$dQ_0 = pr \cdot dP \cdot \sin \varphi$$

$$dQ_r = pr \cdot dR \cdot \cos \varphi$$

Ora, se β è l'angolo di calettamento aerodinamico della sezione (fig. 2), si ha:

$$\sin \alpha = \sin (\beta - \varphi) = \sin \beta \cos \varphi - \cos \beta \sin \varphi.$$

Sostituendo nelle precedenti formule:

$$dT_0 = \rho \pi p l' (r^2 \Omega^2 \sin \beta - V r \Omega \cos \beta)$$

$$dQ_0 = \rho \pi p l' (V r^2 \Omega \sin \beta - V r^2 \cos \beta)$$

$$dT_r = -\rho \pi p l' c'_r W V$$

$$dQ_r = \rho \pi p l' c'_r W r^2 \Omega$$

e integrando:

$$T_0 = \rho \pi \left[\Omega^2 \int_0^R p l' r^2 \sin \beta dr - V \Omega \int_0^R p l' r \cos \beta dr \right]$$

$$Q_0 = \rho \pi \left[V \Omega \int_0^R p l' r^2 \sin \beta dr - V^2 \int_0^R p l' r \cos \beta dr \right]$$

da cui, posto:

$$Z = \int_0^1 p \frac{l'}{R} x \cos \beta dx$$

$$Z_1 = \int_0^1 p \frac{l'}{R} x^2 \sin \beta dx$$

$$\lambda^* = \frac{Z_1}{Z}$$

si ha facilmente:

$$(91) \quad k_{T0} = 2Z(\lambda^* - \lambda)$$

$$(92) \quad k_{Q0} = 2Z(\lambda^* - \lambda)\lambda.$$

Il rapporto λ^* è quello che definisce il *passo aerodinamico globale*:

$$(93) \quad H^* = R \quad 2\pi\lambda^*.$$

L'andamento dei due coefficienti definiti dalle (91) e (92) è rappresentato in fig. 9.

Una prima correzione è rappresentata dai termini derivanti dalla resistenza di profilo, per i quali si ottiene facilmente (assumendo un c'_r medio costante):

$$(94) \quad k_{Tr} = -2c'_r\lambda\varphi_0(\lambda)$$

$$(95) \quad k_{Qr} = 2c'_r\varphi_2(\lambda)$$

con

$$\varphi_0 = \int_0^1 p \frac{l'}{R} \sqrt{\lambda^2 + x^2} dx$$

$$\varphi_2 = \int_0^1 p \frac{l'}{R} x^2 \sqrt{\lambda^2 + x^2} dx.$$

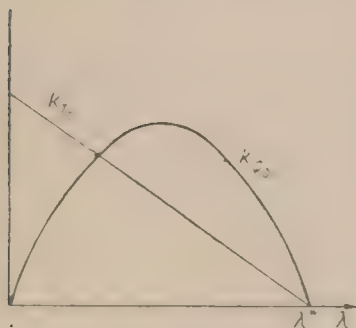


Fig. 9.

Per determinare il valore di c'_r medio, occorre riferirsi ad un c_p^* medio virtuale, in base al quale

$$k_{T0} = \frac{c_p^*}{\pi} \int_0^1 p \frac{l'}{R} x \sqrt{\lambda^2 + x^2} dx = \frac{c_p}{\pi} \Phi_1.$$

Possiamo allora stabilire, in base a calcoli o a risultati sperimentali, una specie di *polare media* dell'elica, facente corrispondente al c_p^* medio il c'_r medio.

In pratica potrà essere sufficiente assumere il c'_r anche semplicemente costante.

18. — *Correzione globale per l'induzione.*

Occorre ora istituire la correzione per l'induzione. Nel primo studio dello scrivente sulle eliche [A 8] sono state proposte due di tali correzioni: una in base all'ipotesi di una *incidenza indotta costante*, l'altra in base all'ipotesi della *perdita minima di energia*.

Per brevità ci limitiamo ad esporre il secondo metodo, osservando però che fin d'allora fu dimostrato essere le due ipotesi praticamente equivalenti.

Se poniamo:

$$c_p = 2\pi \sin \alpha - 2\pi \alpha_i$$

si ha facilmente, operando come precedentemente e indicando con l'indice p i coefficienti che tengono conto della sola portanza (induzione compresa):

$$k_{Tp} = 2Z(\lambda^* - \lambda) - 2 \int_0^1 a_i p \frac{l'}{R} x \sqrt{\lambda^2 + x^2} dx.$$

Ora, in base a quanto veduto a suo tempo:

$$a_i = \frac{\bar{v}}{V} \sin \varphi \cos \varphi;$$

perciò, sostituendo:

$$(96) \quad k_{Tp} = 2Z(\lambda^* - \lambda) - 2 \frac{\bar{v}}{V} \lambda \psi_2(\lambda)$$

avendo posto:

$$\psi_2 = \int_0^1 p \frac{l'}{R} \frac{x^2}{\sqrt{\lambda^2 + x^2}} dx.$$

Ma, per la (37), tenuta presente la (34), si ha:

$$\frac{\bar{v}}{V} = \frac{k_{Tp}}{4\lambda^2 \left(1 + \lambda^2 \ln \frac{\lambda^2}{1 + \lambda^2} \right)}.$$

Perciò, sostituendo nella (96) e risolvendo rispetto a k_{Tp} :

$$(97) \quad k_{Tp} = \frac{2Z(\lambda^* - \lambda)}{1 + \frac{\psi_2(\lambda)}{2\lambda \left(1 + \lambda^2 \ln \frac{\lambda^2}{1 + \lambda^2} \right)}}$$

$$(98) \quad k_{Qp} = \lambda k_{Tp}.$$

Poichè $2Z(\lambda^* - \lambda)$ non è altro che il k_{T0} di cui al precedente paragrafo, le formule (97) e (98) mettono in evidenza la « correzione globale » da apportare a k_{T0} e k_{Q0} per ottenere k_{Tp} e k_{Qp} . Inoltre, sempre in base alle (37) (38) (34) e (35):

$$(99) \quad k_{Ti} = k_{Tp}^2 \cdot \frac{\frac{1}{1 + \lambda^2} + \ln \frac{\lambda^2}{1 + \lambda^2}}{4 \left(1 + \lambda^2 \ln \frac{\lambda^2}{1 + \lambda^2} \right)^2}$$

$$(100) \quad k_{Qi} = k_{Tp}^2 \cdot \frac{1 + 2\lambda^2}{1 - \lambda^2} + 2\lambda^2 \ln \frac{\lambda^2}{1 + \lambda^2} \\ 4\lambda \left(1 - \lambda^2 \ln \frac{\lambda^2}{1 + \lambda^2} \right)^2.$$

A questi vanno aggiunti i termini k_{Tr} e k_{Qr} di cui alle formule (94) e (95).

Il procedimento è dunque evidente. Calcolati Z e λ^* una volta per sempre per l'elica data, si calcolano k_{Tp} e k_{Qp} , e quindi k_{Tr} e k_{Qr} (per i quali occorre avere calcolati una volta tanto le funzioni di λ che occorrono). Tutti i coefficienti che compaiono sono funzioni unicamente di λ , ad eccezione di Ψ_2 . Per questo, data la piccolezza del termine che si aggiunge all'unità al denominatore della (97), potrà spesso essere sufficiente assumere un $\frac{v'}{R}$ medio (per es. quello a 0,7 R) e porre:

$$(101) \quad \Psi_2 = p \frac{v'_{\text{medio}}}{R} \psi_2(\lambda)$$

con:

$$(102) \quad \psi_2(\lambda) = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{\lambda^2 + x^2}} dx.$$

Ciò vale per l'elica ad infinite pale.

Per l'elica con numero finito di pale, si ha secondo GOLDSTEIN [B 2]:

$$(103) \quad k_T = 8 \frac{\bar{v}}{V} \cdot \lambda^2 I_1 - 8 \left(\frac{\bar{v}}{V} \right)^2 \lambda^2 I_2$$

con

$$(104) \quad I_1 = \int_0^1 kx dx \quad I_2 = \int_0^1 \frac{kx dx}{1 + \mu_1^2 x^2} - \lambda^2 \int_0^1 \frac{kx dx}{\lambda^2 + x^2}$$

dove

$$(43 \text{ rip.}) \quad k = \frac{p\Gamma\Omega}{4\pi V\bar{v}}$$

Il primo termine della (103) è il k_{Tp} , il secondo il k_{Tr} ; perciò:

$$(105) \quad k_{Tr} = k_{Tp}^2 \frac{I_2}{8\lambda^2 I_1}$$

e la (97) assume l'espressione:

$$(97a) \quad k_{Tp} = \frac{2Z(\lambda^* - \lambda)}{1 + \frac{\Psi_2(\lambda)}{4\lambda I_1}}.$$

Si ha poi:

$$k_Q = 8 \frac{\bar{v}}{V} \lambda^3 I_1 + 8 \left(\frac{\bar{v}}{V} \right)^2 \lambda I_3$$

con

$$(106) \quad I_3 = \int_0^1 \frac{kx^3 dx}{1 + \mu^2 x^2} = \lambda^2 \int_0^1 \frac{kx^3 dx}{\lambda^2 + x^2}$$

per cui:

$$(107) \quad k_{Qi} = k_{Tp}^2 \frac{I_3}{8\lambda^3 I_1^2}.$$

Il GOLDSTEIN non dà peraltro i valori di I_1 , I_2 , I_3 .

Il KRAMER [B 3] fa uso di altri simboli, dimodochè si ha:

$$(108) \quad k_{Tp} = 8\lambda^2 \frac{\bar{v}}{V} K_{31}$$

e quindi:

$$(97b) \quad k_{Tp} = \frac{2Z(\lambda^* - \lambda)}{1 + \frac{\Psi_2(\lambda)}{4\lambda K_{31}}}$$

e:

$$(109) \quad k_{Ti} = -8\lambda^4 \left(\frac{\bar{v}}{V} \right)^2 K_{32} = -k_{Tp}^2 \frac{K_{32}}{8K_{31}^2}.$$

I valori di K_{31} e K_{32} sono stati calcolati dal KRAMER ⁽¹⁾, e li riportiamo nella seguente tabella, per $p = 2$.

Analogamente:

$$(110) \quad k_{Qp} = 8\lambda^3 \frac{\bar{v}}{V} K_{31}$$

$$k_{Qi} = 8 \left(\frac{v}{V} \right)^2 \lambda^3 K_{52} = k_{Tp}^2 \frac{K_{52}}{8\lambda K_{31}^2}.$$

⁽¹⁾ Veramente il KRAMER ci dà K_{31} e K_{52} , ma vale la relazione $K_{31} - \lambda^2 K_{32} - K_{52}$, per cui da K_{31} e K_{52} è facile calcolare K_{32} , anzi senz'altro $\lambda^2 K_{32}$.

Fra i simboli di KRAMER e quelli di GOLDSTEIN valgono le relazioni.

$$I_1 = K_{31}, \quad I_2 = \lambda^2 K_{31}, \quad I_3 = \lambda^2 K_{52}.$$

In queste formule i simboli K_{mn} hanno il significato seguente:

$$(111) \quad K_{mn} = \int_0^1 \frac{\vartheta x^m}{(\lambda^2 + x^2)^n} dx$$

dove ϑ indica, come già al paragrafo 7, il rapporto fra la circolazione al raggio x per p finito e quella per $p = \infty$ corrispondenti ad uno stesso valore di $\bar{v}$. Per l'elica ad ∞ pale, $\vartheta = 1$.

Si ha:

$$K_{31}^{(\infty)} = \frac{1}{2} \left(1 - \lambda^2 \ln \frac{\lambda^2 + 1}{\lambda^2} \right)$$

$$K_{32}^{(\infty)} = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\lambda^2 + 1} - \ln \frac{\lambda^2 + 1}{\lambda^2} \right)$$

$$K_{52}^{(\infty)} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + 1} - 2\lambda^2 \ln \frac{\lambda^2 + 1}{\lambda^2} \right).$$

Nella tabella che segue abbiamo riportato anche i valori di K_{52} per $p = 2$ e $p = \infty$, nonché i rapporti K_{32}/K_{31}^2 e $K_{52}/\lambda K_{31}^2$ per $p = 2$ e $p = \infty$.

I valori in prossimità di $\lambda = 0$ si sono trascritti per completezza, ma essi cessano di avere significato, perchè per $\lambda = 0$ vengono meno le ipotesi che stanno a fondamento della teoria, e precisamente la piccolezza di $\bar{v}$ rispetto a V .

Per condizioni di funzionamento prossime al punto fisso dà risultati più attendibili il metodo degli incrementi medi di cui al prossimo paragrafo.

Facendo uso dei coefficienti c_T e c_P si avrebbe:

$$(112) \quad c_{Tp} = 8 \frac{\bar{v}}{V} K_{31}$$

$$(113) \quad c_{Pp} = c_{Tp}$$

$$(114) \quad c_{Ti} = -c_{Tp}^2 \frac{\lambda^2 K_{32}}{8 K_{31}^2}$$

$$(115) \quad c_{Pi} = c_{T0}^2 \frac{K_{52}}{8 K_{31}^2}.$$

λ	$K_{31}^{(2)}$	$K_{31}^{(\infty)}$	$\lambda^2 K_{32}^{(2)}$	$\lambda^2 K_{32}^{(\infty)}$	$K_{32}^{(2)}$	$K_{32}^{(\infty)}$	K_{32}/K_{31}^2		$K_{52}^{(2)}$	$K_{52}^{(\infty)}$	$\frac{K_{52}}{\lambda K_{31}^2}$	
							$p=2$	$p=\infty$			$p=2$	$p=\infty$
0	0,5	0,5	0	0	∞	∞	∞	∞	0,5	0,5	∞	∞
1,10	0,410	0,476	0,018	0,018	1,81	1,81	10,7	8,00	0,392	0,458	23,3	20,2
1,9	0,398	0,473	0,020	0,021	1,70	1,70	10,2	7,58	0,378	0,452	21,5	18,2
1,8	0,385	0,467	0,023	0,025	1,60	1,60	9,93	7,35	0,362	0,442	19,6	16,2
1,7	0,368	0,460	0,027	0,030	1,47	1,47	9,78	6,95	0,341	0,430	17,6	14,2
1,6	0,345	0,450	0,033	0,037	1,33	1,33	9,95	6,56	0,312	0,413	15,7	12,2
1,5	0,313	0,435	0,039	0,046	1,15	1,15	10,0	6,08	0,274	0,389	14,0	10,3
1,4	0,270	0,412	0,048	0,060	0,96	0,96	10,1	5,65	0,222	0,352	12,2	8,29
1,3	0,211	0,372	0,055	0,078	0,702	0,702	11,1	5,06	0,156	0,294	10,5	6,37
1,2	0,1353	0,298	0,0546	0,101	0,404	0,404	11,9	4,55	0,0807	0,197	8,82	4,45
2,3	0,0919	0,238	0,0483	0,108	0,243	0,243	12,9	4,29	0,0436	0,130	7,75	3,43
1	0,0493	0,153	0,0342	0,0962	0,0966	0,0966	14,1	4,21	0,0151	0,0568	6,20	2,42
1,5	0,0245	0,0863	0,0202	0,0675	0,0300	0,0300	15,0	4,02	0,0043	0,0190	4,78	1,71
2	0,0144	0,0537	0,01284	0,04608	0,0116	0,0116	15,4	4,01	0,00156	0,00742	3,76	1,285
2,5	0,0095	0,0362	0,008831	0,03279	0,00525	0,00525	15,5	4,00	0,000689	0,00341	3,05	1,040
∞	0	0	0	0	0	0	16,0	4,00	0	0	0	0

19. — Metodo degli incrementi medi.

Fra i metodi globali vale la pena di ricordare il *metodo degli incrementi medi* [A 10] [D 2, 3]. Esso si basa nel principio di sostituire agli incrementi r e ω , variabili col raggio, valori medi costanti. Tale sostituzione è per lo più lecita, in via di approssimazione, per la parte più efficiente della pala. Ora dalla (9 a), tenuto conto della correzione per il numero finito delle pale, si ricava:

$$pF = 4\pi r v \frac{V - v}{U - v} \vartheta$$

e dalla (12):

$$dT = \varrho \cdot 4\pi (V + v) v \vartheta r dr$$

e, se v è costante:

$$T = 4\pi \varrho (V + v) v \int_0^R r \vartheta dr.$$

Inoltre, sempre dalla (12) e dalla (9 a):

$$dT = \varrho \cdot 4\pi r u (U - u) \vartheta dr = \varrho \cdot 4\pi r^3 \omega (\Omega - \omega) \vartheta dr$$

e, se ω è costante:

$$T = 4\pi \varrho \omega (\Omega - \omega) \int_0^R r^3 \vartheta dr.$$

Indicando con ϑ' e ϑ'' due convenienti valori medi di ϑ si avrà; con facili calcoli:

$$(116) \quad k_T = 4\lambda^2 \vartheta' \left(1 + \frac{v}{V}\right) \frac{r}{V}$$

$$(117) \quad k_T = 2\vartheta'' \left(1 - \frac{\omega}{\Omega}\right) \frac{\omega}{\Omega}.$$

Queste due equazioni di 2° grado permettono di ricavare i valori di $\frac{v}{V}$ e $\frac{\omega}{\Omega}$:

$$(118) \quad \frac{v}{V} = \frac{1}{2} \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{k_T}{\lambda^2 \vartheta'}} \right)$$

$$(119) \quad \frac{\omega}{\Omega} = \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{2k_T}{\vartheta''}} \right).$$

Si osservi che ϑ' e ϑ'' sono da ritenersi funzioni di λ , per cui i secondi membri delle precedenti relazioni sono da ritenersi funzioni di k_T e di λ .

In base a queste relazioni si determinano i diagrammi caratteristici di un'elica partendo dai diagrammi *ideali*, che si ottengono trascurando del tutto gli incrementi, come si è indicato al paragrafo 17 ⁽¹⁾.

Il passaggio dai coefficienti *ideali*, che indicheremo con k_{T0} , k_{Q0} , λ_0 ai coefficienti *reali* k_T , k_Q , λ si effettua facilmente equiparando l'elica reale all'elica ideale funzionante ad una velocità di avanzamento $V + v$ e ad una velocità di rotazione $\Omega - \omega$. Si vede allora facilmente che λ e λ_0 si corrispondono se:

$$(120) \quad \lambda_0 = \frac{V + v}{R(\Omega - \omega)} = \lambda \frac{1 + \frac{v}{V}}{1 - \frac{\omega}{\Omega}}$$

Inoltre ammetteremo che, in conseguenza della variata velocità di rotazione, valgono le relazioni:

$$(121) \quad \frac{k_T}{k_{T0}} = \frac{k_Q}{k_{Q0}} = \left(1 - \frac{\omega}{\Omega}\right)^2.$$

Se ne deducono, con facili calcoli, le *formule di passaggio*:

$$\begin{aligned} \lambda &= M\lambda_0 - \frac{Mk_{T0}}{4\lambda_0} \\ k_T &= M^2k_{T0} \\ k_Q &= M^2k_{Q0} \end{aligned}$$

dove:

$$M = \frac{1}{1 + \frac{k_{T0}}{2\lambda_0}}$$

che servono al passaggio diretto da λ_0 , k_{T0} e k_{Q0} a λ , k_T e k_Q ; e:

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= \lambda \frac{N}{M} \\ k_{T0} &= \frac{k_T}{M^2} \\ k_{Q0} &= \frac{k_Q}{M^2} \end{aligned}$$

⁽¹⁾ Logicamente il k_T dovrebbe determinarsi trascurando anche la resistenza di profilo, da aggiungersi successivamente; ma in pratica è equivalente applicare il metodo al k_T calcolato anche con la resistenza di profilo.

con

$$M = \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{2k_T}{\vartheta''}} \right)$$

$$N = \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{k_T}{\lambda^2 \vartheta''}} \right)$$

che servono al passaggio inverso ⁽¹⁾.

La determinazione del ϑ' e del ϑ'' potrebbe farsi in base all'approssimazione di PRANDTL o ai calcoli di GOLDSTEIN. Praticamente si preferisce porre $\vartheta' = \vartheta'' = 1$, considerare, cioè, l'elica ad infinite pale, tenendo conto dell'effetto dei margini con una virtuale riduzione di diametro, secondo la formula proposta dal PRANDTL stesso [B 4]:

$$R' = R - \frac{a}{\pi} \ln 2 = R - 0,2207 a = R \left(1 - 1,39 \frac{\sin \varphi_1}{p} \right)$$

avendo a e φ_1 il significato già indicato al paragrafo 7. In altri termini si calcolerà la velocità v indotta come se l'elica avesse il diametro R' , anzichè R ⁽²⁾.

In questo metodo, che ha il pregio di una grande semplicità, l'approssimazione, discreta per quanto riguarda v , è meno buona per quanto riguarda ω . Ma l'influsso di tale incremento è, nelle ordinarie condizioni di funzionamento, molto meno importante che non l'influsso del v , tanto che potrebbe, nell'ordine di approssimazione proprio di questi calcoli, anche trascurarsi.

Ciò vale in particolare, come si è accennato al precedente paragrafo, per le condizioni di funzionamento prossime a punto fisso, per le quali le velocità tangenziali sono piccole a confronto di quelle assiali.

20. — L'elica a passo variabile.

I metodi globali sono particolarmente indicati per lo studio delle *eliche a passo variabile*, per le quali è facile calcolare la variazione che una rotazione δ delle pale introduce nelle caratteristiche dell'elica senza incrementi.

⁽¹⁾ Per la pratica applicazione del procedimento furono ideati dallo scrivente speciali metodi grafici. V. [D 3].

⁽²⁾ Ciò che equivale a supporre, come suggeriscono BIENEN e KÁRMÁN, la spinta incrementata secondo il fattore $1/\left(1 - 1,39 \frac{\sin \varphi_1}{p}\right)^2$.

Tale variazione si riflette unicamente sui valori di Z e di Z_1 e conseguentemente di λ^* e di H^* .

Si ha infatti:

$$Z(\delta) = \int_0^1 p \frac{l'}{R} x \cos(\beta + \delta) dx = Z(0) \cos \delta - Z'(0) \sin \delta$$

$$Z_1(\delta) = \int_0^1 p \frac{l'}{R} x^2 \sin(\beta + \delta) dx = Z_1(0) \cos \delta + Z'_1(0) \sin \delta$$

avendo posto:

$$(122) \quad Z' = \int_0^1 p \frac{l'}{R} x \sin \beta dx$$

$$(123) \quad Z'_1 = \int_0^1 p \frac{l'}{R} x^2 \cos \beta dx.$$

Segue:

$$(124) \quad \lambda^*(\delta) = \frac{\lambda^*(0) + \frac{Z'_1}{Z} \operatorname{tg} \delta}{1 - \frac{Z'}{Z} \operatorname{tg} \delta}$$

Per piccole rotazioni si può sostituire δ a $\operatorname{tg} \delta$.

Si può dimostrare (v. [A 8]) che per $\lambda^*(\delta)$ si può assumere il valore di $\operatorname{tg} \beta/x$ misurato ai $2/3$ o ai $7/10$ del raggio.

Per piccole rotazioni la dipendenza di λ^* (e quindi del passo aerodinamico H^*) da δ è approssimativamente lineare.

Non ci indugiamo sui significati geometrici delle quantità Z , Z' , Z_1 e Z'_1 che rappresentano, a meno del fattore p , momenti di vari ordini, rispetto ad un asse ortogonale all'asse della pala, della superficie della pala proiettata sul disco di rotazione o su un piano diametrale passante per l'asse della pala.

21. — Influenza del mozzo.

In ciò che precede non si è tenuto presente l'influsso del *mozzo* dell'elica. In realtà il suo influsso non è così semplice come potrebbe ritenersi a prima vista. Dato che la scia dell'elica è in sostanza un vortice, in essa si hanno depressioni centrali, che possono produrre resistenze addizionali nel mozzo per aspirazione dalla parte poppiara. In pratica si suole molto semplicemente tener conto del mozzo — che in certe eliche, munite di grande ogiva, può avere un diametro cospicuo — semplicemente consi-

derando come non partecipante al fenomeno propulsivo la porzione di pala corrispondente.

Se il diametro del mozzo è piccolo, il contributo di tale porzione è pure molto piccolo e può essere trascurato; vale a dire si può considerare l'elica come estendentesi radialmente da 0 ad R . Altrimenti occorrerà, negli integrali occorrenti per il calcolo analitico, prendere come limite inferiore il valore $r_0 = r_0 R$, dove r_0 indica il raggio del mozzo.

Da un punto di vista puramente teorico, se si assimila il mozzo ad un cilindro indefinito, ciò introduce la condizione che sia $v_r = 0$ per $r = r_0$, il che cambia l'espressione della velocità indotta da ogni vortice elicoidale.

Se prendiamo, ad es. l'espressione (54) del potenziale indotto da un gruppo di p vortici data dal KAWADA, si osserva che la velocità radiale $v_r = \frac{\Omega}{V} \cdot \frac{\partial q_i}{\partial \mu}$ risulta, per $\mu = \mu_0$:

$$v_r(\mu_0) = -\frac{p^2 \mu_1 \Gamma}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} n K'_{pn}(pn\mu_1) I'_{pn}(pn\mu_0) \sin pn\zeta.$$

Questa velocità deve essere annullata da una corrente aggiuntiva del tipo della φ , che potremo scrivere:

$$\varphi' = \sum_{n=1}^{\infty} a_n K_{pn}(pn\mu) \sin pn\zeta.$$

La $v'_r(\mu_0)$ che ne deriva sarà:

$$v'_r(\mu_0) = p \sum_{n=1}^{\infty} n a_n K'_{pn}(pn\mu_0) \sin pn\zeta.$$

Uguagliando i coefficienti si avrà:

$$a_n = \frac{p \mu_1 \Gamma}{\pi} \cdot \frac{K'_{pn}(pn\mu_1) \cdot I'_{pn}(pn\mu_0)}{K'_{pn}(pn\mu_0)}.$$

In conseguenza il potenziale della corrente aggiuntiva sarà:

$$(125) \quad \varphi' = \frac{p \mu_1 \Gamma}{\pi} \sum_1^{\infty} \frac{K'_{pn}(pn\mu_1) \cdot I'_{pn}(pn\mu_0)}{K'_{pn}(pn\mu_0)} K_{pn}(pn\mu) \sin pn\zeta$$

da cui deriva una velocità tangenziale sulle pale:

$$(126) \quad u' = \frac{p^2 \mu_1 \Gamma}{2\pi r} \sum_1^{\infty} n \frac{K'_{pn}(pn\mu_1) I'_{pn}(pn\mu_0)}{K'_{pn}(pn\mu_0)} K_{pn}(pn\mu)$$

che si aggiunge alle velocità u_e ed u_i date dalle (55) e (56). Analogamente si modificherebbe la distribuzione di circolazione lungo le pale che realizza la condizione $v = \text{cost}$, di minima perdita di energia. Tale modifica non si ha per $p = \infty$, giacchè in tal caso la condizione $c_r = 0$ sulla superficie del mozzo è senz'altro soddisfatta senza bisogno di aggiungere nessuna corrente correttiva.

22. — L'elica fortemente caricata.

Molte delle cose fin qui dette valgono nell'ipotesi che gli incrementi di velocità indotti siano piccoli di fronte alle velocità originarie. Ora, come già si è accennato al paragrafo 5, la condizione

$$\text{suindicata si verifica quando è piccolo il coefficiente } c_T = \frac{T}{\frac{1}{2} \rho S V^2}$$

e in particolare è piccolo il carico unitario sul disco T/S e non è troppo vicina a zero la velocità di avanzamento.

In queste ipotesi è lecito trascurare, da un lato la *contrazione* della scia, dall'altro la *depressione* nella scia, dovuta alle velocità tangenziali a valle dell'elica.

Che cosa accade quando ciò non si verifica?

Il problema è stato studiato, limitatamente all'elica ad infinite pale, in una bella memoria da A. BETZ e H. B. HELMBOLD [E 1], i quali si sono proposti ed hanno risolto due problemi: 1) la distribuzione degli incrementi che realizza, per una spinta assegnata, il massimo rendimento (ossia la minima perdita di energia); 2) il valore e la distribuzione della contrazione di scia. Con semplici, ma acute considerazioni sintetiche i due Autori giungono a risultati valevoli, a rigore, per eliche a disco, anzichè piano, curvato in un modo non ben noto esattamente, condizione questa perchè il rapporto fra la variazione di spinta dovuta all'apporto di un elemento di circolazione (ΔT_1) e quella dovuta al conseguente incremento di velocità nella scia (ΔT_2) sia indipendente dal raggio in corrispondenza del quale tale apporto viene effettuato. Si ha in tal caso $\Delta T = \Delta T_1 + \Delta T_2 = C \Delta T_1$, con C costante.

La condizione cercata per la minima perdita di energia risulta allora (v. fig. 10 che rappresenta lo schema delle velocità al mar-

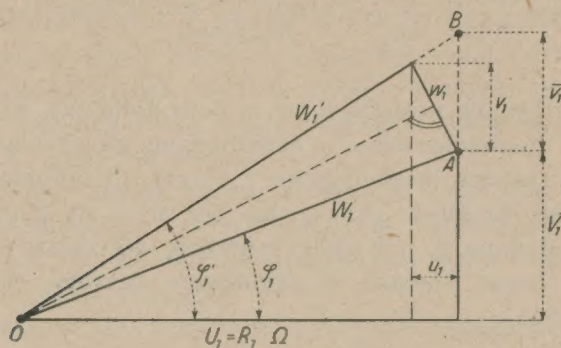


Fig. 10.

gine della scia e fig. 11 che rappresenta lo schema delle velocità entro la scia):

$$(127) \quad \frac{V + v_1}{r_1 \Omega - u_1} = \frac{V + v_1}{r_1 \Omega}$$

dove v_1 ed u_1 rappresentano le velocità incrementali entro la scia (cilindrica) all'infinito ed r_1 il raggio entro la scia. La condizione

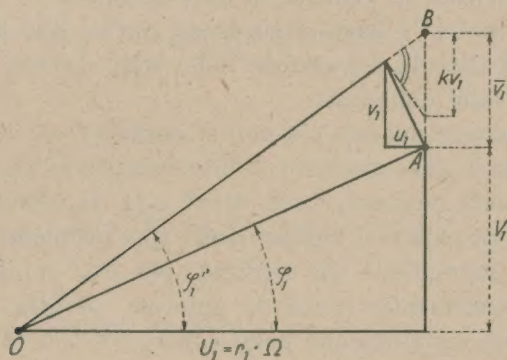


Fig. 11.

è simile a quella vigente nella teoria di prima approssimazione; soltanto che la w_1 , risultante della v_1 e della u_1 , non è ortogonale alla W , come in quel caso. Vige invece nella scia l'equazione differenziale

$$(r_1 \Omega - u_1) \left(\frac{\partial u_1}{\partial r_1} + \frac{u_1}{r_1} \right) = (V + v_1) \frac{\partial v_1}{\partial r_1}$$

talechè in definitiva si ha:

$$\begin{aligned}v_1 &= \bar{v}_1(1 - k \sin^2 \varphi'_1) \\ u_1 &= \bar{v}_1 k \sin \varphi'_1 \cos \varphi'_1\end{aligned}$$

dove il valore di k (costante) si deduce dal fatto che al margine della scia la w_1 è ortogonale alla bisettrice della W_1 e della W'_1 e si ha quindi, con passaggi che si omettono:

$$(128) \quad k = \frac{\sqrt{1 + \bar{\lambda}_1^2} - \sqrt{1 + \lambda_1^2}}{\frac{\bar{v}_1}{V} \cdot \lambda_1} \cdot \frac{\sqrt{1 + \bar{\lambda}_1^2}}{\bar{\lambda}_1}$$

dove

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \frac{V}{R_1 \Omega} = \lambda \frac{R}{R_1} \\ \bar{\lambda}_1 &= \frac{V + \bar{v}_1}{R_1 \Omega}\end{aligned}$$

(l'indice 1 sta ad indicare che le quantità in discorso si riferiscono alla scia all'infinito a valle dell'elica; R_1 pertanto indica il raggio della scia).

Quanto al $\Gamma = 2\pi r_1 u_1$, si ha:

$$\begin{aligned}\Gamma &= 2\pi r_1 \bar{v}_1 k \sin \varphi'_1 \cos \varphi'_1 \\ &= 2\pi \bar{v}_1 k \left(\frac{V + \bar{v}_1}{\Omega} \right) \cdot \cos^2 \varphi'_1.\end{aligned}$$

L'espressione della spinta dell'elica si ottiene dall'applicazione del teorema della quantità di moto, e si ha:

$$\begin{aligned}c_T &= \left(\frac{R_1}{R} \right)^2 (i_1 + i_2 + i_3) \\ \eta_i &= \frac{1}{1 + \frac{\bar{v}_1}{V}} \cdot \left[1 + \frac{i_2 + i_3}{i_1 - 2i_3} \right]\end{aligned}$$

dove:

$$\begin{aligned}i_1 &= 2k \frac{\bar{v}_1}{V} \left(1 + \frac{\bar{v}_1}{V} \right) \left[1 - \bar{\lambda}_1^2 \ln \left(1 + \frac{1}{\bar{\lambda}_1^2} \right) \right] \\ i_2 &= \left(\frac{\bar{v}_1}{V} \right)^2 \left[1 - 2k \bar{\lambda}_1^2 \ln \left(1 + \frac{1}{\bar{\lambda}_1^2} \right) + k^2 \frac{\bar{\lambda}_1^2}{1 + \bar{\lambda}_1^2} \right] \\ i_3 &+ k^2 \left(\frac{\bar{v}_1}{V} \right)^2 \left[\bar{\lambda}_1^2 - \ln \left(1 + \frac{1}{\bar{\lambda}_1^2} \right) - \frac{\bar{\lambda}_1^2}{1 + \bar{\lambda}_1^2} \right].\end{aligned}$$

Per risolvere compiutamente il problema occorre conoscere il rapporto di contrazione R_1/R . A questo scopo gli Autori introducono due notazioni: κ_1 , coefficiente di contrazione della superficie elementare ($2\pi R_1 dr_1/2\pi R dr$) e κ_2 , coefficiente di contrazione della porzione di scia limitata ad un certo raggio r_1 . Il primo si collega alla variazione dell'incremento assiale:

$$\kappa_1 = \frac{V + v}{V + v_1} \quad (1)$$

il secondo alla variazione di incremento tangenziale in base al teorema del momento della quantità di moto:

$$\kappa_2 = \left(\frac{u}{u_1} \right)^2.$$

Fra κ_1 e κ_2 vige la relazione:

$$\frac{1}{\kappa_1} - \frac{\kappa_2}{\kappa_1} \cdot \frac{u_1}{r_1 \Omega} = C \left(1 - \frac{u_1}{r_1 \Omega} \right)$$

dove C , costante, ha il significato prima indicato $\Delta T/\Delta T_1$. In definitiva si ottiene (2):

$$\left(\frac{R}{R_1} \right)^2 = C - (C - 1) k \frac{\frac{\bar{v}_1}{V}}{1 + \frac{\bar{v}_1}{V}} \bar{\lambda}_1^2 \ln \left(1 + \frac{1}{\bar{\lambda}_1^2} \right)$$

$$C = 1 + \frac{i_2}{i_1 - 2i_3}.$$

Il procedimento precedente non è senz'altro estensibile al caso di eliche con numero finito di pale.

Ma il LÖSCH [E 3] ha fatto un confronto fra i risultati del procedimento BETZ-HELMBOLD e quelli ottenuti in base al sem-

(1) A rigore, per elica con disco curvo, $\kappa_1 = \frac{V + v'}{V + v_1}$ con $v' = v + v_r \operatorname{tg} \alpha$, essendo α l'angolo che l'elemento considerato del disco fa con un piano normale all'asse di rotazione.

(2) Si tratta di soluzioni approssimate. Quella qui indicata è la seconda approssimazione. In prima approssimazione $\left(\frac{R}{R_1} \right)^2 = C$ e $C = 1 + \frac{i_2}{i_1}$. Gli A.A. danno anche una terza approssimazione, ma la seconda è praticamente sufficiente.

plice suggerimento di PRANDTL, cioè di considerare i vortici di scia avvolti secondo eliche di inclinazione $\frac{V+v}{U-u}$, anzichè V/U , concetto cui già si è accennato al paragrafo 5. Il confronto mostra la pratica identità dei risultati dei due procedimenti e perciò il KRAMER ha pensato di poter applicare per analogia il suggerimento di PRANDTL allo studio dell'elica molto (o meglio, mediamente) caricata con numero finito di pale, per quanto riguarda la condizione di minima perdita di energia. I risultati si deducono facilmente da quelli che si hanno in prima approssimazione (cioè supponendo l'inclinazione V/U).

Se si introduce il rendimento indotto $\eta_i = \frac{V}{V+\bar{v}}$ e si pone:

$$(129) \quad \lambda_i = \frac{V+\bar{v}}{U} = \frac{\lambda}{\eta_i}$$

si ha:

$$(130) \quad c_T = \frac{8(1-\eta_i)}{\eta_i} K_{31} + \frac{8(1-\eta_i)}{\eta_i^2} K_{52}$$

$$(131) \quad c_P = c_T/\eta_i$$

dove K_{31} e K_{52} sono naturalmente espressi in funzioni di λ_i ⁽¹⁾.

Il suggerimento di PRANDTL può essere applicato a tutti i problemi di calcolo delle eliche quando $\bar{v}$ non sia piccolo di fronte a V , anche fuori dell'ipotesi ottima $\bar{v} = \text{cost}$.

L'applicazione di tale criterio porterà in generale una maggiore complicazione nei calcoli, in quanto occorrerà procedere per successive approssimazioni, non essendo noto « a priori » il valore di φ' .

23. — L'elica in corrente non uniforme e in corrente obliqua.

Dobbiamo qui distinguere due casi: 1) la corrente che investe l'elica non è uniforme, ma è funzione del raggio, ossia è assial-simmetrica rispetto all'asse dell'elica, 2) la corrente ha una velocità che varia da punto a punto del disco con legge qualunque.

Il primo caso, che si riferisce all'elica in presenza di un solido di rivoluzione coassiale ad essa, permette di sviluppare interessanti considerazioni sulla distribuzione degli incrementi e della circolazione che realizza la minima perdita di energia.

(1) Per il significato dei simboli K_{31} e K_{52} vedasi § 18.